Tạp chí CƠ HỌC, tập XV, 1993 số 4 (24 – 31)

ỔN ĐỊNH CỦA CON LẮC NGƯỢC KHI ĐIỂM TREO DAO ĐỘNG ĐA TẦN

NGUYỄN VĂN ĐÌNH

ĐẶT VẤN ĐỀ

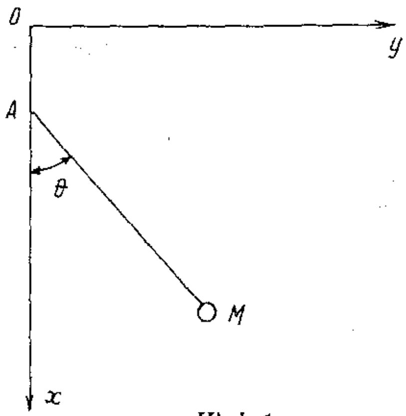
Bài toán con lắc ngược xét một hiện tượng lý thú và có ý nghĩa kỹ thuật: vị trí cân bằng không ổn định của con lắc ở vị trí trên sẽ trở nên ổn định nếu điểm treo con lắc dao động với tần số đủ cao. Trong [1], bài toán này đã được giải quyết nhờ phương pháp trung bình khi điểm treo con lắc dao động điều hòa theo phương thẳng đứng. Tổng quát hơn, giả thiết điểm treo dao động theo quy luật phức tạp. Hướng mở rộng này đã được đề cập đến trong [2] cũng khi xét con lắc ngược và trong [3] khi xét con lắc ở vị trí cân bằng thấp và trong chuyển động quay toàn vòng nhưng vẫn hạn chế ở trường hợp điểm treo dao động thẳng điều hòa theo phương nghiêng. Dưới đây, giả thiết điểm treo con lắc dao động với hai tần số theo phương thẳng đứng hoặc trong mặt phẳng thẳng đứng, sẽ xét vấn đề ổn định của con lắc ngược. Phương pháp trung bình vẫn được sử dụng nhưng ở xấp xỉ thứ hai để có thể khảo sát tương tác giữa các thành phần dao động của điểm treo nhất là khi có cộng hưởng giữa các thành phần đó.

1. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG CỦA CON LẮC CÓ ĐIỂM TREO DAO ĐỘNG THẲNG ĐỨNG

Cho con lắc AM là khối lượng m tập trung tại đầu M của thanh không trọng lượng AM, chiều dài ℓ, quay được trong mặt phẳng thẳng đứng Oxy quanh điểm treo A, điểm này dao động dọc trục thẳng đứng Ox với hai tần số theo luật (*hình 1*):

$$OA = x_A = a_1 sin\omega_1 t + a_2 sin\omega_2(t + \chi) \qquad (1.1)$$

trong đó : a_1, a_2 và ω_1, ω_2 - những số dương tương ứng chỉ các biên độ và tần số của các thành phần dao động của điểm treo con lắc; $\chi(-\pi \leq \omega_2\chi \leq \pi)$ - độ lệch pha giữa hai thành phần dao động nói trên.



Hình 1

Phương trình vi phân chuyển động của con lắc là:

$$m\ell^2\ddot{\theta} + h\dot{\theta} + mg\ell\sin\theta + m\ell[a_1\omega_1^2\sin\omega_1 t + a_2\omega_2^2\sin\omega_2(t+\chi)]\sin\theta = 0 \qquad (1.2)$$

trong đó : θ - góc nghiêng của con lắc với trục Ox; $h > 0$ - hệ số cản nhớt; g - gia tốc trọng trường; dấu "." - ký hiệu đạo hàm theo thời gian t.

Có thể viết (1.2) dưới dạng:

$$\theta'' + \frac{\lambda}{\omega}\theta' + \left\{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \frac{a}{\ell}\left[e_1\nu_1^2 \sin\nu_1\tau + e_2\nu_2^2 \sin\nu_2(\tau+\sigma)\right]\right\}\sin\theta = 0 \tag{1.3}$$

trong đó: ω, a - hai số dương tương ứng đặc trưng cho mức các tần số và các biên độ của các thành phần dao động của điểm treo con lắc; dấu "$'$" - ký hiệu đạo hàm theo $\tau = \omega t$; $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$ - tần số riêng của con lắc; $\lambda = h/m\ell^2$, $e_1 = a_1/a$, $e_2 = a_2/a$, $\nu_1 = \omega_1/\omega$, $\nu_2 = \omega_2/\omega$, $\nu_2\sigma = \omega_2\chi$.

