Tạp chí CƠ HỌC, tập XV, 1993, số 2 (32 – 36)

PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP MẶT CẮT LIÊN TIẾP TRONG BÀI TOÁN LỚP BIÊN TẦNG HAI CHIỀU

VŨ BÁ MAI

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Bài toán lớp biên tầng hai chiều đã được Blasius nghiên cứu [1], sau đó được Khimennets, Khauoat cùng nhiều tác giả khác phát triển [6]. Các tác giả dùng chuỗi lũy thừa của x với các hệ số là hàm của y. Các hệ số này được tính toán và lập thành bảng biểu tiện cho việc sử dụng kỹ thuật. Cũng vì thế mà gặp khó khăn khi cần có độ chính xác cao hơn.

Dưới đây sẽ trình bày một cách phát triển phương pháp mặt cắt liên tiếp để giải bài toán nhằm khắc phục tồn tại vừa nêu.

2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT CỦA PHƯƠNG PHÁP MẶT CẮT LIÊN TIẾP

Từ liên hệ:

$$U(x_0 + \Delta x_0, y) = U(x_0, y) + \frac{\partial U(x,y)}{\partial x}\Big|_{x=x_0} \cdot \Delta x_0 \tag{2.1}$$

ta thấy để tính $U(x_0 + \Delta x_0, y)$ cần biết hàm $U(x_0, y)$ và đạo hàm riêng theo x của nó. Vì vậy nếu coi $U(x_0, y)$ là giá trị ban đầu đã biết thì chỉ cần tìm giá trị $\dfrac{\partial U}{\partial x}$ tại x_0 là bài toán được giải quyết.

Nhằm mục đích đó, ta biến đổi phương trình Prandtl hai chiều [3]

$$\begin{aligned} U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{dP}{dx} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

với điều kiện bờ:

$$\begin{aligned} U = V = 0 \quad & \text{tại} \quad y = 0 \\ U = U_\infty \quad & \text{tại} \quad y = \infty \end{aligned}$$

về phương trình vi-tích phân theo y

Từ (2.2) theo [6] và [8] nhận được:

$$\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=x_0} = \frac{\partial U}{\partial y} \times \int_0^y \frac{1}{U^2}\Big[\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - f(x)\Big]\Big|_{x_0} dy + \frac{1}{U}\Big[\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - f(x)\Big]\Big|_{x_0} \tag{2.3}$$

trong đó đặt $f(x) = dP/dx$

Biểu thức (2.3) cho thấy khi biết giá trị của hàm $U(x,y)$ tại $x = x_0 = \text{const}$ thì $\left.\dfrac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=x_0}$ có khả năng xác định được. Muốn vậy, các đại lượng

$$\frac{1}{U^2}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - f(x)\right]\Big|_{x=x_0}; \tag{2.4}$$

$$\frac{1}{U}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - f(x)\right]\Big|_{x=x_0} \tag{2.5}$$

phải tồn tại hữu hạn trong miền tích phân theo y từ 0 đến y. Điều này được thực hiện nếu hàm $U(x,y)$ tại x_0 đồng thời phải thỏa mãn [7]:

$$\left.\frac{\partial^3 U}{\partial y^3}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=0}} = 0 \tag{2.4'}$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=0}} = f(x_0) \tag{2.5'}$$

Hai điều kiện (2.4') và (2.5') được gọi là điều kiện đường viền.

3. XÁC ĐỊNH GIÁ TRỊ $\dfrac{\partial U}{\partial x}$ TẠI $x = x_0$ THEO CÔNG THỨC (2.3)

Theo đề nghị của phương pháp mặt cắt liên tiếp, ta tìm nghiệm của (2.2) dạng

$$U(x_j, y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i^j}{i!} y^i; \qquad a_i^j = a_i(x_j) = \text{const} \tag{3.1}$$

trong đó các hệ số a_i^j là hằng số [4] và sẽ được ký hiệu là a_i^0 tại mặt cắt ban đầu ứng với $x = x_0$. Lấy đạo hàm cấp 1 và cấp 2 của (3.1) theo y

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i}{(i-1)!} y^{i-1}; \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \sum_{i=2}^{N} \frac{a_i y^{i-2}}{(i-2)!} \tag{3.3}$$

