Tạp chí CƠ HỌC, tập XV, 1993, số 3 (5 – 7)

VA CHẠM DỌC CỦA HAI THANH ĐẦU HÌNH CẦU
$(T_2 \le t \le kT_2)$

NGUYỄN THÚC AN, NGUYỄN ĐĂNG TỘ
NGUYỄN HÙNG SƠN

Trong [1] đã nghiên cứu bài toán va chạm dọc của hai thanh đàn hồi đầu hình cầu ở trong khoảng thời gian $0 < t < T_2$.

Dưới đây ta sẽ nghiên cứu tiếp bài toán này.

Giả sử thời gian va chạm chưa kết thúc, ta tiếp tục giải bài toán trong khoảng thời gian tiếp theo $T_2 < t < 2T_2$. Cũng như ở [1] ta xét từng chu kỳ T_1. Ta có $T_2 = iT_1 + qT_1$ với $i \ge 1$ và $0 \le q < 1$. Ta ký hiệu $(\ )_{2n}$ là hàm sóng xác định trong khoảng chu kỳ thứ n của thanh 1 và thuộc chu kỳ 2 của thanh 2 với $n = 1, 2, \ldots, i$ tức là:

$T_2 + (n-1)T_1 < t < T_2 + nT_1$ và $(\ )_1$ là hàm sóng xác định trong khoảng lẻ cuối cùng của chu kỳ 1 của thanh 2 tức là trong khoảng $iT_1 < t < iT_1 + qT_1 = T_2$.

Theo [1] ta có

$$\psi_1' = \varphi_1' + \frac{1}{\alpha}(-\varphi_2' + \psi_2') \tag{1}$$

$$A(-\varphi_2' + \psi_2')^{-1/3} \cdot (-\varphi_2'' + \psi_2'') = 2\varphi_1' + B\varphi_2' + C\psi_2' \tag{2}$$

Xét ở chu kỳ 1 thanh 1 $\quad T_2 < t < T_2 + T_1$.

Từ (2) ta có

$$(\psi_2'')_{21} = (\varphi_2'')_{21} + \frac{1}{A}\left[2(\varphi_1')_{21} + B(\varphi_2')_{21} + C(\psi_2')_{21}\right] \times \left[(-\varphi_2')_{21} + (\psi_2')_{21}\right]^{1/3} \tag{3}$$

Từ điều kiện biên ta có

$$\varphi_1'(a_1 t - \ell_1) = \psi_1'(a_1 t - \ell_1) = \psi_1'\left[a_1(t - T_1) + \ell_1\right].$$

Như vậy với $t < T_2 + T_1$ thì $t - T_1 < T_2$, do đó trong khoảng thời gian này hàm ψ_1' đã được xác định ở chu kỳ 1 của thanh 2, suy ra $(\varphi_1')_{21}$ cũng là hàm đã biết.

Mặt khác cũng từ điều kiện biên ta có:

$\varphi_2'(a_2 t - \ell_2) = \psi_2'(a_2 t - \ell_2) = \psi_2'\left[a_2(t - T_2) + \ell_2\right]$, do vậy

$(\varphi_2')_{21} = (\psi_2')_{11} = y_{11}$ là hàm đã biết.

Như vậy từ (3) ta xác định được ẩn hàm $(\psi_2')_{21} = y_{21}$.

Thay kết quả này vào (1) ta tìm được $(\psi_1')_{21}$.

Xét ở chu kỳ 2 của thanh 1, $T_2 + T_1 < t < T_2 + 2T_1$.

Từ (2) ta có

$$(\psi_2'')_{22} = (\varphi_2'')_{22} + \frac{1}{A}\left[2(\varphi_1')_{22} + B(\varphi_2')_{22} + C(\psi_2')_{22}\right] \times \left[(-\varphi_2')_{22} + (\psi_2')_{22}\right]^{1/3} \tag{4}$$

Cũng từ điều kiện biên ta có $(\varphi_1')_{22} = (\psi_1')_{21}$ đã xác định, $(\varphi_2')_{22} = (\psi_2')_{12}$ cũng đã biết.