Xét trường hợp $a \ll \ell$ và chọn $\varepsilon = a/\ell$ làm tham số bé. Giả thiết ω_0/ω và λ/ω_0 đều ở cấp ε (cản yếu hơn so với giả thiết trong [1], chương V, trang 308-311), phương trình vi phân (1.3) trở thành:

$$\theta'' + 2\alpha\varepsilon^2\theta' + \left\{k^2\varepsilon^2 + \varepsilon\left[e_1\nu_1^2 \sin\nu_1\tau + e_2\nu_2^2 \sin\nu_2(\tau+\sigma)\right]\right\}\sin\theta = 0 \tag{1.4}$$

trong đó:

$$2\alpha = \frac{\lambda}{\omega_0}\frac{\frac{\omega_0}{\omega}}{\left(\frac{a}{\ell}\right)^2}, \quad k^2 = \left(\frac{\frac{\omega_0}{\omega}}{\frac{a}{\ell}}\right)^2, \quad e_1,\ e_2,\ \nu_1,\ \nu_2$$

đều ở cấp đơn vị.

Tương tự trong [1], thực hiện phép biến đổi:

$$\theta = \varphi + \varepsilon\left[e_1 \sin\nu_1 t + e_2 \sin\nu_2(\tau+\sigma)\right]\sin\varphi, \tag{1.5}$$

$$\theta' = \varepsilon\Omega + \varepsilon\left[e_1\nu_1 \cos\nu_1\tau + e_2\nu_2 \cos\nu_2(\tau+\sigma)\right]\sin\varphi, \tag{1.6}$$

trong đó φ, Ω là hai biến mới.

So sánh (1.5) (1.6), nếu chỉ giữ lại các đại lượng đến cấp ε^2, suy ra:

$$\varphi' = \varepsilon\Omega - \varepsilon^2\Omega\left[e_1 \sin\nu_1 t + e_2 \sin\nu_2(\tau+\sigma)\right]\cos\varphi \tag{1.7}$$

Thay (1.5) (1.6) vào (1.4), sau khai triển và giản ước, nếu chỉ giữ lại các đại lượng đến cấp ε^2, sẽ được:

$$\begin{aligned}
\Omega' = &-\varepsilon\Big\{\Omega\left[e_1\nu_1 \cos\nu_1\tau + e_2\nu_2 \cos\nu_2(\tau+\sigma)\right]\cos\varphi + k^2\sin\varphi + \\
&+ \left[e_1\nu_1^2 \sin\nu_1\tau + e_2\nu_2^2 \sin\nu_2(\tau+\sigma)\right]\left[e_1 \sin\nu_1\tau + e_2 \sin\nu_2(\tau+\sigma)\right]\cos\varphi\sin\varphi\Big\} + \\
&+ \varepsilon^2\Big\{\Omega\left[e_1\nu_1 \cos\nu_1\tau + e_2\nu_2 \cos\nu_2(\tau+\sigma)\right]\left[e_1 \sin\nu_1\tau + e_2 \sin\nu_2(\tau+\sigma)\right]\cos^2\varphi - \\
&- 2\alpha\Omega - 2\alpha\left[e_1\nu_1 \cos\nu_1\tau + e_2\nu_2 \cos\nu_2(\tau+\sigma)\right]\sin\varphi \\
&- k^2\left[e_1 \sin\nu_1\tau + e_2 \sin\nu_2(\tau+\sigma)\right]\cos\varphi\sin\varphi + \\
&+ \frac{1}{2}\left[e_1\nu_1^2 \sin\nu_1\tau + e_2\nu_2^2 \sin\nu_2(\tau+\sigma)\right]\left[e_1 \sin\nu_1\tau + e_2 \sin\nu_2(\tau+\sigma)\right]^2\sin^3\varphi\Big\}
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Hệ (1.7) (1.8) là hệ phương trình vi phân hạng nhất, dạng chuẩn, ở xấp xỉ thứ hai của con lắc khảo sát.

2. CON LẮC NGƯỢC CÓ ĐIỂM TREO DAO ĐỘNG THẲNG ĐỨNG - TRƯỜNG HỢP XA CỘNG HƯỞNG

Xét ổn định của trạng thái cân bằng của con lắc ngược khi $\nu_1 \neq \nu_2$, $\nu_1 \neq 2\nu_2$, $\nu_2 \neq 2\nu_1$ gọi là trường hợp xa cộng hưởng.

Tiến hành trung bình hóa hệ (1.7), (1.8) đến xấp xỉ thứ hai.