Viết biểu thức của U^2 dưới dạng chuỗi hữu hạn

$$U^2 = \sum_{i=2}^{2N} A_i y^i \tag{3.4}$$

trong đó :

$$A_i = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_j a_{i-j}}{j!(i-j)!} \tag{3.5}$$

và tích phân [7]

$$\int_0^y \frac{1}{U^2}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - f(x)\right]\Big|_{x=x_0} dy = \sum_{i=0}^{N} \frac{B_i}{(i+1)} \cdot y^{i+1} \tag{3.6}$$

trong đó B_i là nghiệm của hệ phương trình đại số tuyến tính

$$\sum_{j=0}^{i-2} B_j A_{i-j} = \frac{a_{i+2}}{i!} \qquad i = \overline{2,N} \tag{3.7}$$

tính tích của (3.2) với (3.6) được:

$$\frac{\partial U}{\partial y} \times \int_0^y \frac{1}{U^2}\Big[\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - f(x)\Big]\Big|_{x=x_0} dy = \sum_{i=1}^{N} C_i y^i \tag{3.8}$$

trong đó

$$C_i = \sum_{j=1}^{i} \frac{a_j B_{i-j}}{(j-1)!(i-j+1)}. \qquad i = \overline{1,N}. \tag{3.9}$$

Cũng tương tự ta tìm được:

$$\frac{1}{U}\Big[\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - f(x)\Big]\Big|_{x=x_0} = \sum_{i=1}^{N} D_i y^i \tag{3.10}$$

trong đó D_i là nghiệm của hệ phương trình đại số tuyến tính

$$\sum_{j=1}^{i} a_j D_{i-j+1} = \frac{a_{i+3}}{(i+1)!} \qquad i = \overline{1,N} \tag{3.11}$$

Thay các biểu thức (3.8), (3.10) vào (2.3) được:

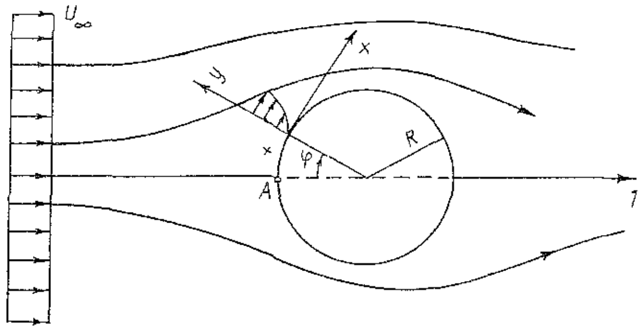
$$\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=x_0} = \sum_{i=1}^{N}(C_i + D_i)y^i; \quad (C_3 + D_3 = 0) \tag{3.12}$$

Thay (3.12) và (3.1) vào (2.1) ta nhận được kết quả:

$$U(x_0 + \Delta x_0, y) = \sum_{i=1}^{N}\Big\{\frac{(C_i + D_i)\Delta x_0 + a_i}{i!}\Big\}y^i; \quad C_3 + D_3 = 0; \quad a_3 = 0. \tag{3.13}$$

4. THÍ DỤ

Xác định biểu đồ lưu tốc trong bài toán dòng chảy bao hình trụ tròn bán kính R của chất lỏng nhớt không chịu nén. Hình trụ đặt vuông góc với vận tốc dòng bao tại vô cùng (hình 1).



Hình 1

Áp dụng phương pháp mặt cắt liên tiếp để xác định biểu đồ lưu tốc $U(x,y)$ tại các mặt cắt ứng với các giá trị xác định $x = x_j$. Theo (2.1) cần cho trước dạng biểu đồ $U(x_0, y)$ tại mặt cắt ban đầu $x = x_0 = R\varphi_0$ (trong đó φ_0 là góc ban đầu). Theo (3.1) dạng cụ thể của biểu đồ $U(x_0, y)$ được quyết định bởi các hằng số $a_i^0 = a_i(x_0)$. Các hằng số ban đầu này được xác định tại phòng thí nghiệm thủy lược trường đại học Xây dựng nhờ phương pháp chụp ảnh dòng chảy bao hình trụ có pha các hạt phản quang. Góc φ_0 ban đầu lấy bằng 15° [2]. Kết quả tính toán cụ thể như sau:

$$a_1^0 = 68.10^{-2};\quad a_2^0 = -150.10^{-2};\quad a_3^0 = 0;\quad a_4^0 = 864.10^{-3};$$
$$a_5^0 = -2688.10^{-3};\quad a_6^0 = 3348.10^{-3};\quad a_7^0 = -45864.10^{-5}.$$

