

# ỔN ĐỊNH CỦA VỎ TRỤ DỒNG THỜI BỊ NÉN DỌC ĐƯỜNG SINH VÀ ÁP LỰC NGOÀI THEO QUÝ ĐẠO PHÚC TẠP

ĐÀO VĂN DŨNG

Theo hướng nghiên cứu đã chỉ ra trong [1, 2, 3, 4], bài này xét sự ổn định của vỏ trụ đàm - dẻo đồng thời bị nén dọc đường sinh và áp lực ngoài theo quý đạo phúc tạp, xây dựng phương pháp xác định lực tới hạn và chỉ ra ảnh hưởng của quá trình đặt tải phúc tạp tới sự ổn định của vỏ qua một ví dụ bằng số.

## 1. BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH

Xét vỏ trụ bán kính  $R$ , độ dày  $h$ , chiều dài  $L$ , chịu quá trình đặt tải phúc tạp: nén dọc theo đường sinh bởi lực có cường độ  $p(t)$  và áp lực ngoài với cường độ  $q(t)$ . Vật liệu là không nén được và không xét đến sự xuất hiện miền cát tải trong vật thể. Chọn hệ trục tọa độ trụ sao cho trục  $x$  nằm dọc đường sinh, trục  $z$  hướng theo pháp tuyến của vỏ, trục  $y$  theo hướng tiếp tuyến vòng. Giả thiết vỏ trụ tựa bằn lề tại  $x = 0, x = L$ .

### a) Quá trình trước khi vòng

Các thành phần trước khi vòng có dạng

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -p(t); \quad \sigma_{yy} = -\tilde{q}(t) \frac{R}{h} \equiv -q(t); \quad \sigma_{xy} = 0 \\ \sigma_u &= (p^2 - pq + q^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Các thành phần tốc độ biến dạng tương ứng được xác định theo lý thuyết quá trình biến dạng đàm - dẻo như sau:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{xx} &= \frac{1}{N} \left( -\dot{p} + \frac{1}{2} \dot{q} \right) - \left( \frac{1}{\phi'} - \frac{1}{N} \right) (p\dot{p} + q\dot{q} - \frac{1}{2} p\dot{q} - \frac{1}{2} \dot{p}q) \cdot \frac{(p - \frac{1}{2}q)}{p^2 - pq + q^2} \\ \dot{\varepsilon}_{yy} &= \frac{1}{N} \left( \frac{1}{2} \dot{p} - \dot{q} \right) - \left( \frac{1}{\phi'} - \frac{1}{N} \right) (p\dot{p} + q\dot{q} - \frac{1}{2} \dot{q} - \frac{1}{2} \dot{p}q) \cdot \frac{(q - \frac{1}{2}p)}{p^2 - pq + q^2} \\ \dot{\varepsilon}_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

trong đó  $\phi' := \phi'(s)$ ;  $N(s, \sigma_u) = \sigma_u k(s)$

Phương trình xác định độ dài cung của quỹ đạo biến dạng như sau:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \dot{\varepsilon}_{xx}^2 + \dot{\varepsilon}_{xx}\dot{\varepsilon}_{yy} + \dot{\varepsilon}_{yy}^2 \right)^{1/2} \equiv F(s, t) \quad (1.3)$$

### b) Quá trình sau khi vòng

Giả thiết rằng các lực ngoài phụ thuộc bất kỳ vào tham số tải  $t$ . Tại thời điểm  $t^*$  vỏ bị vòng, tức là xuất hiện dạng cân bằng lân cận. Khi đó hệ phương trình ổn định đàn - dẻo của vỏ có dạng