Ở xấp xỉ thứ nhất, hệ phương trình trung bình là:

$$\begin{aligned}\varphi_1' &= \varepsilon\Omega_1\\ \Omega_1' &= -\varepsilon\Big\{k^2\sin\varphi_1 + \frac{1}{2}(e_1^2\nu_1^2 + e_2^2\nu_2^2)\sin\varphi_1\cos\varphi_1\Big\}\end{aligned} \tag{2.1}$$

trong đó chỉ số 1 dùng để phân biệt các biến φ, Ω ban đầu với các biến đó ở các xấp xỉ.

Hệ (2.1) tương đương với một phương trình vi phân hạng hai:

$$\varphi_1'' + \varepsilon^2\Big\{k^2\sin\varphi_1 + \frac{1}{2}(e_1^2\nu_1^2 + e_2^2\nu_2^2)\sin\varphi_1\cos\varphi_1\Big\} = 0 \tag{2.2}$$

Dễ dàng thấy $\varphi_1 = \pi$ (con lắc ngược) là nghiệm của (2.1) và điều kiện cần để ổn định là:

$$k^2 < \frac{1}{2}(e_1^2\nu_1^2 + e_2^2\nu_2^2) \tag{2.3}$$

Đó là điều kiện để phương trình biến phân tương ứng không có nghiệm đặc trưng có phần thực dương mà có cặp nghiệm ảo liên hợp. Vì vậy, vấn đề ổn định chưa được giải quyết (do cản yếu) và cần thiết trung bình hóa ở xấp xỉ thứ hai.

Xấp xỉ hoàn chỉnh thứ nhất có dạng:

$$\begin{aligned}\varphi = \varphi_1 \text{ và } \Omega = \Omega_1 - \varepsilon\Big\{&\Omega_1\big[e_1\sin\nu_1\tau + e_2\sin\nu_2(\tau+\sigma)\big]\cos\varphi_1\\ &- \frac{1}{4}\big[e_1^2\nu_1\sin 2\nu_1\tau + e_2^2\nu_2\sin 2\nu_2(\tau+\sigma)\big]\sin\varphi_1\cos\varphi_1\\ &+ \frac{1}{2}e_1e_2(\nu_1^2+\nu_2^2)\sin\varphi_1\cos\varphi_1\Big(\frac{\sin[(\nu_1-\nu_2)\tau - \nu_2\sigma]}{\nu_1-\nu_2} - \frac{\sin[(\nu_1+\nu_2)\tau + \nu_2\sigma]}{\nu_1+\nu_2}\Big)\Big\}\end{aligned} \tag{2.4}$$

Thay (2.4) vào hệ (1.7), (1.8), kết quả trung bình hóa cho hệ phương trình trung bình ở xấp xỉ thứ hai:

$$\begin{aligned}\varphi_1' &= \varepsilon\Omega_1\\ \Omega_1' &= -\varepsilon\Big\{k^2\sin\varphi_1 + \frac{1}{2}(e_1^2\nu_1^2 + e_2^2\nu_2^2)\sin\varphi_1\cos\varphi_1\Big\} - \varepsilon^2.2\alpha\Omega_1\end{aligned} \tag{2.5}$$

Hệ (2.5) tương đương với một phương trình vi phân hạng hai:

$$\varphi_1'' + 2\alpha\varepsilon^2\varphi_1' + \varepsilon^2\Big\{k^2\sin\varphi_1 + \frac{1}{2}(e_1^2\nu_1^2 + e_2^2\nu_2^2)\sin\varphi_1\cos\varphi_1\Big\} = 0 \tag{2.6}$$

Để khảo sát ổn định của con lắc ngược $\varphi_1 = \pi$ đặt $\varphi_1 = \pi + \delta\varphi$ và lập hệ biến phân:

$$(\delta\varphi)'' + 2\alpha\varepsilon^2\Big\{-k^2 + \frac{1}{2}(e_1^2\nu_1^2 + e_2^2\nu_2^2)\Big\}\delta\varphi = 0 \tag{2.7}$$

Do $\alpha > 0$, điều kiện (2.3) trở thành điều kiện đủ để có ổn định và theo các ký hiệu ban đầu là:

$$\omega_0^2 < \frac{1}{2}\Big\{\Big(\frac{a_1}{\ell}\Big)^2\omega_1^2 + \Big(\frac{a_2}{\ell}\Big)^2\omega_2^2\Big\} \tag{2.8}$$

Trong [1], khi điểm treo của con lắc dao động thẳng đứng điều hòa với biên độ a, tần số ω và khi λ/ω ở cấp đơn vị (cản mạnh hơn), từ hệ phương trình trung bình hóa ở xấp xỉ thứ nhất suy ra điều kiện đủ để con lắc ngược ổn định là:

$$\omega_0^2 < \frac{1}{2}\Big(\frac{a}{\ell}\Big)\omega^2 \tag{2.9}$$

Rõ ràng (2.8) mở rộng (2.9) và cho thấy các thành phần dao động của điểm treo đã "cộng" tác dụng. Như thế, có thể ổn định con lắc ngược nhờ nhiều thành phần dao động của điểm treo với tần số tương đối thấp hơn.

