Tạp chí CƠ HỌC, tập XV, 1993, số 3 (37 - 40)

PHƯƠNG PHÁP TUYẾN TÍNH HÓA TRONG BÀI TOÁN ĐỘ TIN CẬY

NGUYỄN VĂN PHÓ, LÊ NGỌC THẠCH

1. MỞ ĐẦU

Phương pháp tuyến tính hóa đã được sử dụng rộng rãi trong cơ học để giải gần đúng các bài toán phi tuyến. Trong các bài toán độ tin cậy của kết cấu công trình [1, 2], phương pháp tuyến tính hóa cũng đã được áp dụng, song còn nhiều vấn đề chưa được giải quyết.

Trong bài này, tác giả tuyến tính hóa các hàm phi tuyến chứa trong điều kiện của xác suất tin cậy [3], từ đó tính độ tin cậy do biến thiên ngẫu nhiên của các tham số quanh giá trị trung bình.

Quan niệm như vậy hoàn toàn phù hợp với tập quán thiết kế theo quan niệm tất định. Coi các sai lệch của các tham số quanh giá trị trung bình là đủ nhỏ, nên tuyến tính hóa là hợp lý.

Mặt khác, người ta chứng minh được rằng [4] tổ hợp tuyến tính của một số đại lượng ngẫu nhiên chuẩn cũng là một đại lượng ngẫu nhiên chuẩn. Do đó, việc tính toán độ tin cậy rất thuận lợi.

Phương pháp do các tác giả đề nghị có thể áp dụng cho bài toán tất định phi tuyến, song các sai lệch ngẫu nhiên là đủ nhỏ để có thể tuyến tính hóa quanh lân cận điểm.

Cuối cùng, để minh họa cho phương pháp nêu ra, bài báo nêu một thí dụ đơn giản.

2. TUYẾN TÍNH HÓA TRONG BÀI TOÁN ĐỘ TIN CẬY

Gọi P là độ tin cậy của hệ, như ta đã biết [3]

$$P = P\begin{bmatrix} L\vec{u} = \vec{q} \\ M\vec{u} = \vec{v} \\ f(\vec{v}) \in \Omega_0 \\ \forall \vec{r} \in V \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Trong đó $L\vec{u} = \vec{q}$ là phương trình trạng thái, $\vec{u}$ là biến trạng thái, $\vec{q}$ là tải trọng ngoài, $\vec{v}$ là biến chất lượng, $f(\vec{v})$ là hàm chất lượng, Ω_0 là miền kiểm tra chất lượng, $\vec{r} = \{r_i\}$ là biến không gian, V là miền hệ chiếm trong không gian. Nói chung, các hệ thức $L\vec{u} = \vec{q}$ và $f(\vec{v}) \in \Omega_0$ là phi tuyến. Trong bài toán cơ học tuyến tính (không phải là bài toán độ tin cậy) thì $L\vec{u} = \vec{q}$ là phương trình tuyến tính đối với $\vec{u}$, song đối với các tham số thiết kế (kích thước hình học, đặc trưng vật liệu ...) thì có thể phi tuyến.

Điều kiện $f(\vec{v}) \in \Omega_0$ được biểu diễn dưới dạng một hệ bất đẳng thức $\vec{v} = \vec{v}(\vec{h}, \vec{q})$ trong đó $\vec{h} = \{hi\}$ là véc tơ tham số thiết kế

Khi đó, $f(\vec{v}) = f\{\vec{v}(\vec{h}, \vec{q})\} \in \Omega_0$ hay

$$F(\vec{h},\vec{q}) \in \Omega_0 \tag{2.2}$$

chẳng hạn, chọn $\vec{v}$ là ứng suất σ_{ij} điều kiện kiểm tra chất lượng là điều kiện dẻo Mises

$$\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 \le \sigma_0^2$$

có thể chọn điều kiện tuyến tính hóa bởi điều kiện Tresca

$$\begin{aligned} -\sigma_0 &\le \sigma_x \le \sigma_0 \\ -\sigma_0 &\le \sigma_y \le \sigma_0 \\ -\sigma_0 &\le \sigma_x - \sigma_y \le \sigma_0 \end{aligned}$$