$$\begin{aligned} \alpha_1 \frac{\partial^4 \delta w}{\partial x^4} + \alpha_3 \frac{\partial^4 \delta w}{\partial x^2 \partial y^2} + \alpha_5 \frac{\partial^4 \delta w}{\partial y^4} + \\ + \frac{9}{h^2 N(s, \sigma_u)} \left( p \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + q \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\beta_1 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \beta_3 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta_5 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + \frac{N(s, \sigma_u)}{R} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} = 0 \quad (1.5)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 - \frac{3}{4} \left( 1 - \frac{\phi'}{N} \right) \frac{p^2}{p^2 - pq + q^2}, \quad \beta_1 = 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{N}{\phi'} - 1 \right) \frac{(2q - p)^2}{p^2 - pq + q^2} \\ \alpha_3 &= 2 - \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{\phi'}{N} \right) \frac{pq}{p^2 - pq + q^2}, \quad \beta_3 = 2 + \frac{1}{2} \left( \frac{N}{\phi'} - 1 \right) \frac{(2p - q)(2q - p)}{p^2 - pq + q^2} \\ \alpha_5 &= 1 - \frac{3}{4} \left( 1 - \frac{\phi'}{N} \right) \frac{q^2}{p^2 - pq + q^2}, \quad \beta_5 = 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{N}{\phi'} - 1 \right) \frac{(2p - q)^2}{p^2 - pq + q^2} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Giải bài toán ổn định quy về nghiên cứu đồng thời hệ 3 phương trình (1.3), (1.4), (1.5) cùng với các điều kiện biên đã cho.

## 2. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Tìm nghiệm  $\delta w$  dưới dạng  $\delta w = A \sin \left( \frac{m\pi x}{L} + \frac{ny}{R} \right)$  trong đó  $m$  và  $n$  là các số tự nhiên theo hướng trục và hướng vòng của trụ. Để thấy rằng cách tìm nghiệm như vậy thỏa mãn điều kiện biến tựa bùn lề theo nghĩa trung bình tích phân. Thay  $\delta w$  vào (1.5) thu được phương trình xác định  $\varphi$ . Nghiệm riêng của phương trình này là

$$\varphi = B \sin \left( \frac{m\pi x}{L} + \frac{ny}{R} \right)$$

trong đó

$$B = A \frac{N(s, \sigma_u)}{R} \left[ \beta_1 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \beta_3 \left( \frac{n}{R} \right)^2 + \beta_5 \left( \frac{L}{m\pi} \right)^2 \left( \frac{n}{R} \right)^4 \right]^{-1}$$

Thay  $\delta w$  và  $\varphi$  vào (1.4) và từ điều kiện không tầm thường của nghiệm, tức là  $A \neq 0$  (kéo theo  $B \neq 0$ ), nhận được hệ thức xác định lực tới hạn của vỏ trụ.

$$\begin{aligned} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 p + \left( \frac{n}{R} \right)^2 q &= N(s, \sigma_u) \left\{ \frac{h^2}{9} \left[ \alpha_1 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 + \alpha_3 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left( \frac{n}{R} \right)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \alpha_5 \left( \frac{n}{R} \right)^4 \right] + \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left[ \beta_1 \left( \frac{m\pi R}{L} \right)^2 + \beta_3 n^2 + \beta_5 \left( \frac{Ln^2}{m\pi R} \right)^2 \right]^{-1} \right\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Đặt  $i = \frac{3R}{h}$ ;  $\theta = \left(\frac{m\pi R}{nL}\right)^2$ ;  $\psi = n^2$ , khi đó (2.1) đưa về dạng

$$i^2 = \frac{N\psi^2(\alpha_1\theta + \alpha_3 + \frac{\alpha_5}{\theta})(\beta_1\theta + \beta_3 + \frac{\beta_5}{\theta})}{(p + \frac{q}{\theta})(\beta_1\theta + \beta_3 + \frac{\beta_5}{\theta})\psi - N} \quad (2.2)$$

Sau khi cực tiểu hóa  $i^2$  theo  $\theta$  và  $\psi$  ta tìm được hệ thức xác định lực tối hạn như sau [2]:

$$i = \frac{2N(s, \sigma_u)}{p + \frac{q}{\theta}} \left( \frac{\alpha_1\theta + \alpha_3 + \frac{\alpha_5}{\theta}}{\beta_1\theta + \beta_3 + \frac{\beta_5}{\theta}} \right)^{1/2} \quad (2.3)$$

trong đó  $\theta$  và  $\psi$  được xác định bởi

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{2N(s, \sigma_u)}{\left(p + \frac{q}{\theta}\right)\left(\beta_1\theta + \beta_3 + \frac{\beta_5}{\theta}\right)} ; \\ &\left(\alpha_1 - \frac{\alpha_5}{\theta^2}\right)\left(\beta_1\theta + \beta_3 + \frac{\beta_5}{\theta}\right) - \left(\beta_1 - \frac{\beta_5}{\theta^2}\right)\left(\alpha_1\theta + \alpha_3 + \frac{\alpha_5}{\theta}\right) + \\ &+ \frac{2q}{\theta^2\left(p + \frac{q}{\theta}\right)}\left(\alpha_1\theta + \alpha_3 + \frac{\alpha_5}{\theta}\right)\left(\beta_1\theta + \beta_3 + \frac{\beta_5}{\theta}\right) = 0; \end{aligned}$$

Hệ thức (2.3) bao quát các trường hợp đã xét trong [3, 4, 6].

