Tạp chí CƠ HỌC, tập XV, 1993, số 4 (1 - 6)

VỀ MỘT SỰ MỞ RỘNG PHƯƠNG PHÁP TUYẾN TÍNH NGẪU NHIÊN

DI PAOLA MARIO và NGUYỄN ĐÔNG ANH

MỞ ĐẦU

Trong các phương pháp nghiên cứu hệ cơ học phi tuyến phương pháp tuyến tính ngẫu nhiên (stochastic linearization) là một phương pháp có hiệu quả và dễ sử dụng do khai thác được các công cụ của lý thuyết hệ tuyến tính. Ý tưởng chính của phương pháp tuyến tính ngẫu nhiên là việc đưa hệ phi tuyến cần nghiên cứu về một hệ tuyến tính với các hệ số tương đương được chọn theo một tiêu chuẩn tối ưu nào đó [1, 2, 3]. Các tiêu chuẩn tối ưu thay thế phương trình phi tuyến bằng phương trình tuyến tính rất đa dạng. Để đánh giá một xấp xỉ thu được là tốt hay không người ta thường so sánh nó với nghiệm chính xác đã biết hoặc nghiệm thu được bằng mô phỏng. Vì hệ phi tuyến khác hệ tuyến tính rất nhiều, do đó như nhiều tác giả đã nhận xét phương pháp tuyến tính ngẫu nhiên cho các kết quả không thỏa mãn đối với các hệ phi tuyến mạnh. Trong những năm gần đây nhiều công trình đã cố gắng nâng cao độ chính xác của phương pháp tuyến tính ngẫu nhiên [4, 5, 6]. Trong bài báo này các tác giả đề nghị một thuật toán phát triển phương pháp tuyến tính ngẫu nhiên nhằm đảm bảo độ chính xác của nghiệm gần đúng cho hệ phi tuyến yếu cũng như phi tuyến mạnh.

1. HỆ TUYẾN TÍNH TƯƠNG ĐƯƠNG

Để dễ hiểu các ý tưởng của phương pháp ta xét hệ cơ học một bậc tự do với lực đàn hồi phi tuyến

$$x'' + 2hx' + \omega^2 x + \gamma x^{2n+1} = w(t) \tag{1.1}$$

trong đó n là số nguyên dương, $w(t)$ - quá trình ngẫu nhiên ồn trắng chuẩn có kỳ vọng bằng không và

$$\langle w(t) w(t+r) \rangle = \delta(r) \tag{1.2}$$

$\langle \ \rangle$ là phép tính lấy trung bình ngẫu nhiên, $\delta(r)$ - hàm suy rộng Đirac. Theo phương pháp tuyến tính ngẫu nhiên, ta thay phương trình (1.1) bằng phương trình tuyến tính

$$x'' + 2hx' + \omega^2 x + \gamma k x = w(t) \tag{1.3}$$

hệ số tương đương k được chọn sao cho hiệu hai phương trình (1.1) và (1.3) đạt cực tiểu theo nghĩa bình phương trung bình:

$$\langle (x^{2n+1} - kx)^2 \rangle \to \min_k \tag{1.4}$$

Từ đó suy ra

$$k = \frac{\langle x^{2n+2} \rangle}{\langle x^2 \rangle} \tag{1.5}$$

Kozin [7] đã chỉ ra rằng nếu các mômen $\langle x^{2n+2} \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ trong (5) được tính theo hệ gốc (1.1) thì phương trình (1.3) sẽ cho giá trị chính xác của $\langle x^2 \rangle$. Tuy nhiên, nghiệm của phương trình (1.1) là chưa biết, do đó người ta phải tìm cách tính gần đúng biểu thức (1.5). Theo cách kinh điển người ta giả thiết là các mômen trong (1.5) được tính theo hệ tuyến tính (1.3). Do $w(t)$ là quá trình chuẩn nên ta có

$$k = \frac{\langle x^{2n+2} \rangle}{\langle x^2 \rangle} = (2n+1)!!\langle x^2 \rangle^n; \quad (2n+1)!! = 1.3...(2n+1) \tag{1.6}$$