Chú ý rằng, ngoài vị trí cân bằng thấp $\varphi = 0$ và vị trí cân bằng ngược $\varphi = \pi$ còn có vị trí cân bằng trung gian φ_0 xác định bởi hệ thức $\cos\varphi_0 = -2k^2/(e_1^2\nu_1^2 + e_2^2\nu_2^2)$. Vị trí cân bằng thấp luôn ổn định khi điểm treo dao động với tần số đủ cao. Vị trí cân bằng ngược luôn tồn tại sẽ trở nên ổn định khi tần số dao động điểm treo đủ cao và tính ổn định tăng theo tần số đó. Vị trí cân bằng trung gian xuất hiện khi vị trí cân bằng ngược ổn định nhưng không ổn định và mức không ổn định của vị trí cân bằng trung gian tăng theo tần số dao động điểm treo.

3. CON LẮC NGƯỢC CÓ ĐIỂM TREO DAO ĐỘNG THẲNG ĐỨNG - TRƯỜNG HỢP CỘNG HƯỞNG

Đây là trường hợp mà, ở xấp xỉ thứ hai, một trong ba hệ thức sau được thỏa mãn: $\nu_1 \approx \nu_2$, $\nu_1 \approx 2\nu_2$, $\nu_2 \approx 2\nu_1$.

Có thể rút ra những nhận định về ảnh hưởng của tình trạng cộng hưởng giữa các tần số kích động đến tính ổn định của con lắc ngược qua các trường hợp cộng hưởng đúng.

Trước hết giả thiết $\nu_1 = \nu_2 = \nu$. Đây là trường hợp đã biết vì điểm treo dao động điều hòa với tần số ν và với biên độ:

$$a_* = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos\nu\chi} \tag{3.1}$$

và theo (2.3) điều kiện ổn định của con lắc ngược là :

$$\omega_0^2 < \frac{1}{2}\left(\frac{a_*}{\ell}\right)^2\nu^2 \tag{3.2}$$

Như thế, độ lệch pha χ điều chỉnh biên độ dao động tổng hợp và qua đó ảnh hưởng đến tính ổn định của con lắc ngược.

Bây giờ giả thiết $\nu_2 = 2\nu_1 = 2\nu$. Xấp xỉ thứ nhất hoàn chỉnh vẫn có dạng (2.4). Kết quả trung bình hóa hệ (1.7), (1.8) ở xấp xỉ thứ hai cho:

$$\begin{aligned}
\varphi_1' &= \varepsilon\Omega_1' \\
\Omega_1' &= -\varepsilon\Big\{k^2\sin\varphi_1 + \frac{1}{2}(e_1^2\nu_1^2 + e_2^2\nu_2^2)\sin\varphi_1\cos\varphi_1\Big\} \\
&\quad + \varepsilon^2\Big\{\frac{1}{8}e_1^2e_2\nu_1\nu_2\sin\varphi_1\cos^2\varphi_1\sin\nu_\sigma - \frac{e_1^2e_2\nu_1(\nu_1^2+\nu_2^2)}{4(\nu_1-\nu_2)}\sin\nu_2\sigma\sin\varphi_1\cos^2\varphi_1 \\
&\quad - 2\alpha\Omega_1 - \frac{1}{4}e_1^2e_2\nu_1^2\sin\nu_2\sigma\sin^3\varphi_1 - \frac{1}{8}e_1^2e_2\nu_2^2\sin\nu_2\sigma\sin^3\varphi_1\Big\}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Hệ (3.3) tương đương với một phương trình vi phân hạng hai:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1'' + 2\alpha\varepsilon^2\varphi_1' + \varepsilon^2\Big\{k^2\sin\varphi_1 + \frac{1}{2}(e_1^2\nu_1^2 + e_2^2\nu_2^2)\sin\varphi_1\cos\varphi_1\Big\} \\
&\quad - \varepsilon^3\Big\{\frac{1}{8}e_1^2e_2\sin\nu_2\sigma\sin\varphi_1\cos^2\varphi_1\Big[\nu_1\nu_2 + \frac{2\nu_1(\nu_1^2+\nu_2^2)}{\nu_2-\nu_1}\Big] \\
&\quad - \frac{1}{8}e_1^2e_2(2\nu_1^2 + \nu_2^2)\sin\nu_2\sigma\sin^3\varphi_1 = 0.\Big\}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Chế độ cân bằng của con lắc ngược vẫn tồn tại và điều kiện ổn định là :

$$k^2 < \frac{1}{2}(e_1^2\nu_1^2 + e_2^2\nu_2^2) + \frac{\varepsilon}{8}e_1^2 e_2 \sin\nu_2\sigma\Big[\nu_1\nu_2 + \frac{2\nu_1(\nu_1^2+\nu_2^2)}{\nu_2-\nu_1}\Big] =$$

$$= \frac{1}{2}(e_1^2 + 4e_2^2)\nu^2 + \varepsilon\frac{3}{2}e_1^2 e_2\nu^2 \sin 2\nu\sigma \tag{3.5}$$