#### Các trường hợp riêng

a) Vô có độ dài trung bình

Theo [6], ta có  $m = 1$ ,  $\theta^2 \ll 1$  và

$$i^2 = \frac{N(s, \sigma_u)\alpha_5\beta_5n^8}{p\left(\frac{\pi R}{L}\right)^2\beta_5n^4 + q\beta_5n^6 - N(s, \sigma_u)\left(\frac{\pi R}{L}\right)^4}$$

Công thức gần đúng xác định lực tối hạn có dạng

$$\begin{aligned} i &= 2N(s, \sigma_u) \cdot \sqrt[4]{\left[1 - \frac{3}{4}\left(1 - \frac{\phi'}{N}\right)\frac{q^2}{p^2 - pq + q^2}\right]^3} \cdot \left(\frac{\pi R}{L}\right) \cdot \\ &\cdot \left\{ p\left(\frac{\pi R}{L}\right) \sqrt[4]{1 - \frac{3}{4}\left(1 - \frac{\phi'}{N}\right)\frac{q^2}{p^2 - pq + q^2}} \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{N}{\phi'} - 1\right)\frac{(2p - q)^2}{p^2 - pq - q^2}} + \right. \\ &\left. + \sqrt{\frac{3R}{h}} \cdot q \cdot \sqrt[4]{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{N}{\phi'} - 1\right)\frac{(2p - q)^2}{p^2 - pq + q^2}} \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (2.4)$$

**Nhận xét:** Nếu  $q = 0$  từ (2.4) suy ra công thức đã có trong [1], nếu  $p = 0$  công thức sai khác với công thức trong [4] một hằng số nhân bằng 0,85.

b) Vô dài. Khi đó  $\theta \ll 1$ , ta có [2]

$$i = \frac{2N(s, \sigma_u)}{p} \left\{ \frac{1 - \frac{3}{4}\left(1 - \frac{\phi'}{N}\right)\frac{q^2}{p^2 - pq + q^2}}{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{N}{\phi'} - 1\right)\frac{(2p - q)^2}{p^2 - pq + q^2} + 4\frac{qN(s, \sigma_u)}{p^2}} \right\}^{1/2} \quad (2.5)$$

### 3. PHƯƠNG PHÁP SỐ XÁC ĐỊNH LỰC TỚI HẠN

Việc xác định lực tới hạn trong trường hợp đặt tải phức tạp được thực hiện theo phương pháp tham số tải. Để minh họa, giả thiết cho quy luật đặt tải phức tạp dưới dạng

$$q = q_0 + q_1 t; \quad p = \frac{(q_0 + q_1 t)^2}{q_{00}} \quad (3.1)$$

Với  $q_0, q_1, q_{00}$  là các hằng số đã biết có thứ nguyên lực. Thay quy luật (3.1) vào các hệ thức (1.1), (1.2) tìm được  $\sigma_u(t), \dot{\varepsilon}_{ij}(t)$ ; phương trình (1.3) xác định  $s \equiv s(t)$ . Hệ thức xác định lực tới hạn cho vỏ dài dẵn về

$$\begin{aligned} i &= \frac{2q_{00}N(s(t), \sigma_u(t))}{(q_0 + q_1 t)^2} \left[ 1 - \frac{3}{4} \left( 1 - \frac{\phi'(s(t))}{N(s(t), \sigma_u(t))} \right) \right. \\ &\quad \cdot \left. \frac{(q_0 + q_1 t)^2}{\sigma_u^2(t)} \right]^{1/2} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{N(s(t), \sigma_u(t))}{\phi'(s(t))} - 1 \right) \cdot \left[ \frac{2(q_0 + q_1 t)^2}{q_{00}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (q_0 + q_1 t) \right]^2 \sigma_u^{-2}(t) + 4N(s(t), \sigma_u(t))q_{00}^2(q_0 + q_1 t)^{-3} \right\}^{-1/2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

trong đó

$$\sigma_u(t) = \left[ \frac{(q_0 + q_1 t)^4}{q_{00}^2} - \frac{(q_0 + q_1 t)^3}{q_{00}} + (q_0 + q_1 t)^2 \right]^{1/2}$$