Việc thay hệ phi tuyến gốc (1.1) bằng hệ tuyến tính (1.3) trong đó hệ số tương đương k được tính theo (1.6) là nội dung của phương pháp tuyến tính ngẫu nhiên kinh điển [1, 2]. Như đã trình bày ở phần mở đầu, do hệ phi tuyến khác hệ tuyến tính nhiều nên việc tính gần đúng giá trị k (1.5) theo phương trình tuyến tính (1.3) dẫn đến sai số không chấp nhận được khi hệ gốc (1.1) là hệ phi tuyến mạnh ($\gamma \gg \omega^2$). Do đó việc tính toán k như thế nào là nội dung của nhiều bài báo đã công bố. Trong [6] đã xét 2 trường hợp tới hạn của hệ gốc (1.1) khi $\gamma = 0$ và $\gamma \to \infty$, qua đó đã đưa ra công thức tính gần đúng k như sau

$$k = \frac{(2n+1)!!\omega^2 + k_\infty \gamma}{\omega^2 + \gamma} \tag{1.7}$$

với

$$k_\infty = \frac{1}{2}\Big[(2n+1)!!\sqrt{\pi^n}\frac{\Gamma\big((4n+3)/(4n+2)\big)}{\Gamma^{n+1}\big((2n+3)/(4n+2)\big)}\Big] \tag{1.8}$$

trong đó $\Gamma(\quad)$ là hàm số Gamma [8].

Một hướng khác [5] đề nghị hệ số tuyến tính k trong (1.3) được tính trên cơ sở hiệu các hàm thế năng của 2 hệ (1.1) và (1.2) đạt cực tiểu nghĩa bình phương trung bình

$$\Big\langle \Big(\gamma\frac{x^{2n+2}}{2n+2} - \gamma k\frac{x^2}{2}\Big)^2 \Big\rangle \to \min_k \tag{1.9}$$

với $\gamma x^{2n+2}/(2n+2)$, $\gamma k x^2/2$ là các hàm thế năng tương ứng của hệ (1.1) và (1.3). Từ (1.9) ta có

$$k = \frac{\langle x^{2n+4} \rangle}{(n+1)\langle x^4 \rangle} \tag{1.10}$$

Tiếp theo $\langle x^{2n+4} \rangle$, $\langle x^4 \rangle$ lại được tính theo hệ tuyến tính, tức là theo (1.6). Dưới đây là một cách tìm hệ số k do các tác giả bài báo đề nghị. Trước hết ta nhận xét rằng việc thay thế phương trình (1.1) bằng phương trình (1.3) tức là thay x^{2n+1} bằng kx. Độ lệch của 2 số mũ tương ứng là $(2n+1) - 1 = 2n$. Độ lệch này đã tạo ra sự sai số của nghiệm. Để giảm độ lệch này, theo quan niệm của các tác giả có thể thực hiện bằng cách nâng số mũ của x^{2n+1} lên một mức đúng bằng độ lệch $2n$. Như vậy ta có quá trình thay thế sau:

$$x^{2n+1} \to k_1 x^{4n+1} \to k_1 k_2 x^{2n+1} \to kx \tag{1.11}$$

Để tính k_1, k_2, k ta chọn tối ưu theo nghĩa bình phương trung bình thông thường:

$$\begin{gathered} \langle (x^{2n+1} - k_1 x^{4n+1})^2 \rangle \to \min_{k_1} \\ \langle (k_1 x^{4n+1} - k_1 k_2 x^{2n+1})^2 \rangle \to \min_{k_2} \\ \langle (k_1 k_2 x^{2n+1} - kx)^2 \rangle \to \min_{k} \end{gathered} \tag{1.12}$$

Từ (1.12) ta có:

$$k_1 = \frac{\langle x^{6n+2}\rangle}{\langle x^{8n+2}\rangle}, \qquad k_2 = \frac{\langle x^{6n+2}\rangle}{\langle x^{4n+2}\rangle} \tag{1.13}$$

và sau hết

$$k = \frac{\langle x^{6n+2}\rangle^2 \langle x^{2n+2}\rangle}{\langle x^{2n+2}\rangle \langle x^{4n+2}\rangle \langle x^2\rangle} \tag{1.14}$$

Tiếp theo các mômen trong (1.14) được tính theo (1.6) dẫn đến

$$k = \frac{\left[(6n+1)!!\right]^2 (2n+1)!!}{(8n+1)!!(4n+1)!!} \langle x^2\rangle^n \tag{1.15}$$

Như vậy phương trình phi tuyến (1.1) được thay thế bằng phương trình tuyến tính (1.3) trong đó hệ số k tính theo (1.15).

