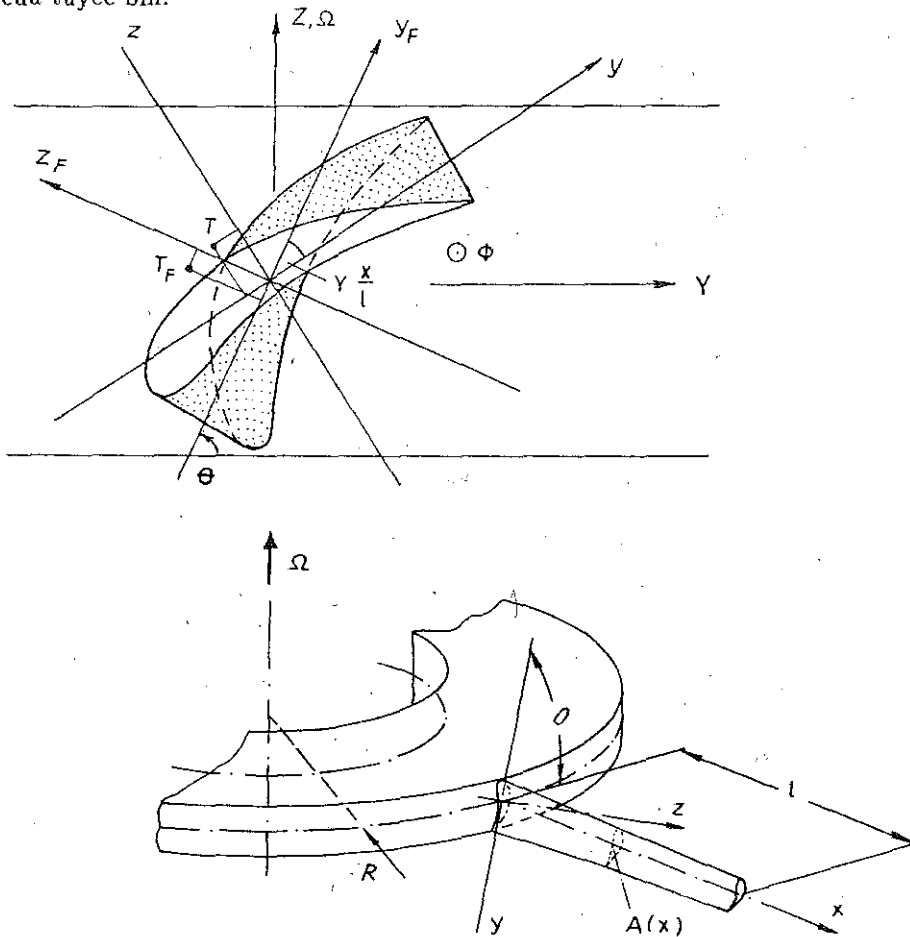


# PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG CỦA CÁNH TUYẾT BIN THEO PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

TRÌNH VĂN TÍN

## 1. ĐỘNG NĂNG VÀ THỂ NĂNG CỦA CHUYỂN ĐỘNG CÁNH TUYẾT BIN

Hệ tọa độ để khảo sát chuyển động của cánh tuyết bin đưa vào như hình 1, trong đó trục  $x$  dọc theo chiều dài cánh, trục  $y$  và  $z$  là trục quán tính chính của thiết diện với  $0 < x \leq l$  ( $l$  là chiều dài cánh),  $y_F, z_F$  là trục quán tính chính tại thiết diện gốc  $x = 0$  (Điểm nối giữa cánh và đĩa),  $\gamma$  là góc lệch giữa các trục quán tính chính tại  $x = 0$  và  $x = l$ ,  $\theta$  là góc lệch giữa trục quán tính chính tại  $x = 0$  và tiếp tuyến của đĩa tại điểm đó,  $T_S$  là tâm uốn tại thiết diện khảo sát,  $\Omega$  là vận tốc góc của tuyết bin.