So sánh với (2.3), điều kiện (3.5) có thêm số hạng ở cấp ε. Vậy về cơ bản, ở trường hợp cộng hưởng, tình trạng ổn định của con lắc ngược vẫn như khi xa cộng hưởng; chỉ khi $k^2 \approx \frac{1}{2}(e_1^2\nu_1^2 + e_2^2\nu_2^2)$ nghĩa là khi con lắc ngược nằm ở ranh giới của miền ổn định thì ảnh hưởng của tình trạng cộng hưởng giữa các tần số kích động mới dẫn đến những thay đổi định tính.

Trường hợp $\nu_1 = 2\nu_2$ cũng tương tự.

4. CON LẮC NGƯỢC CÓ ĐIỂM TREO DAO ĐỘNG PHẲNG

Mở rộng bài toán, cho điểm treo A của con lắc dao động trong mặt phẳng Oxy theo luật:

$$x_A = a_1 \sin\omega_1 t, \quad y_A = a_2 \sin\omega_2(t+\chi) \tag{4.1}$$

Với cùng những giả thiết và ký hiệu đã biết, phương trình vi phân chuyển động của con lắc là:

$$\theta'' + 2\alpha\varepsilon^2\theta' + k^2\varepsilon^2\sin\theta + \varepsilon\Big\{e_1\nu_1^2\sin\nu_1\tau\sin\theta - e_2\nu_2^2\sin\nu_2(\tau+\sigma)\cos\theta\Big\} \tag{4.2}$$

Hiển nhiên $\theta = \pi$ không phải là nghiệm của phương trình (4.2) nghĩa là không tồn tại chế độ cân bằng ngược vì khi điểm treo A dao động ngang, con lắc nhất thiết dao động. Vì vậy, ở đây, sẽ chỉ nói đến chế độ dao động nhỏ (cấp ε) của con lắc quanh trục thẳng đứng qua A.

Thực hiện phép đổi biến:

$$\begin{aligned}
\theta &= \varphi + \varepsilon\Big\{e_1\sin\nu_1\tau\sin\varphi - e_2\sin\nu_2(\tau+\sigma)\cos\varphi\Big\}\\
\theta' &= \varepsilon\Omega + \varepsilon\Big\{e_1\nu_1\cos\nu_1\tau\sin\varphi - e_2\nu_2\cos\nu_2(\tau+\sigma)\cos\varphi\Big\}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Hệ phương trình vi phân hạng nhất dạng chuẩn theo φ, Ω là :

$$\begin{aligned}
\varphi' &= \varepsilon\Omega - \varepsilon^2\Omega\Big\{e_1\sin\nu_1\tau\cos\varphi + e_2\sin\nu_2(\tau+\sigma)\sin\varphi\Big\}\\
\Omega' &= -\varepsilon\Big\{\Omega\big[e_1\nu_1\cos\nu_1\tau\cos\varphi + e_2\nu_2\cos\nu_2(\tau+\sigma)\sin\varphi\big] + k^2\sin\varphi\\
&\quad + \big[e_1\nu_1^2\sin\nu_1\tau\cos\varphi + e_2\nu_2^2\sin\nu_2(\tau+\sigma)\sin\varphi\big]\big[e_1\sin\nu_1\tau\sin\varphi - e_2\sin\nu_2(\tau+\sigma)\cos\varphi\big]\Big\}\\
&\quad + \varepsilon^2\Big\{\Omega\big[e_1\nu_1\cos\nu_1\tau\cos\varphi + e_2\nu_2\cos\nu_2(\tau+\sigma)\sin\varphi\big]\big[e_1\sin\nu_1\tau\cos\varphi + e_2\sin\nu_2(\tau+\sigma)\sin\varphi\big]\\
&\quad - 2\alpha\Omega - 2\alpha\big[e_1\nu_1\cos\nu_1\tau\sin\varphi - e_2\nu_2\cos\nu_2(\tau+\sigma)\cos\varphi\big]\\
&\quad - k^2\cos\varphi\big[e_1\sin\nu_1\tau\sin\varphi - e_2\sin\nu_2(\tau+\sigma)\cos\varphi\big]\\
&\quad + \frac{1}{2}\big[e_1\nu_1^2\sin\nu_1\tau\sin\varphi - e_2\nu_2^2\sin\nu_2(\tau+\sigma)\cos\varphi\big]\big[e_1\sin\nu_1\tau\sin\varphi - e_2\sin\nu_2(\tau+\sigma)\cos\varphi\big]^2\Big\}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Xét trường hợp xa cộng hưởng : $\nu_1 \neq \nu_2$, $\nu_1 \neq 2\nu_2$, $\nu_2 \neq 2\nu_1$.