Không mất tính chất tổng quát, ta đặt $F(\vec{h},\vec{q}) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và điều kiện (2.2) được viết lại như sau:

$$F(\vec{x}) \le 0$$

Bây giờ ta tuyến tính hóa hàm $F(\vec{x})$ quanh điểm $\vec{x}^*$ theo công thức

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \approx F(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^*)\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1^*, \ldots, x_n^*) \tag{2.3}$$

hay

$$F(x_1, \ldots, x_n) \approx K_0 + \sum_{i=1}^{n} K_i x_i$$

Rõ ràng, F được xấp xỉ bởi một hàm tuyến tính đối với các x_i.

Trường hợp hàm $F(\vec{x})$ không phải là hàm giải tích (hàm biểu diễn bằng biểu thức toán học) thì ta thay gần đúng

$$\frac{\partial F}{\partial x} \approx \frac{\Delta F}{\Delta x}$$

Giả sử các đại lượng ngẫu nhiên x_i là độc lập, ta có kỳ vọng m và phương sai σ của hàm đã được tuyến tính hóa

$$m = K_0 + \sum_{i=1}^{n} K_i m_i \tag{2.4}$$

$$\sigma = \Big[\sum_{i=1}^{n} k_i^2 \sigma_i^2\Big] \tag{2.5}$$

Các đặc trưng bằng số m_i, σ_i được xác định theo số liệu thực nghiệm. Từ đó ta có thể tính được xác suất

$$P = P(F \le 0)$$

Trường hợp phương trình $L\vec{u} = \vec{q}$ chỉ có thể giải bằng các phương pháp số, chẳng hạn phương pháp phần tử hữu hạn các tham số thiết kế chứa trong ma trận độ cứng.

Nhờ công cụ máy tính ta xác định được $\frac{\Delta F}{\Delta x}$, do đó vẫn áp dụng được công thức tuyến tính hóa.

Trên đây ta xét cho trường hợp điều kiện chất lượng chỉ là một bất đẳng thức $F(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$.

Điều kiện an toàn trong tính toán kết cấu công trình là một hệ bất đẳng thức, đó là bài toán phức tạp, cho đến nay vẫn chưa được giải quyết thỏa đáng.

Sau đây tác giả dựa theo ý nghĩa cơ học và kỹ thuật của bài toán để đưa ra một cách giải quyết vấn đề trên như sau:

Đối với công trình, nói chung có nhiều tiết diện nguy hiểm và tại mỗi tiết diên nguy hiểm phải thỏa mãn một số bất đẳng thức.

Ta tìm max $F(\vec{x}^*)$, $\vec{x} = \{x_i^*\}$ là giá trị trung bình của các ẩn, tiếp đó tuyến tính hóa hàm $F(x)$ quanh giá trị max $F(x^*)$ và tính xác suất khi các x_i biến thiên ngẫu nhiên quanh x_i^* đối với hàm tuyến tính hóa đó.

Chẳng hạn, tìm ứng suất cực đại $\sigma_{\max}$ theo quan niệm tất định, tuyến tính hóa quanh giá trị tất định (trung bình) và tính xác suất

$$P\left\{\sigma_{\max} \leq \frac{[\sigma]}{n}\right\}, \quad n \text{ là hệ số an toàn.}$$

Nói chung, xác suất này là bé nhất so với các xác suất tại các tiết diện khác, do đó có thể coi gần đúng, đó là xác suất an toàn của hệ.

Trường hợp q là tải trọng ngẫu nhiên được biểu diễn là $q = q^* + \Delta q$ trong đó q^* là giá trị trung bình của q và Δq là gia số ngẫu nhiên, nếu gia số Δq không đủ nhỏ thì không thể tuyến tính hóa theo q quanh q^*.