Hình 1. Hệ tọa độ của cánh tuyết bin

Phương trình dao động của cánh tuyền bin được viết trên hệ tọa độ  $Ox_Fy_Fz_F$ . Trong quá trình tính toán, cánh tuyền bin được xem như mô hình của một thanh liên tục, thiết diện ngang của cánh bé so với chiều dài của nó. Ngoài các giả thiết về lý thuyết thanh liên tục như trong [1], cánh tuyền bin cần thỏa mãn các điều kiện sau:

- Vật liệu là đồng chất và đẳng hướng - tuân theo định luật Hook,
- Tại mỗi thiết diện các đại lượng như diện tích, khoảng cách giữa trọng tâm và tâm uốn, mô men quán tính, ... có thể biểu diễn dưới dạng đa thức hữu hạn của biến  $x$ ,
- Các góc lệch giữa trục quán tính tại  $x = 0$  và  $x = \ell$  biến thiên tuyến tính theo chiều dài.

Các biến dạng chính của cánh tuyền bin là biến dạng uốn theo hai phương nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục  $x$  và biến dạng xoắn quanh trục này. Ký hiệu  $V_T, W_T$  là chuyển dịch của tâm uốn và  $v, w$  là chuyển dịch trọng tâm của thiết diện, giữa hai đại lượng này có mối quan hệ:

$$\begin{aligned} V_T &= v + d_{zF}\phi, \\ W_T &= w - d_{yF}\phi, \end{aligned} \quad (1.1)$$

trong đó  $\phi$  là góc xoắn,  $d_{zF}, d_{yF}$  là khoảng cách giữa tâm uốn và trọng tâm trong hệ tọa độ khảo sát.

Động năng và thế năng của cánh tuyền bin được tính theo công thức [2]:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^\ell \rho \{ A [(\dot{V}_T)^2 + (\dot{W}_T)^2] + I_p \dot{\phi}^2 + I_{zF} (\dot{\varphi} + d_{zF} \dot{\phi}' + d'_{zF} \dot{\phi})^2 + \\ &\quad + I_{yF} (\dot{\psi} - d_{yF} \dot{\phi}' - d'_{yF} \dot{\phi})^2 \} dx, \\ U &= \frac{1}{2} \int_0^\ell \{ EI_{zF} (\varphi')^2 + EI_{yF} (\psi')^2 + 2I_{yzF} \varphi' \psi' + \kappa AG [(v' - \varphi)^2 + (w' - \psi)^2] + \\ &\quad + [(V'_T)^2 + (W'_T)^2] \int_x^\ell \rho A \Omega^2 (R + \bar{x}) d\bar{x} - \rho A \Omega^2 (V_T \cos \theta - W_T \sin \theta)^2 \} dx. \end{aligned} \quad (1.2)$$

trong đó  $A$  là diện tích thiết diện của cánh tuyền bin,  $R$  là bán kính đĩa tuyền bin,  $E, \theta, \kappa$  là mô đun đàn hồi, mô đun trượt và hệ số trượt.  $I_p$  là mô men quán tính cực. Các ký hiệu  $(\cdot), (\cdot)'$  là đạo hàm theo thời gian và theo biến chiều dài  $x$ .  $\varphi, \psi$  là góc nghiêng uốn gây ra chỉ do biến dạng uốn theo phương  $y$  và  $z$ .  $I_{yF}, I_{zF}$  và  $I_{yzF}$  là mô men quán tính đối với hệ tọa độ khảo sát,  $I_y, I_z$  là mô men quán tính tại tọa độ  $x$ . Giữa các đại lượng này có mối quan hệ:

$$\begin{aligned} I_{yF} &= I_y \cos^2 \gamma \frac{x}{\ell} + I_z \sin^2 \gamma \frac{x}{\ell}, \\ I_{zF} &= I_z \cos^2 \gamma \frac{x}{\ell} + I_y \sin^2 \gamma \frac{x}{\ell}, \\ I_{yzF} &= \frac{1}{2} (I_z - I_y) \sin 2\gamma \frac{x}{\ell}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Ký hiệu  $d_y, d_z$  là khoảng cách giữa trọng tâm và tâm uốn của thiết diện có tọa độ  $x$ , chúng cũng có mối liên hệ với các khoảng cách này ở thiết diện gốc  $d_{yF}, d_{zF}$  có dạng:

$$\begin{aligned} d_{yF} &= -d_z \sin \gamma \frac{x}{\ell} + d_y \cos \gamma \frac{x}{\ell}, \\ d_{zF} &= d_z \cos \gamma \frac{x}{\ell} + d_y \sin \gamma \frac{x}{\ell}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Từ (1.1), (1.2), (1.3) và (1.4), sau một số phép biến đổi, động năng và thế năng của hệ đưa về dạng:

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2} \int_0^\ell \rho \{ A[(\dot{v})^2 + (\dot{w})^2] + I_{zF} \dot{\phi}^2 + I_{yF} \dot{\psi}^2 + 2A d_{zF} \dot{v} \dot{\phi} - 2A d_{yF} \dot{w} \dot{\phi} + \\
& + [I_p + A(d_{zF}^2 + d_{yF}^2) + I_{zF}(d'_{zF})^2 + I_{yF}(d'_{yF})^2] \dot{\phi}^2 + [I_{zF} d_{zF}^2 + I_{yF} d_{yF}^2] \dot{\phi}'^2 + \\
& + 2I_{zF} d_{zF} \dot{\phi} \dot{\phi}' + 2I_{zF} d'_{zF} \dot{\phi} \dot{\phi}' - 2I_{yF} d_{yF} \dot{\psi} \dot{\psi}' - 2I_{yF} d'_{yF} \dot{\psi} \dot{\psi}' + \\
& + 2[I_{zF} d_{zF} d'_{zF} + I_{yF} d_{yF} d'_{yF}] \dot{\phi} \dot{\phi}' \} dx, \tag{1.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U = & \frac{1}{2} \int_0^\ell \{ EI_{zF} (\varphi')^2 + EI_{yF} (\psi')^2 + 2I_{yzF} \varphi' \psi' + KAG[(v' - \varphi')^2 + (w' - \psi')^2] + \\
& + \Omega^2 \{ Nv'^2 + Nw'^2 + [N((d'_{zF})^2 + (d'_{yF})^2) - \rho A(d_{zF} \cos \theta + d_{yF} \sin \theta)^2] \phi'^2 + \\
& + 2\rho A \sin \theta \cos \theta v w - \rho A \cos^2 \theta v^2 - \rho A \sin^2 \theta w^2 - 2\rho A [d_{zF} \cos^2 \theta + \\
& + d_{yF} \sin \theta \cos \theta] v \phi - 2\rho A [d_{yF} \sin^2 \theta + d_{zF} \sin \theta \cos \theta] w \phi + \\
& + N(d_{zF}^2 + d_{yF}^2) \phi'^2 + 2N d'_{zF} v' \phi' + 2N d_{zF} v' \phi' - 2N d'_{yF} w' \phi' - 2N d_{yF} w' \phi' + \\
& + 2N(d_{yF} d'_{yF} + d_{zF} d'_{zF}) \phi \phi' \} \} dx, \tag{1.6}
\end{aligned}$$

trong đó

$$N = \int_x^\ell \rho A(\bar{x})(R + \bar{x}) d\bar{x}. \tag{1.7}$$

là đại lượng tỷ lệ với lực ly tâm gây ra do chuyển động quay của trục bin. Biểu thức năng lượng (1.5), (1.6) trên là hàm của các tham số của cánh trục bin như diện tích thiết diện, góc lệch, góc uốn trước, khoảng cách giữa trọng tâm và tâm uốn, vận tốc góc quay ...

Để thuận tiện trong các tính toán tiếp theo ta đưa vào các đại lượng không thứ nguyên sau:

$$\begin{aligned}
\xi = \frac{x}{\ell}, \quad \eta = \frac{v}{\ell}, \quad \zeta = \frac{w}{\ell}, \quad \bar{R} = \frac{R}{\ell}, \quad c = \cos \theta, \quad s = \sin \theta, \\
\lambda^2 = \frac{\rho A_0}{EI_{y0}} \ell^4, \quad k^2 = \frac{\rho A_0}{EI_{y0}} \ell^4 \Omega^2, \tag{1.8}
\end{aligned}$$

( $A_0, I_{y0}, d_{y0}$  là các tham số tại thiết diện  $x = 0$ ).