Để đánh giá mức chính xác của thuật toán đề nghị, ta ứng dụng cho hệ Duffing

$$x'' + 2hx' + \omega^2 x + \gamma x^3 = 2\sqrt{h} w(t) \tag{1.16}$$

trong đó $w(t)$ là quá trình ồn trắng chuẩn (1.2). Phương pháp tuyến tính ngẫu nhiên kinh điển (1.3), (1.6) đưa đến phương trình tuyến tính sau:

$$x'' + 2hx' + \omega^2 x + 3\gamma\langle x^2\rangle x = 2\sqrt{h} w(t) \tag{1.17}$$

Thuật toán Anh-Schiehlen (1.3), (1.7) đưa đến

$$x'' + 2hx' + \omega^2 x + \gamma \frac{3\omega^2 + 2,1478}{\omega^2 + \gamma} \langle x^2\rangle x = 2\sqrt{h} w(t) \tag{1.18}$$

Thuật toán Elishakoff-Zhang (1.3), (1.10) đưa đến

$$x'' + 2hx' + \omega^2 x + \frac{5}{2}\gamma\langle x^2\rangle x = 2\sqrt{h} w(t) \tag{1.19}$$

Thuật toán của các tác giả (1.3), (1.15) đưa đến

$$x'' + 2hx' + \omega^2 x + \frac{7}{3}\gamma\langle x^2\rangle x = 2\sqrt{h} w(t) \tag{1.20}$$

Các phương trình tuyến tính (1.17), (1.20) cho các nghiệm gần đúng tương ứng sau:

$$\langle x^2\rangle = \frac{-\omega^2 + \sqrt{\omega^4 + 12\gamma}}{6\gamma} \tag{1.21}$$

$$\langle x^2\rangle = \frac{\sqrt{\omega^4 + 4\lambda} - \omega^2}{2\lambda}, \quad \lambda = \frac{3\omega^2\gamma + 2,147\gamma^2}{\omega^2 + \gamma} \tag{1.22}$$

$$\langle x^2\rangle = \frac{-\omega^2 + \sqrt{\omega^4 + 10\gamma}}{5\gamma} \tag{1.23}$$

$$\langle x^2\rangle = \frac{-3\omega^2 + \sqrt{9\omega^2 + 84\gamma}}{14\gamma} \tag{1.24}$$

Sự so sánh các nghiệm gần đúng (1.21) - (1.24) nhận được bằng các thuật toán khác nhau với nghiệm chính xác $\langle x^2\rangle_{c.x}$ của hệ Duffing (1.16) cho trường hợp $\omega = 1$ được thể hiện trong bảng 1.

Bảng 1. So sánh các nghiệm gần đúng

N	γ	$\langle x^2\rangle_{c.x}$	$\langle x^2\rangle$ Classical	$\langle x^2\rangle$ (1.23) Elishakoff-Zhang	$\langle x^2\rangle$ (1.22) Anh-Schiehlen	$\langle x^2\rangle$ (1.24) Paola-Anh
1	0,01	0,9721	0,9717	0,9762	0,9718	0,9777
2	0,1	0,8176	0,8054	0,8284	0,8088	0,8367
3	1,0	0,4679	0,4343	0,4633	0,4586	0,4745
4	10,0	0,1889	0,1667	0,1810	0,1907	0,1867
5	100,0	0,0650	0,0561	0,0613	0,0658	0,0634