Trong các bài toán tĩnh và tựa tĩnh, để khắc phục khó khăn khi Δq lớn thì ta thay q^* bởi q^{**} mà $q^* < q^{**}$ sao cho $\Delta q > 0$ đủ nhỏ.

3. THÍ DỤ

Xét dầm gỗ hai đầu tựa tự do, nhịp $\ell = 4m$, chịu tác dụng lực $P = 10.000KN$, tiết diện ngang $b \times h = 15 \times 20cm$.

1. Giải bài toán tất định

Momen uốn cực đại tại điểm đặt lực

$$M_{\max} = \frac{P\ell}{4} + \frac{q\ell^2}{8}$$

$q = \gamma hb$ là trọng lượng $1m$ dầm, γ là trọng lượng riêng của gỗ cho $\gamma = 6 \times 10^3 KN/cm^3$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{3}{4}\left[\frac{2P\ell}{bh^2} + \frac{\gamma\ell^2}{h}\right]$$

$$\text{hay } \sigma_{\max} = \Phi(P, \ell, b, h, \gamma)$$

$$\sigma_{\max} \approx 1036\ KN/cm^2$$

2. Tìm xác suất tin cậy

Trong thực tế các đại lượng P, ℓ, b, h, γ có những sai số, giả sử rằng các sai số đó có phân phối chuẩn và có độ lệch quân phương tương ứng $S_p = 300KN$, $S_1 = 3,0cm$, $S_h = 1,0cm$, $S_b = 0,5cm$, $S_\gamma = 50KN/m^3$. Ta có

$$\frac{\partial\Phi}{\partial P} = \frac{3}{4}\left[\frac{2\ell}{bh^2}\right] = 0,1\frac{1}{cm^2}$$

Độ lệch quân phương của $\sigma_{\max}$ do P gây ra là $S'p$

$$S'p = \left[\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right] S_p = 30KN/cm^2$$

Tương tự
$S'\ell = 7,5KN/cm^2$
$S'h = 105KN/cm^3$
$S'b = 33,3KN/cm^2$
$S'\gamma = 3KN/cm^3$
Độ lệch quân phương của $\sigma_{\max}$ do tất cả các tham số gây ra

$$S_{\sigma_{\max}} = \sqrt{(S'p)^2 + (S'\ell)^2 + (S'h)^2 + (S'b)^2 + (S'\gamma)^2} \approx 112KN/cm^2$$

Chọn hệ số an toàn $n = 1,5$, tính xác suất không tin cậy

$$P\left\{\sigma_{\max} \geq \frac{\sigma_p}{n}\right\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi[1,62] = 0.0050$$

Vậy xác suất an toàn là $1 - 0,005 = 0,995$.

Công trình này hoàn thành với sự hỗ trợ của chương trình nghiên cứu cơ bản trong lĩnh vực khoa học tự nhiên (KT-04).

Địa chỉ:
Trường Đại học Xây dựng

Nhận ngày 28/1/1993

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Bolotin V. V. Methods of probability theory and reliability theory in the calculation of structures. Moscow 1992 (in Russian).
2. Augusti G., Baratta A. and Casciati F. Probability methods in structural engineering. London New York. Chapman & Hall 1984.
3. Nguyễn Văn Phó. Về một lớp bài toán cực trị tất định tương đương với bài toán cực trị ngẫu nhiên trong lý thuyết độ tin cậy. Tạp chí cơ học. Viện KHVN. Số 4, 1991.
4. Wentzel E. Probability theory. Moscow 1964 (in Russian).
5. Nguyễn văn Phó. Về một số vấn đề cơ học trong điều kiện thông tin không đầy đủ. Tuyển tập Hội nghị cơ học toàn quốc lần III. Huế 8-1992.

SUMMARY

LINEARIZATION METHOD IN RELIABILITY PROBLEM

A method for calculation of reliability of mechanical system by linearization of conditional functions of joint probability around its expectation is considered. A numerical example is given.