Theo giả thiết ở trên, diện tích thiết diện, mô men quán tính, khoảng cách giữa tâm uốn và trọng tâm có thể biểu diễn là những đa thức của biến chiều dài  $\xi$  dưới dạng:

$$\begin{aligned}
A(\xi) &= A_0 f_A, \quad f_A = 1 + c_{A1} \xi + c_{A2} \xi^2 + \dots + c_{Am} \xi^m, \\
I_y(\xi) &= I_{y0} f_{I_y}, \quad f_{I_y} = 1 + c_{I_y1} \xi + c_{I_y2} \xi^2 + \dots + c_{I_y m} \xi^m, \\
I_z(\xi) &= I_{y0} f_{I_z}, \quad f_{I_z} = \frac{I_{z0}}{I_{y0}} + c_{I_z1} \xi + c_{I_z2} \xi^2 + \dots + c_{I_z m} \xi^m, \\
d_y(\xi) &= d_{y0} f_{d_y}, \quad f_{d_y} = 1 + c_{d_y1} \xi + c_{d_y2} \xi^2 + \dots + c_{d_y m} \xi^m, \\
d_z(\xi) &= d_{y0} f_{d_z}, \quad f_{d_z} = \frac{d_{z0}}{d_{y0}} + c_{d_z1} \xi + c_{d_z2} \xi^2 + \dots + c_{d_z m} \xi^m. \tag{1.9}
\end{aligned}$$

Thay các biểu thức trên vào biểu thức năng lượng, ta nhận được:

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2} \rho A_0 \ell^3 \int_0^1 \{ b_{11} \dot{\eta}^2 + b_{22} \dot{\zeta}^2 + b_{44} \dot{\phi}^2 + b_{55} \dot{\psi}^2 + 2b_{13} \dot{\eta} \dot{\phi} + 2b_{23} \dot{\zeta} \dot{\phi} + b_{33} \dot{\phi}^2 + \\
& + b_{66} \dot{\chi}^2 + 2b_{46} \dot{\phi} \dot{\chi} + 2b_{34} \dot{\phi} \dot{\phi}' + 2b_{56} \dot{\psi} \dot{\chi} + 2b_{35} \dot{\phi} \dot{\psi} + 2b_{36} \dot{\phi} \dot{\chi} \} d\xi, \tag{1.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U = \frac{1}{2} \frac{EI_{y0}}{\ell} \int_0^{\ell} \{ & r_{44}\varphi'^2 + r_{55}\psi'^2 + 2r_{45}\varphi'\psi' + r_{11}^*\eta'^2 + r_{22}^*s'^2 + a_{44}^*\varphi^2 + a_{55}^*\psi^2 - \\
& - 2ra_{14}^*\eta'\phi - 2r_{25}s'\psi + \Omega^2[r_{11}s'^2 + a_{33}\phi^2 + a_{11}\eta^2 + a_{22}s^2 + \\
& + 2a_{12}\eta s + 2a_{13}\eta\phi + 2a_{23}s\phi + a_{66}\chi^2 + 2r_{13}\eta'\phi + \\
& + 2r_{16}\eta'\chi + 2ra_{23}s'\phi + 2ra_{26}s'\chi + 2a_{36}\phi\chi] \} d\xi, \quad (1.11)
\end{aligned}$$

trong đó  $\chi = \frac{d\phi}{d\xi}$ , các hệ số  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $r_{ij}$ ,  $ra_{ij}^*$ ,  $ra_{ij}$  cho trong [3].

## 2. PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN ĐỂ TÍNH CÁNH TUYẾT BIN

Phương pháp PTHH được ứng dụng ở đây để tính các tích phân năng lượng (1.10), (1.11). Chiều dài  $\ell$  của cánh tuyết bin được chia thành  $N$  phần bằng nhau ( $N \geq 1$ ). Chuyển dịch bên trong mỗi phần tử được giả thiết tính qua chuyển dịch tại các điểm nút thông qua hàm thay thế. Hàm thay thế ở đây phải thỏa mãn các điều kiện liên tục và đạo hàm liên tục. Hiệu quả và chất lượng của phương pháp PTHH phụ thuộc vào việc lựa chọn hàm thay thế và số phần tử được phân chia. Tích phân một chiều hay hàm Lagrang  $L = T - U$  được tính:

$$L = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} F(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \left[ \int_0^{P_1} F(\xi) d\xi + \int_{P_1}^{P_2} F(\xi) d\xi + \dots + \int_{P_{i-1}}^{P_i} F(\xi) d\xi + \dots + \int_{P_{N-1}}^{P_N} F(\xi) d\xi \right] = \sum_{i=1}^N L_i, \quad (2.1)$$

trong đó  $F(\xi)$  là hiệu của hai hàm dưới dấu tích phân trong (1.10) và (1.11).  $L_i$  ký hiệu là tích phân của hàm Lagrang trong đoạn  $[p_{i-1}, p_i]$ . Trong phần tử thứ  $i$  biến số:

$$\xi = \frac{i-1}{N} + \frac{1}{N} \xi_i, \quad 0 \leq \xi_i \leq 1, \quad (2.2)$$

và hàm Lagrang được tính:

$$L_i = \frac{1}{N} \int_0^1 F(\xi) d\xi_i, \quad 0 \leq \xi_i \leq 1. \quad (2.3)$$

Véc tơ chuyển dịch đặc trưng cho hệ biến dạng uốn và xoắn của cánh tuyết bin được ký hiệu:

$$\bar{q}(\xi) = [\eta(\xi), s(\xi), \phi(\xi), \varphi(\xi), \psi(\xi), \chi(\xi)]^T. \quad (2.4)$$

Véc tơ chuyển dịch tại các điểm nút của phần tử thứ  $i$  là:

$$\begin{aligned}
\bar{q}_{i-1}(\xi_i) &= [\eta_{i-1}, s_{i-1}, \phi_{i-1}, \varphi_{i-1}, \psi_{i-1}, \chi_{i-1}]^T \\
\bar{q}_i(\xi_i) &= [q_{i1}, q_{i2}, q_{i3}, q_{i4}, q_{i5}, q_{i6}]^T = [\eta_i, s_i, \phi_i, \varphi_i, \psi_i, \chi_i]^T.
\end{aligned} \quad (2.5)$$

Trường biến dạng bên trong phần tử thứ  $i$  được tính qua biến dạng của các đầu nút:

$$\bar{q}(\xi) = G^*(\xi) \cdot \bar{q}_i(\xi_i), \quad (2.6)$$

với  $G^*(\xi)$  là ma trận hàm thay thế.

Hàm thay thế  $G^*(\xi)$  trong phần tử thứ  $i$  đối với biến dạng uốn và xoắn ở đây được chọn là:

$$\begin{aligned}
\eta(\xi_i) &= \eta_{i-1}H_1 + \varphi_{i-1}H_2 + \eta_iH_3 + \varphi_iH_4, \\
\varphi(\xi_i) &= \eta_{i-1}H'_1 + \varphi_{i-1}H'_2 + \eta_iH'_3 + \varphi_iH'_4, \\
\zeta(\xi_i) &= \zeta_{i-1}H_1 + \psi_{i-1}H_2 + \zeta_iH_3 + \psi_iH_4, \\
\psi(\xi_i) &= \zeta_{i-1}H'_1 + \psi_{i-1}H'_2 + \zeta_iH'_3 + \psi_iH'_4, \\
\phi(\xi_i) &= \phi_{i-1}H_1 + \chi_{i-1}H_2 + \phi_iH_3 + \chi_iH_4, \\
\chi(\xi_i) &= \phi_{i-1}H'_1 + \chi_{i-1}H'_2 + \phi_iH'_3 + \chi_iH'_4,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

trong đó  $H_1, H_2, H_3, H_4$  là những đa thức Hermit bậc 3 của  $\xi_i$  [4].