Xấp xỉ thứ nhất hoàn chỉnh có dạng:

$$\begin{aligned}\varphi = \varphi_1 \text{ và } \Omega &= \Omega_1 - \varepsilon\Omega_1\big[e_1 \sin\nu_1\tau\cos\varphi_1 + e_2\sin\nu_2(\tau+\sigma)\sin\varphi_1\big] \\ &+ \varepsilon\sin\varphi_1\big[\frac{1}{4}e_1^2\nu_1\sin 2\nu_1\tau - \frac{1}{4}e_2^2\nu_2\sin 2\nu_2(\tau+\sigma)\big] \\ &+ \frac{\varepsilon}{2}e_1e_2(\nu_1^2\cos^2\varphi_1 - \nu_2^2\sin^2\varphi_1)\Big\{\frac{\sin[(\nu_1-\nu_2)\tau - \nu_2\sigma]}{\nu_1-\nu_2} - \frac{\sin[(\nu_1+\nu_2)\tau+\nu_2\sigma]}{\nu_1+\nu_2}\Big\}\end{aligned} \tag{4.5}$$

Thay (4.5) vào (4.4), kết quả trung bình hóa cho hệ trung bình ở xấp xỉ thứ hai:

$$\begin{aligned}\varphi_1' &= \varepsilon\Omega_1 \\ \Omega_1' &= -\varepsilon\Big\{k^2\sin\varphi_1 + \frac{1}{2}(e_1^2\nu_1^2 - e_2^2\nu_2^2)\sin\varphi_1\cos\varphi_1\Big\} - \varepsilon^2 2\alpha\Omega_1\end{aligned} \tag{4.6}$$

tương đương với phương trình vi phân hạng hai:

$$\varphi_1'' + 2\alpha\varepsilon^2\varphi_1\prime + \varepsilon^2\Big\{k^2\sin\varphi_1 + \frac{1}{2}(e_1^2\nu_1^2 - e_2^2\nu_2^2)\sin\varphi_1\cos\varphi_1\Big\} = 0 \tag{4.7}$$

Vị trí cân bằng $\varphi = \pi$ của con lắc ngược tồn tại và điều kiện ổn định là:

$$k^2 < \frac{1}{2}(e_1^2\nu_1^2 - e_2^2\nu_2^2) \quad \text{hay} \quad \omega_0^2 < \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{a_1}{\ell}\Big)^2\omega_1^2 - \Big(\frac{a_2}{\ell}\Big)^2\omega_2^2\Big] \tag{4.8}$$

Như thế, thành phần dao động ngang của điểm treo A (a_2) làm giảm và có thể làm con lắc ngược mất ổn định.

Xét trường hợp cộng hưởng đúng: $\nu_1 = \nu_2 = \nu$. Xấp xỉ thứ nhất hoàn chỉnh có dạng:

$$\begin{aligned}\varphi = \varphi_1 \text{ và } \Omega &= \Omega_1 - \varepsilon\Omega_1\big[e_1\sin\nu_1\tau\cos\varphi_1 + e_2\sin\nu_2(\tau+\sigma)\sin\varphi_1\big] \\ &+ \varepsilon\sin\varphi_1\cos\varphi_1\Big[\frac{1}{4}e_1^2\nu_1\sin 2\nu_1\tau - \frac{1}{4}e_2^2\nu_2(\tau+\sigma)\Big] \\ &- \frac{\varepsilon}{2}e_1e_2(\nu_1^2\cos^2\varphi_1 - \nu_2^2\sin^2\varphi_1)\frac{\sin[(\nu_1+\nu_2)\tau+\nu_2\sigma]}{\nu_1+\nu_2}\end{aligned} \tag{4.9}$$