Việc xác định độ dài cung của quỹ đạo biến dạng  $s \equiv s(t)$  từ phương trình (1.3) được thực hiện theo phương pháp Euler hoặc Runge-Kutta. Chẳng hạn theo phương pháp Euler.

$$s(t_{n+1}) = s(t_n) + \tau F(t_n, s(t_n)) \quad (3.3)$$

trong đó  $\tau = t_{n+1} - t_n$ .

Như vậy dựa vào các hệ thức (3.2), (3.3) ta có thể xác định được giá trị tham số tải tới hạn  $t_*$ . Các lực tới hạn  $p_*, q_*, \sigma_u^*$  được xác định như sau:

$$P_* = p(t_*), \quad q_* = q(t_*), \quad \sigma_u^* = (p_*^2 - p_* q_* + q_*^2)^{1/2}.$$

Để so sánh lực tới hạn giữa quá trình đặt tải phức tạp với đặt tải đơn giản, với đòn bẩy. Từ (2.5) ta có:

Vỏ đòn bẩy  $\phi' = N(s, \sigma_u) = 3G$  và

$$i = \frac{2.3G}{(p^2 + 4.3G \cdot q)^{1/2}} \quad (3.4)$$

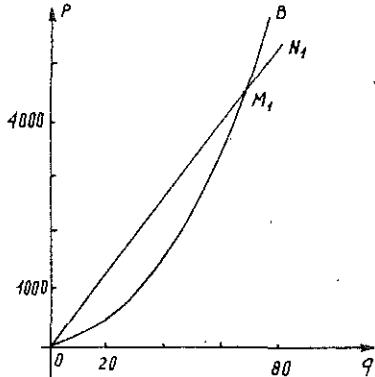
Vỏ đòn - dèo chịu quá trình đặt tải đơn giản  $\phi' \equiv \phi'(\varepsilon_u)$ ;  $N \equiv \frac{\sigma_u}{\varepsilon_u}$  và

$$i = \frac{2\frac{\sigma_u}{\varepsilon_u}}{\beta q} \left\{ \frac{1 - \frac{3}{4} \left( 1 - \frac{\phi'(\varepsilon_u) \cdot \varepsilon_u}{\sigma_u} \right) \gamma^{-2}}{1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\sigma_u}{\varepsilon_u \phi'(\varepsilon_u)} - 1 \right) \frac{(2\beta - 1)^2}{\gamma^2} + \frac{4\sigma_u}{\beta^2 q \varepsilon_u}} \right\}^{1/2} \quad (3.5)$$

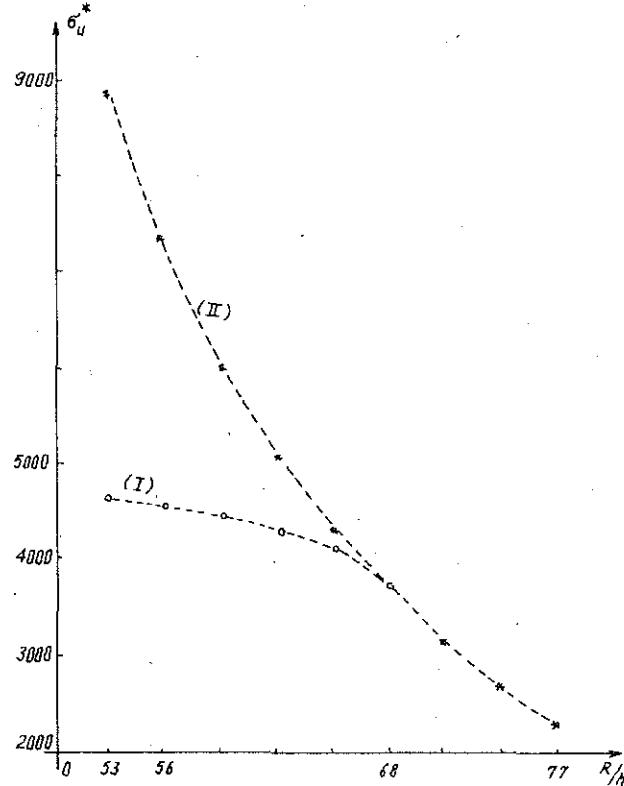
trong đó  $\beta = \frac{p}{q}$ ;  $\gamma^2 = \beta^2 - \beta + 1$