Thay các biểu thức trên vào (1.10) và (1.11). Khi đó hàm Lagrang là hàm của các biến điểm nút:

$$L = \sum_{i=1}^N L_i = L[\eta_1, \zeta_1, \phi_1, \varphi_1, \psi_1, \chi_1, \dots, \eta_i, \zeta_i, \phi_i, \varphi_i, \psi_i, \chi_i, \dots, \eta_N, \zeta_N, \phi_N, \varphi_N, \psi_N, \chi_N]. \tag{2.8}$$

### 3. PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG CỦA CÁNH TUYẾT BIN

Từ biểu thức hàm Lagrang (2.8) ở trên, sử dụng phương trình Lagrang loại 2 ta thu được phương trình chuyển động của cánh tuyết bin dưới dạng ma trận:

$$M\ddot{\vec{q}} + (K_1 + \Omega^2 K_2)\vec{q} = \vec{Q}(t), \tag{3.1}$$

trong đó

$$\vec{q} = [q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{14}, q_{15}, q_{16}, \dots, q_{N1}, q_{N2}, q_{N3}, q_{N4}, q_{N5}, q_{N6}]^T \tag{3.2}$$

và véc tơ lực ngoài tác dụng:

$$\vec{Q} = [Q_{q_{11}}, \dots, Q_{q_{16}}, \dots, Q_{q_{N1}}, \dots, Q_{q_{N6}}]^T, \tag{3.3}$$

$M, K_1, K_2$  là ma trận khối lượng và ma trận độ cứng. Chúng là những ma trận đối xứng.

Trong thực tế, biên độ dao động của cánh tuyết bin còn phụ thuộc vào giảm chấn [5]. Giả thiết rằng hệ số giảm chấn được mô tả qua đại lượng  $D\dot{\vec{q}}$ , khi đó phương trình chuyển động có dạng:

$$M\ddot{\vec{q}} + D\dot{\vec{q}} + (K_1 + \Omega^2 K_2)\vec{q} = \vec{Q}(t). \tag{3.4}$$

Điều kiện biên đối với cánh tuyết bin một đầu ngàm, một đầu tự do là:

$$\begin{aligned}
&\text{tại } x = 0, (\xi = \xi_0 = 0) \\
&\eta_0 = 0, \zeta_0 = 0, \phi_0 = 0, \varphi_0 = 0, \psi_0 = 0, \chi_0 = 0, \\
&\text{tại } x = \ell, (\xi = \xi_N = 1) \\
&\varphi'_N = 0, \psi'_N = 0, \chi_N = 0.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Phương trình chuyển động (3.1) với điều kiện biên (3.5) là phương trình cơ sở để giải bài toán dao động của cánh tuyết bin như bài toán về tìm dao động riêng, bài toán về dao động của cánh tuyết bin dưới tác dụng của lực ngoài cũng như các vấn đề về độ bền và độ tin cậy của cánh tuyết bin trong quá trình làm việc.

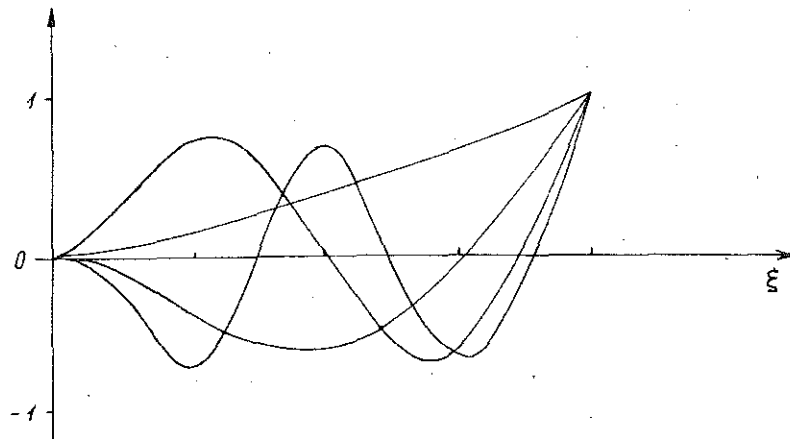
#### 4. VÍ DỤ VỀ TÍNH TOÁN GIÁ TRỊ RIÊNG VÀ DAO ĐỘNG RIÊNG

Phương trình chuyển động (3.1) và điều kiện biên (3.5) được áp dụng ở đây để tính giá trị riêng và dạng dao động riêng của cánh tủy bin với thiết diện thay đổi.