Qua bảng 1 ta nhận thấy các nghiệm gần đúng $\langle x^2\rangle$ (1.22), (1.23), (1.24), thu được bằng các thuật toán cải tiến gần nghiệm chính xác $\langle x^2\rangle_{c.x}$ trong cả hai trường hợp hệ phi tuyến yếu (γ - nhỏ) và hệ phi tuyến mạnh (γ - lớn), trong khi nghiệm $\langle x^2\rangle$ (1.21) thu được bằng phương pháp tuyến tính tương đương kinh điển chỉ chấp nhận được khi γ tương đối nhỏ . Qua bảng 1 cũng cho thấy kết quả xấp xỉ của các tác giả đề nghị dao động xung quanh, lớn hơn hoặc nhỏ hơn nghiệm chính xác.

2. HỆ CÓ LỰC CẢN PHI TUYẾN

Ta xét hệ cơ học một bậc tự do có lực cản phi tuyến dạng sau:

$$x'' + 2hx' + \beta x'^3 + x = 2\sqrt{h}W(t) \tag{2.1}$$

trong đó $W(t)$ là quá trình ồn trắng chuẩn (1.2). Khác với hệ Duffing (1.16), hệ có cản phi tuyến (2.1) chưa có lời giải chính xác. Theo tư tưởng của phương pháp tuyến tính ngẫu nhiên ta thay phương trình (2.1) bằng phương trình tuyến tính:

$$x'' + 2hx' + dx' + x = 2\sqrt{h}W(t) \tag{2.2}$$

trong đó hệ số tương đương d sẽ được tìm theo các thuật toán khác nhau.

- Theo thuật toán kinh điển, d tìm từ điều kiện:

$$\langle(\beta x'^3 - dx')^2\rangle \rightarrow \min_d \tag{2.3}$$

từ đó

$$d = \beta\frac{\langle x'^4\rangle}{\langle x'^2\rangle} = 3\beta\langle x'^2\rangle \tag{2.4}$$

- Theo thuật toán của Elishakoff - Zhang, d tìm từ điều kiện:

$$\left\langle \left(\frac{\beta}{4}x'^4 - \frac{d}{2}x'^2\right)^2 \right\rangle \rightarrow \min_d \tag{2.5}$$

suy ra

$$d = \frac{\beta}{2}\frac{\langle x'^6\rangle}{\langle x'^4\rangle} = \frac{5}{2}\beta\langle x'^2\rangle \tag{2.6}$$

- Theo thuật toán của các tác giả, d được tìm từ các điều kiện:

$$\left\langle \left(\beta x'^3 - d_1 x'^5\right)^2 \right\rangle \to \min_{d_1} \tag{2.7}$$

$$\left\langle \left(d_1 x'^5 - d_2 x'^3\right)^2 \right\rangle \to \min_{d_2} \tag{2.8}$$

$$\left\langle \left(d_2 x'^3 - d x'\right)^2 \right\rangle \to \min_{d} \tag{2.9}$$

từ đó

$$d = \beta \frac{\langle x'^8\rangle^2 \langle x'^4\rangle}{\langle x'^{10}\rangle\langle x'^6\rangle\langle x'^2\rangle} = \frac{7}{3}\beta\langle x'^2\rangle \tag{2.10}$$

Thay (2.4), (2.6), (2.10) vào (2.2) ta lần lượt thu được các nghiệm gần đúng sau:
- Nghiệm gần đúng theo thuật toán kinh điển

$$\langle x'^2\rangle = \frac{-1 + \sqrt{1 + 12\beta}}{6\beta} \tag{2.11}$$

- Nghiệm gần đúng theo thuật toán Elishakoff - Zhang:

$$\langle x'^2\rangle = \frac{-1 + \sqrt{1 + 10\beta}}{5\beta} \tag{2.12}$$

- Nghiệm gần đúng theo thuật toán của các tác giả:

$$\langle x'^2\rangle = \frac{-3 + \sqrt{9 + 84\beta}}{14\beta} \tag{2.13}$$

Bảng 2. So sánh các nghiệm gần đúng của phương trình (2.1)