Dưới đây dẫn ra kết quả tính toán bằng số xác định lực tới hạn cho vỏ trụ bằng thép loại 30XГСА với giới hạn chảy  $\sigma_s = 4000 \text{ kg/cm}^2$ ,  $3G = 2,6 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ,  $q_0 = 20 \text{ kg/cm}^2$ ,  $q_1 = 1 \text{ kg/cm}^2$ ;  $q_{00} = 1 \text{ kg/cm}^2$ . Lấy bước  $\tau = 0,01$ , tỷ số  $R/h$  nhận các giá trị từ 22 đến 49 và 50 đến

77 với công sai bằng 3. Quá trình đặt tải như hình 1 theo quỹ đạo OB. Ghi nhận trạng thái mất ổn định là  $M_1$ . Quá trình đặt tải đơn giản để so sánh là  $OM_1N_1$ . Các kết quả tính toán được thực hiện trên máy vi tính theo ngôn ngữ Turbo Pascal, sai số nhỏ hơn năm phần nghìn, bảng 1 cho số liệu với vỏ trụ chịu quá trình dàn dẻo phức tạp (3.2), bảng 2 cho số liệu vỏ trụ dàn hồi tương ứng (công thức (3.4)). Hình 2 biểu thị đồ thị giữa  $\sigma_u^*$  và  $R/h$ . Đường I ứng với vỏ trụ dàn dẻo chịu quá trình tải phức tạp, đường II tương ứng với vỏ trụ dàn hồi. Các khoanh tròn o biểu thị giá trị tới hạn tương ứng vỏ trụ dàn dẻo chịu tải đơn giản (theo công thức (3.5)).



Hình 1



Hình 2

Căn cứ vào các kết quả tính toán ta rút ra các nhận xét sau:

#### NHẬN XÉT

a) Cũng như trường hợp bắn [5], ở đây cho thấy giá trị của lực tới hạn tính theo Euler (dàn hồi) luôn luôn lớn hơn lực tới hạn tính theo các lý thuyết dẻo (cả phức tạp, lắc đơn giản). Trên đồ thị  $\sigma_u^*$  và  $R/h$  cho thấy đường biểu diễn tương ứng với đặt tải phức tạp nằm dưới đường ứng với vỏ dàn hồi.

b) Lực tới hạn khi đặt tải phức tạp có xu hướng nhỏ hơn khi đặt tải đơn giản. Ở đây ít khác biệt vì độ phức tạp của quá trình xảy ra trong giới hạn dàn hồi. Điều này phù hợp với thực nghiệm và nhận xét trong [2].

c) Qua ví dụ này cho thấy khi vỏ có tỷ số  $\frac{R}{h} \geq 68$  (tức là vỏ mỏng hơn  $i = \frac{3R}{h} \geq 200$ ), tải tới hạn tính cho vỏ trụ dàn hồi và vỏ dàn dẻo trùng nhau. Vì vậy khi vỏ có độ mảnh lớn (tức là vỏ mỏng hơn) có thể sử dụng công thức Euler. Trường hợp này vỏ bị mất ổn định ngay trong giai đoạn dàn hồi.

d) Khi vỏ dày hơn ( $R/h < 68$ ) cần phải tính lực tới hạn theo lý thuyết quá trình dàn dẻo. Vì trong trường hợp đó lực tới hạn lớn hơn so với giới hạn chảy, điều đó có nghĩa là cấu trúc đã chuyển sang làm việc trong trạng thái dàn dẻo, khi đó việc tính theo mô hình dàn hồi sẽ nảy sinh những điều không hợp lý.