Các tham số  $C_{A1}$ ,  $C_{Iz1}$  trong biểu thức  $\frac{A(\xi)}{A_0} = 1 - C_{A1}\xi$ ,  $\frac{I_z(\xi)}{I_0} = 1 - C_{Iz1}\xi$  đặc trưng cho sự thay đổi tuyến tính của thiết diện và mô men quán tính theo chiều dài,  $k$  đặc trưng cho sự biến đổi của vận tốc góc quay của tủy bin,  $n = 1, 2, 4, 8$  là số phần tử được chia ra của cánh tủy bin theo chiều dài. Các kết quả thu được cho tần số riêng được so sánh với kết quả tính toán bằng các phương pháp khác. Dưới đây là kết quả tính toán cho tần số riêng thứ nhất và bốn dạng dao động riêng đầu tiên của cánh tủy bin vẽ với tham số  $k = 12$ .

Bảng 1. Tần số riêng thứ nhất với các tham số  $C_{Iz1} = 0,95$ ,  $C_{A1} = 0,8$

| $k \setminus n$ | 1        | 2        | 4        | 8        | Theo [6] |
|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0               | 5,27694  | 5,27452  | 5,27480  | 5,32729  | 5,27380  |
| 1               | 5,39278  | 5,39053  | 5,38667  | 5,38310  | 5,39030  |
| 2               | 5,72582  | 5,72491  | 5,72498  | 5,78593  | 5,72490  |
| 3               | 6,24023  | 6,24023  | 6,245209 | 6,18934  | 6,24020  |
| 4               | 6,89413  | 6,89326  | 6,89375  | 6,85548  | 6,89280  |
| 5               | 7,65010  | 7,65427  | 7,64383  | 7,66567  | 7,64430  |
| 6               | 8,47948  | 8,46757  | 8,46554  | 8,48363  | 8,46530  |
| 7               | 9,36133  | 9,33952  | 9,33439  | 9,36674  | 9,33470  |
| 8               | 10,28110 | 10,24628 | 10,27384 | 10,25520 | 10,27390 |
| 9               | 11,22874 | 11,17805 | 11,16692 | 11,17717 | 11,16500 |
| 10              | 12,19714 | 12,12828 | 12,10986 | 12,16441 | 12,10920 |
| 11              | 13,18137 | 13,09235 | 13,06744 | 13,09914 | 13,06570 |
| 12              | 14,17763 | 14,06673 | 14,03468 | 14,02354 | 14,03130 |



Bốn dạng dao động riêng đầu tiên với vận tốc góc quay  $k = 12$

## 5. KẾT LUẬN

Trong bài báo này đã đưa ra một phương pháp thiết lập hệ phương trình dao động của cánh tuốc bin dựa trên phương pháp phần tử hữu hạn. Hệ phương trình chuyển động này áp dụng để tính toán các tham số dao động cũng như các vấn đề về độ bền và độ tin cậy của cánh tuốc bin.

Địa chỉ:  
Viện Cơ học Viện KHVN

Nhận ngày 25/3/1993

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Timoshenko S. Vibration problems in engineering, D. von Nostrand Comp., Inc., Toronto, 1975.
2. Fu C. C. Computer analysis of a rotating axial turbomachine blade in couple bending - bending - torsion vibration, Int. J. Num. Meth. Engng. 8 (1974).
3. Mahrenholtz O., Tin T. V. Bewegungsgleichungen der turbinenschaufel mittels der finite - element - methode. Bericht Nr. IB-026, Meerestechnik II, TU Hamburg - Harburg 1992.
4. Schwarz H. R. Methode der finiten elemente. Stuttgart, 1980.
5. Rieger N. F. Damping properties of turbine blades. Shock and Vibration Digest, 11 (No. 4) 1979.
6. Hennig K. über Schwingungen rotierender Biegestäbe Report R-MECH 02/86 Adw der DDR, 1986.

## SUMMARY

### THE MOTION EQUATION OF TURBINE BLADE BY THE FINITE ELEMENT METHOD

In this paper, the finite element method has been applied to deriving the motion equation of turbine blade in coupled bending - bending - torsion vibrations. These equations permit us to develop straightforwardly digital computer programs for studying vibration problems of turbine blades in turbomachinery as well as in other structural dynamic applications.