Phương trình (4) là phương trình vi phân đối với ẩn hàm $(\psi_2')_{22} = y_{22}$

$$y'_{22} = (\psi_2'')_{12} + \frac{1}{A}\left[2(\psi_1')_{21} + B(\psi_2')_{12} + Cy_{22}\right]\left[(-\psi_2')_{12} + y_{22}\right]^{1/3} \tag{5}$$

Giải (5) ta xác định được ẩn hàm $(\psi_2')_{22}$ thay kết quả vào (1) ta được $(\psi_1')_{22}$.

Lý luận tương tự xét ở chu kỳ thứ i thanh 1, tức là

$$T_2 + (i-1)T_1 < t < T_2 + iT_1$$

Từ (2) ta có:

$$\psi_2'')_{2i} = (\varphi_2'')_{2i} + \frac{1}{A}\left[2(\varphi_1')_{2i} + B(\varphi_2')_{2i} + C(\psi_2')_{2i}\right]\left[(-\varphi_2')_{2i} + (\psi_2')_{2i}\right]^{1/3} \tag{6}$$

trong đó $(\varphi_1')_{2i} = (\psi_1')_{2(i-1)}$ đã biết. $(\varphi_2')_{2i} = (\psi_2')_{1i}$ đã xác định.

Phương trình (6) là phương trình vi phân đối với ẩn hàm $(\psi_2')_{2i} = y_{2i}$

$$y'_{2i} = (\psi_2'')_{1i} + \frac{1}{A}\left[2(\psi_1')_{2(i-1)} + B(\psi_2')_{1i} + Cy_{2i}\right]\left[(-\psi_2')_{1i} + y_{2i}\right]^{1/3} \tag{7}$$

Giải (7) ta tìm được ẩn hàm y_{2i}, thay vào (1) ta xác định được $(\psi_1')_{2i}$. Ta cũng xét khoảng lẻ cuối cùng $T_2 + iT_1 < t < T_2 + iT_1 + qT_1 = 2T_2$

Từ (2) ta có

$$(\psi_2'')_2 = (\varphi_2'')_2 + \frac{1}{A}\left[2(\varphi_1')_2 + B(\varphi_2')_2 + C(\psi_2')_2\right]\left[(-\varphi_2')_2 + (\psi_2')_2\right]^{1/3} \tag{8}$$

Từ điều kiện biên ta có $(\varphi_1')_2 = (\psi_1')_{2i}$ đã xác định, $(\varphi_2')_2 = (\psi_2')_1$ đã biết.

Phương trình (8) là phương trình vi phân đối với ẩn hàm $(\psi_2')_2 = y_2$

$$y'_2 = (\psi_2')_1 + \frac{1}{A}\left[2(\psi_1')_{1i} + B(\psi_2')_1 + Cy_2\right]\left[(-\psi_2')_1 + (y_2)\right]^{1/3} \tag{9}$$

Giải (9) ta được $(\psi_2')_2$, thay kết quả vào (1) ta có $(\psi_1')_2$.

Nếu va chạm của hai thanh chưa kết thúc ở chu kỳ thứ 2 của thanh 2 ta tiếp tục xét các chu kỳ tiếp theo với cách làm như trên.

Ta ký hiệu $(\ )_{kn}$ là hàm sóng ở chu kỳ thứ n của thanh 1 và chu kỳ thứ k của thanh 2 tức là $(k-1)T_2 + (n-1)T_1 < t < (k-1)T_2 + nT_1$ với $n = \overline{1,i}$.

Từ (2), ta có:

$$(\psi_2'')_{kn} = (\varphi_2'')_{kn} + \frac{1}{A}\left[2(\varphi_1')_{kn} + B(\varphi_2')_{kn} + C(\psi_2')_{kn}\right]\left[(-\varphi_2')_{kn} + (\psi_2')_{kn}\right]^{1/3} \tag{10}$$

Từ điều kiện biên ta có $(\varphi_1')_{kn} = (\psi_1')_{k(n-1)}$ đã biết, $(\varphi_2')_{kn} = (\psi_2')_{(k-1)n}$ đã biết.