Thay các giá trị này vào (3.1), nhận được dạng cụ thể của biểu đồ lưu tốc ban đầu:

$$U(x_0, y) = 0,68y - 0,75y^2 + 0,036y^4 - 0,0224y^5 + 0,0046y^6 - 0,00009y^7$$

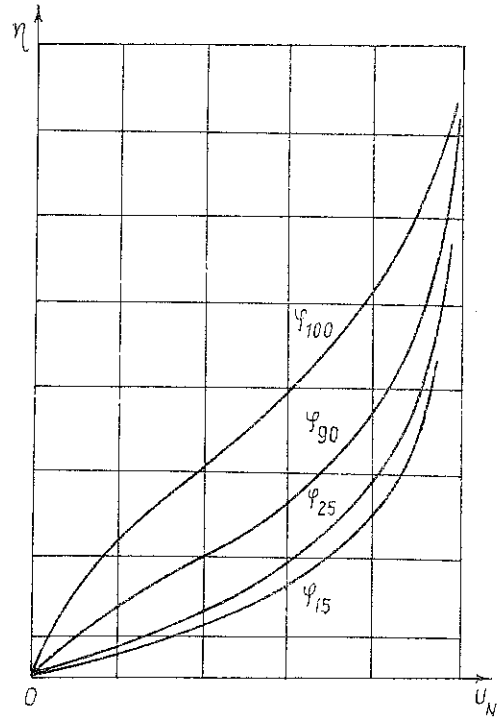
Biểu đồ lưu tốc ban đầu với các hệ số hằng số thỏa mãn điều kiện biên (2.2) cũng như các điều kiện (2.4') và (2.5').

Thực hiện các phép tính (3.5), (3.6), (3.7), (3.9), (3.11) nhận được kết quả (3.13) cho các mặt cắt liên tiếp sao đó.

Dưới đây là biểu đồ lưu tốc của 3 mặt cắt đặc trưng ứng với các góc $\varphi_1 = 25°$, $\varphi_2 = 90°$, $\varphi_3 = 100°$, $x_j = R\varphi_j$ $(j = 1, 2, 3)$

$$U(x_1, y) = 0,75y - 0,091y^2 + 3.10^{-4}y^4 - 98.10^{-5}y^5 + 11.10^{-5}y^6 - 18.10^{-6}y^7,$$
$$U(x_2, y) = 1,215y - 1,04y^4 + 3.10^{-3}y^5 - 205.10^{-5}y^6 + 514.10^{-7}y^7,$$
$$U(x_3, y) = 9.10^{-2}y + 0,911y^2 - 0,222y^4 + 213.10^{-4}y^5 + 493.10^{-8}y^6.$$

Biểu đồ các đường cong thể hiện sự phân bố lưu tốc của lớp biên tầng tại bốn mặt cắt đặc trưng được cho trên hình 2.



Hình 2

Trong đó: $\eta = y/\delta$ - chiều dày không thứ nguyên của lớp biên, $U_N = U/U_\infty$ - Vận tốc dọc của lớp biên

5. MỘT SỐ NHẬN XÉT

Phương pháp mặt cắt liên tiếp vừa trình bày là kết quả kết hợp sử dụng liên hệ (2.1) với việc tìm $U(x_0, y)$ bằng biểu thức bán thực nghiệm (3.1). Nhờ sử dụng liên hệ (2.3) mà kết quả cuối cùng được tính toán theo công thức đơn giản (3.13). Nhờ vậy tính toán lớp biên với độ chính xác tùy ý, không phải sử dụng các biểu mẫu tính sẵn. Tuy nhiên để nhanh chóng đạt tới kết quả thì việc sử dụng các kết quả thực nghiệm có độ chính xác cao là cần thiết.

Tác giả chân thành cảm ơn Giáo sư - Tiến sĩ Nguyễn Tài về sự hướng dẫn trực tiếp cũng như những ý kiến đóng góp hiệu quả, đã tạo điều kiện cho việc hoàn thành đề tài của tác giả.

Địa chỉ:
Trường đại học Xây dựng HN

Nhận ngày 11/8/1992

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Christian W. J. Improved numerical solution of the Blasius problem with three point boundary condition JASS 28, 1961.
2. Goldstein. On laminar boundary layer flow near a position of separation. Mech. appl. Math. 1, 1948.
3. Durand W. F. Aerodynamics theory III 1935.
4. Howarth L. On the solution of the laminar boundary layer equation. Proc. Roy. Soc. London 1938.
5. Wieghardt K. On a simple method for calculating laminar boundary layers. Aero. Quart. 5, 1954.
6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Изд. Наука, Москва 1973.
7. Фихтенгольц. Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления Том I, II. Изд. Наука, Москва 1970.
8. Rosenhead L. Laminar boundary layers. Oxford, 1963.

SUMMARY

DEVELOPMENT OF NUMERICAL STEP-BY-STEP METHOD FOR CALCULATING BOUNDARY LAYERS

In this paper was proposed a development of numerical step-by-step method for calculating boundary layers. As an example showed all the coefficients a_n^0 of initial velocity's profile had been calculated by experiment.