Thay (4.9) vào hệ (4.4), kết quả trung bình hóa cho hệ phương trình trung bình ở xấp xỉ thứ hai:

$$\begin{aligned}\varphi_1' &= \varepsilon\Omega_1 \\ \Omega_1' &= -\varepsilon\Big\{k^2\sin\varphi_1 + \frac{1}{2}(e_1^2\nu_1^2 - e_2^2\nu_2^2)\sin\varphi_1\cos\varphi_1 \\ &\quad - \frac{1}{2}e_1e_2\cos\nu_2\sigma(\nu_1^2\cos^2\varphi_1 - \nu_2^2\sin^2\varphi_1)\Big\} - \varepsilon^2 2\alpha\Omega_1\end{aligned} \tag{4.10}$$

tương đương với phương trình vi phân hạng hai:

$$\varphi_1'' + 2\alpha\varepsilon^2\varphi_1' + \varepsilon^2\Big\{k^2\sin\varphi_1 + \frac{1}{2}(e_1^2 - e_2^2)\nu^2\sin\varphi_1\cos\varphi_1 - \frac{1}{2}e_1e_2\nu^2\cos\nu\sigma\cos 2\varphi_1\Big\} = 0 \tag{4.11}$$

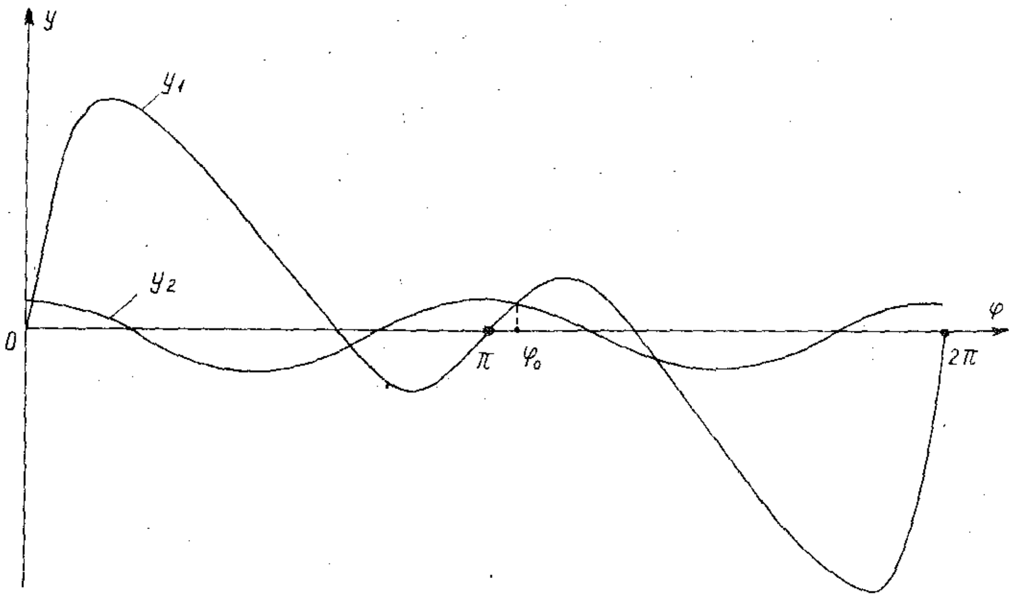
Nếu $\nu\sigma = \pm\frac{\pi}{2}$, $\cos\nu\sigma = 0$ chế độ $\varphi = \pi$ tồn tại. Khi đó điểm treo A vạch ra quỹ đạo enlíp tâm O, hai nửa trục chính bằng a_1, a_2 và tương ứng nằm theo hai trục Ox, Oy và theo (4.3) con lắc dao động nhỏ theo luật $\theta = \pi \pm \varepsilon e_2\cos\nu\tau$ quanh trục thẳng đứng đi qua điểm treo di động A. Điều kiện ổn định vẫn cho bởi bất đẳng thức (4.8) và trở thành:

$$k^2 < \frac{1}{2}(e_1^2 - e_2^2)\nu^2 \quad \text{hay} \quad \omega_0^2 < \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a_1}{\ell}\right)^2 - \left(\frac{a_2}{\ell}\right)^2\right]\omega^2 \qquad (4.12)$$

Nếu $\nu\sigma = \pm\frac{\pi}{2}$, $\cos\nu\sigma$ đủ nhỏ, sẽ tồn tại chế độ cân bằng ngược trong đó dao động nhỏ xảy ra quanh trục qua A nhưng hơi bị lệch so với phương thẳng đứng. Thực vậy, triệt tiêu số hạng thứ ba ở vế phải của phương trình (4.11) và viết phương trình thu được dưới dạng:

$$y_1 = k^2 \sin\varphi_1 + \frac{1}{4}(e_1^2 - e_2^2)\nu^2 \sin 2\varphi_1 = \frac{1}{2}e_1 e_2 \nu^2 \cos\nu\sigma \cos 2\varphi_1 = y_2 \qquad (4.13)$$

Trên *hình 2* là dạng các đồ thị các hàm y_1 khi $0 < k^2 < \nu^2(e_1^2 - e_2^2)/2\sqrt{2}$ và y_2 khi $\cos\nu\sigma > 0$ đủ nhỏ. Hai đồ thị cắt nhau tại hai điểm tương ứng giá trị φ_0 gần π và $\theta = \varphi_0 + \varepsilon e_2 \cos\nu\tau$. Chế độ này cùng tính ổn định với chế độ $\varphi = \pi$ khi $\cos\nu\sigma = 0$.