Bảng 1. Vỏ trụ dàn dẻo chịu quá trình đặt tải phức tạp

$R/h$	$t^*$	$s \cdot 10^3$	$p^*$	$q^*$	$\sigma_u^*$
22	55,9	9,0204	5760	75,9	5721
25	54,4	7,2046	5540	74,4	5501
28	53,3	6,0076	5380	73,3	5342
31	52,4	5,0474	5240	72,4	5204
34	51,7	4,0455	5140	71,7	5105
37	51,1	3,9367	5060	71,1	5020
40	50,4	3,4597	4950	70,4	4919
43	49,7	3,0176	4860	69,7	4820
46	49,2	2,7263	4780	69,2	4750
49	48,7	2,5007	4720	68,7	4685
50	48,5	2,4331	4700	68,5	4663
53	48,0	2,2403	4630	68,0	4591
56	47,3	2,0268	4530	67,3	4497
59	46,7	1,8829	4460	66,7	4422
62	45,9	1,7369	4350	65,9	4316
65	44,9	1,6235	4210	64,9	4176
68	40,8	1,4126	3700	60,8	3672
71	36,1	1,1990	3140	56,1	3117
74	31,8	1,0226	2680	51,8	2658
77	28,0	0,8763	2300	48,0	2278

Bảng 2. Vỏ trụ dàn hồi bị nén dọc đường sinh và áp lực ngoài

$R/h$	$t^*$	$s \cdot 10^3$	$p^*$	$q^*$	$\sigma_u^*$
22	225	23,109	60200	245	60084
25	203	19,506	49700	223	49547
28	183	15,825	41200	203	41144
31	165	13,191	34400	185	34296
34	149	11,009	28700	169	28622
37	135	9,1857	24000	155	23883
40	121	7,6543	20000	141	19901
43	109	6,3678	16600	129	16556
46	97,5	5,2894	13800	118	13753
49	87,1	4,3904	11500	107	11415
50	83,8	4,1258	10800	104	10727
53	74,6	3,4261	8950	94,6	8907
56	66,3	2,8500	7450	86,3	7410
59	58,9	2,3769	6220	78,9	6179
62	52,2	1,9901	5210	72,2	5174
65	46,2	1,6730	4380	66,2	4349
68	40,8	1,4126	3700	60,8	3672
71	36,1	1,1990	3140	56,1	3117
74	31,8	1,0226	2680	51,8	2658
77	28,0	0,8763	2300	48,0	2278

## KẾT LUẬN

Phương pháp giải bài toán trên đây cho ta khảo sát định tính và định lượng về sự ổn định của vỏ khi chịu quá trình đặt tải phức tạp. Các kết quả nhận được cho phép đưa ra một vài gợi ý khi ứng dụng vào thực tế. Với phương pháp tham số tải và sự trợ giúp của máy tính có thể giải quyết bài toán ổn định của hệ dàn dẻo dưới tác dụng của nhiều thành phần lực.

Tác giả chân thành cảm ơn Giáo sư tiến sĩ Đào Huy Bích đã hướng dẫn công trình này.

Công trình được hoàn thành với sự tài trợ của Chương trình nghiên cứu cơ bản trong lĩnh vực khoa học tự nhiên.

Địa chỉ:

Đại Tông hợp HN

Nhận ngày 25/9/1993

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Đào Huy Bích. Influence of complex loading on the stability outside elastic limit of thin plates. Journal of Mechanics. V. 11, No 3, 1989.
2. Dao Huy Bich. Theory of elasto - plastic processes. Hanoi State University, 1993.
3. Đào Huy Bích, Đào Văn Dũng. Về sự ổn định của vỏ mỏng trong lý thuyết quá trình biến dạng dàn dẻo. Tạp chí Cơ học tập 8, số 3, 1986.
4. Đào Văn Dũng. Ổn định của vỏ mỏng chịu tải phức tạp. Tạp chí Cơ học, tập 10 số 1, 1988.
5. Đào Văn Dũng. Ổn định của bản bị nén đồng thời hai phía theo quỹ đạo phức tạp. Tạp chí Cơ học, tập 15, số 2, 1993.
6. Volmir A. S. Stability of deformable systems. Edition of Science, Moscow, 1967 (in Russian).

## SUMMARY

### STABILITY OF CYLINDRICAL SHELLS SUBJECTED TO AXIAL COMPRESSION AND OUTSIDE LATERAL PRESSURE

The method for calculating critical forces of cylindrical shells subjected to axial compression and outside lateral pressure has been presented. A numerical comparison based on the theory of elasto plastic processes, the simple loading process theory and the theory of elasticity for this problem was given.