Phương trình (10) là phương trình vi phân đối với ẩn hàm $(\psi_2')_{kn} = y_{kn}$. Giải phương trình này bằng phương pháp sai phân, sau khi xác định y_{kn} từ (1) ta tìm được:

$$(\psi_1')_{kn} = (\varphi_1')_{kn} + \frac{1}{\alpha}\left[(-\varphi_2')_{kn} + (\psi_2')_{kn}\right]$$

Hay

$$(\psi_1')_{kn} = (\psi_1')_{k(n-1)} + \frac{1}{\alpha}\left[(-\psi_2')_{(k-1)n} + y_{kn}\right] \tag{11}$$

Ta ký hiệu $(\ )_k$ là hàm sóng xác định trong khoảng lẻ chu kỳ thứ k của thanh 2 tức là:

$$(k-1)T_2 + iT_1 < t < (k-1)T_2 + iT_1 + qT_1 = kT_2$$

Từ (2) ta có:

$$(\psi_2'')_k = (\varphi_2'')_k + \frac{1}{A}\left[2(\varphi_1')_k + B(\varphi_2')_k + C(\psi_2')_k\right]\left[(-\varphi_2')_k + (\psi_2')_k\right]^{1/3} \tag{12}$$

Từ điều kiện biên ta có: $(\varphi_1')_k = (\psi_1')_{ki}$ đã biết $(\varphi_2')_k = (\psi_2')_{(k-1)}$ đã biết.

Phương trình (12) là phương trình vi phân đối với ẩn hàm $(\psi_2')_k = y_k$ sau khi xác định được y_k từ (1) ta tìm được:

$$(\psi_1'')_k = (\psi_1')_{ki} + \frac{1}{\alpha}\left[(-\psi_2')_{k-1} + y_k\right] \tag{13}$$

Lực nén va chạm P giữa hai thanh được xác định từ hệ thức sau

$$P_{kn} = E_2F_2\left[(-\varphi_2')_{kn} + (\psi_2')_{kn}\right] = E_2F_2\left[(-\psi_2')_{(k-1)n} + y_{kn}\right] \tag{14}$$

Thời gian va chạm được xác định bởi hệ thức $P_{kn} = 0$.

Ở mỗi chu kỳ của thanh 1 hay từng chu kỳ của thanh 2 ta xác định được giá trị của các hàm sóng $\varphi_1'(a_1t - x_1)$, $\varphi_2'(a_2t - x_2)$, $\psi_1'(a_1t + x_1)$ và $\psi_2'(a_2t + x_2)$ ta sẽ xác định được biến dạng, ứng suất và vận tốc tại mỗi thiết diện của thanh.

KẾT LUẬN

Bài toán va chạm dọc của hai thanh đàn hồi với đầu hình cầu đã được xét với khoảng thời gian $0 < t < T_2$ ở [1]. Nội dung bài báo này giải trọn vẹn bài toán trên với khoảng thời gian $T_2 < t < kT_2$ và $k = 1, 2, \ldots$ cho đến khi kết thúc va chạm giữa hai thanh, xác định được giá trị các hàm sóng ứng suất, vận tốc tại mỗi thiết diện của thanh và lực nén va chạm cùng thời gian va chạm.

Về kỹ thuật mô hình bài toán này gần sát với bài toán về máy búa đóng cọc.

Công trình này được hoàn thành với sự tài trợ của Chương trình Nghiên cứu cơ bản trong lĩnh vực Khoa học tự nhiên

Địa chỉ:
Đại học Thủy Lợi

Nhận ngày 19/01/1993

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Thúc An, Nguyễn Đăng Tộ, Nguyễn Hùng Sơn. Va chạm dọc của hai thanh đàn hồi đầu hình cầu. Tạp chí Cơ học số 1, 1993.
2. Кильчевский Н. А. Теория соударений твёрдых тел. Киев, 1969.

SUMMARY

LONGITUDINAL SHOCK OF TWO ELASTIC BARS WITH ONE SPHERICAL END

In [1] authors research problem of longitudinal shock of two elastic bars with one spherical end with the condition $0 < t < T_2$. In this paper authors continuelly researched this problem with the condition $T_2 < t < kT_2$ to finishing of the shock.

According to the technology this problem is similar to the picture of driving piles.