Hình 2

Trường hợp $\nu_2 = 2\nu_1$ xấp xỉ thứ nhất hoàn chỉnh vẫn có dạng (4.5) và phương trình trung bình ở xấp xỉ thứ hai là:

$$\begin{aligned}
\varphi_1' &= \varepsilon\Omega_1 \\
\Omega_1' &= -\varepsilon\Big[k^2 \sin\varphi_1 + \frac{1}{2}(e_1^2\nu_1^2 - e_2^2\nu_2^2)\sin\varphi_1\cos\varphi_1\Big] + \varepsilon^2\Big\{ -2\alpha\Omega_1 + \\
&+ \Big[\frac{e_1^2 e_2 \nu_1(\nu_1^2\cos^2\varphi_1 - \nu_2^2\sin^2\varphi_1)}{4(\nu_1 - \nu_2)} + \frac{e_1^2 e_2 \nu_1^2 \nu_2 \sin^2\varphi_1 \cos\varphi_1}{8\nu_1}\Big]\sin\nu_2\sigma \\
&+ \frac{1}{8}e_1^2 e_2(2\nu_1^2 + \nu_2^2)\sin^2\varphi_1\cos\varphi_1\sin\nu_2\sigma\Big\}
\end{aligned} \qquad (4.14)$$

tương đương với phương trình vi phân hạng hai:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1'' + 2\alpha\varepsilon^2\varphi_1' + \varepsilon^2\Big\{k^2 \sin\varphi_1 + \frac{1}{2}(e_1^2\nu_1^2 - e_2^2\nu_2^2)\sin\varphi_1\cos\varphi_1\Big\} \\
&+ \varepsilon^3\Big\{\frac{1}{8}e_1^2 e_2\nu_1 \sin\nu_2\sigma\Big[\frac{2(\nu_1^2\cos^2\varphi_1 - \nu_2^2\sin^2\varphi_1)\cos\varphi_1}{\nu_1 - \nu_2} \\
&+ \frac{\nu_1\nu_2\sin^2\varphi_1\cos\varphi_1}{\nu_1}\Big] + \frac{1}{8}e_1^2 e_2(2\nu_1^2 + \nu_2^2)\sin^2\varphi_1\cos\varphi_1\sin\nu_2\sigma\Big\} \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

Dễ dàng thấy khi $\sin\nu_2\sigma = 0$ chế độ cân bằng ngược $\varphi = \pi$ tồn tại và khi đó điểm treo A vạch ra quỹ đạo dạng số 8 còn điều kiện ổn định vẫn cho bởi bất đẳng thức (4.8). Cũng sẽ xảy ra tình hình như với trường hợp trước nếu $\sin\nu_2\sigma$ đủ nhỏ.

KẾT LUẬN

Những phân tích trên cho phép rút ra một số nhận xét về tính ổn định của con lắc ngược khi điểm treo của con lắc có dao động phức tạp. Nếu phương dao động thẳng đứng, các thành phần dao động cộng tác dụng và con lắc ngược ổn định hơn. Trường hợp điểm treo dao động trong mặt phẳng thẳng đứng, thành phần dao động ngang có ảnh hưởng xấu và làm giảm mức ổn định.

Xác nhận - Công trình này được hoàn thành với sự tài trợ của chương trình nghiên cứu cơ bản trong lĩnh vực khoa học tự nhiên

Địa chỉ:
Viện Cơ học Viện KHVN

Nhận ngày 20/5/1993

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М. 1963.
2. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, М. 1956.
3. Nguyen Van Dao. Non linear vibration of a pendulum with a support in harmonic motion. Fifth National Conference on Mechanics, Hanoi, 12/1992.

SUMMARY

STABILITY OF THE INVERSE PENDULUM WITH THE HANGING POINT IN MULTIFREQUENCY MOTION

In the present paper, the stability of the upper equilibrium position of the pendulum is examined. It is found that if the hanging point undergoes vertical complicated oscillating motion the different components of the motion law renforce their actions so that the mentioned equilibrium position becomes more stable. On the contrary, if the hanging point moves in the vertical plane the inverse pendulum is less stable under the influence of the horizontal component of the motion.