N	β	$\langle x'^2\rangle$ [2]	$\langle x'^2\rangle$ (2.11)	$\langle x'^2\rangle$ (2.12)	$\langle x'^2\rangle$ (2.13)
1	1	0,4556	0,4343	0,4633	0,4745
2	2	0,3537	0,3333	0,3583	0,3680
3	3	0,3017	0,2824	0,3045	0,3132
4	8	0,2000	0,1844	0,2000	0,2062
5	9	0,1899	0,1748	0,1898	0,1957
6	10	0,1813	0,1667	0,1610	0,1867

Các nghiệm gần đúng (2.11) - (2.13) với các giá trị khác nhau của β được thể hiện trên bảng 2, trong đó đưa thêm vào nghiệm gần đúng $\langle x'^2\rangle$ [2] thu được bằng phương pháp khép kín không chuẩn cấp 4 (xem [2]). Ta nhận thấy rằng các nghiệm gần đúng $\langle x'^2\rangle$ [2], $\langle x'^2\rangle$ (2.12), $\langle x'^2\rangle$ (2.13) lập thành một nhóm khá gần nhau trong khi nghiệm thu được theo phương pháp tuyến tính ngẫu nhiên kinh điển $\langle x'^2\rangle$ (2.11) đứng tách riêng biệt.

KẾT LUẬN

Việc đề ra các thuật toán cải tiến nhằm nâng cao độ chính xác của phương pháp tuyến tính ngẫu nhiên cho cả trường hợp hệ phi tuyến mạnh hiện đang là một hướng được nhiều nhà nghiên cứu quan tâm giải quyết. Thuật toán do các tác giả đề nghị cũng dễ áp dụng như thuật toán kinh điển. Qua so sánh với các thuật toán cải tiến khác, thuật toán của các tác giả cho những kết quả khá tốt trong 2 hệ với lực đàn hồi và cản phi tuyến riêng biệt.

Lời cảm ơn. Công trình được sự tài trợ của chương trình nghiên cứu cơ bản trong khoa học tự nhiên.

Địa chỉ:
Tổng hợp Palermo. Italia
Viện Cơ học, Hanoi Vietnam

Nhận ngày 25/8/1993

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Booton R. C. The Analysis of Nonlinear Control Systems with Random Inputs. Proc. Symp. on Nonlinear Circuit Analysis, V. 1, 1953.
2. Roberts J. B., Spanos P. D. Random Vibration and Statistical Linearization, John Wiley and Sons, Chichester, 1990.
3. Socha L. and Soong T. T. Linearization in Analysis of Nonlinear Stochastic Systems. J. Appl. Mech. Reviews, V. 44, No 1, 1991, 399-422.
4. Iyengar R. N. Higher Order Linearization in Nonlinear Random Vibration. Int. J. Non-Linear. Mech., Vol. 23, No 5/6, 1988, 385-391.
5. Zhang X. T., Elishakoff I. and Zhang R. Ch. A Stochastic Linearization Technique Based on Minimum Mean Square Deviation of Potential Energies, in Stochastic Structural Dynamics New Theoretical Developments (Eds. Lin Y. K., Elishakoff I.) Springer, Berlin, 1991, 327-338.
6. Nguyen Dong Anh, Schiehlen W. An Approach to the Problem of Closure. J. Mecanica, 1993 (to appear).
7. Kozin F. The method of statistical lineariation for nonlinear stochastic vibrations Proc. IUTAM Symposium on nonlinear stochastic dynamic engineering systems. Eds. F. Ziegler, G.I. Schueller. Springer Velag, 1988, 45-56.
8. Abramovitz M. A., Stegun I. A. (Eds) Handbook of mathematical functions. Academic Press, New York, 1981.

SUMMARY

ON AN EXTENSION OF THE STOCHASTIC LINEARIZATION

Stochastic linearization method is one of the most useful tools for analysis of nonlinear systems under random excitation. The fundamental idea of the classical stochastic linearization consists in replacing the original nonlinear equation by a linear one in such a way that the difference between two equations is minimized in the mean square value.

In this paper a new version of the stochastic linearization is proposed. It is shown that for two nonlinear systems considered the new version gives good results for both the weak and strong nonlinearities.