Tạp chí CƠ HỌC, tập XV, 1993, số 2 (27 - 31)

ỔN ĐỊNH Ở MỘT HỆ DAO ĐỘNG THÔNG SỐ CHỊU HAI KÍCH ĐỘNG VỚI CƯỜNG ĐỘ KHÁC CẤP

NGUYỄN VĂN ĐÌNH

ĐẶT VẤN ĐỀ

Ở hệ dao động thông số, tồn tại miền ổn định và mất ổn định của chế độ cân bằng. Với kích động điều hòa, cường độ yếu và cùng cấp với lực cản, miền mất ổn định chủ yếu xảy ra khi tần số kích động vào khoảng hai lần tần số riêng [1, 2, 3]. Thực tế trong khai triển của kích động, ngoài thành phần với tần số cơ bản còn có nhiều thành phần với tần số bội và tuy những thành phần sau có yếu nhưng trong những điều kiện nhất định, chúng có tác động lớn và việc nghiên cứu tác động tổng hợp của chúng là cần thiết. Điều đó đã được đặt ra trong việc phân định cấp của các thành phần kích động [4, 5].

Dưới đây xét trường hợp kích động thông số với hai thành phần trong đó: - thành phần bội hai và lực cản có cường độ rất yếu so với thành phần cơ bản; - thành phần bội hai có tần số vào khoảng hai lần tần số riêng (như thế, thành phần cơ bản, cường độ mạnh hơn, gây cộng hưởng chính - là thứ yếu ở hệ thông số; thành phần bội hai, cường độ yếu hơn, gây cộng hưởng thứ điều hòa - là cộng hưởng chủ yếu ở hệ thông số). Kết quả khảo sát cho thấy tác động tổng hợp của hai thành phần kích động tới sự xuất hiện và độ rộng của miền mất ổn định.

1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN DAO ĐỘNG

Xét hệ dao động mô tả bởi phương trình vi phân:

$$\ddot{x} + \nu^2 x = \varepsilon\{2px\cos\nu t\} + \varepsilon^2\{(\nu^2 - 1)x - h\dot{x} + 2qx\cos 2(\nu t + X)\} \tag{1.1}$$

trong đó: x - biến dao động; dấu "." trên các chữ - ký hiệu đạo hàm theo t; ν - tần số cơ bản của kích động; 1 - tần số riêng của hệ; $(\nu^2 - 1)$ - đại lượng đặc trưng độ lệch tần; $2p > 0$, $2q > 0$ và X $(0 \le X \le \pi)$ tương ứng cường độ hai thành phần kích động và độ lệch pha giữa chúng; $h > 0$ - hệ số cản nhớt; $\varepsilon > 0$ - tham số bé dùng để phân định cấp các đại lượng.

Theo phương pháp tiệm cận [1], đặt:

$$\begin{aligned} x &= a\cos\psi + \varepsilon u_1(a,\psi,\theta) + \varepsilon^2 u_2(a,\psi,\theta), \\ \dot{a} &= \varepsilon A_1(a,\theta) + \varepsilon^2 A_2(a,\theta), \\ \dot{\theta} &= \varepsilon B_1(a,\theta) + \varepsilon^2 B_2(a,\theta); \quad \psi = \nu t + \theta, \end{aligned} \tag{1.2}$$

trong đó: a, θ - biên độ và pha dao động; u_1, u_2 - các hàm cần xác định của a, ψ, θ, tuần hoàn chu kỳ 2π đối với ψ, θ, A_1, A_2, B_1, B_2 - các hàm cần xác định của a, θ, tuần hoàn chu kỳ 2π đối với θ.

Đem (1.2) thay vào (1.1) rồi khai triển và cân bằng hai vế theo các lũy thừa của ε, chúng ta lần lượt được:

- Ở cấp ε^1:

$$-2\nu A_1 \sin\psi - 2\nu a B_1 \cos\psi + \nu^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2} + \nu^2 u_1 = pa\{\cos(2\psi - \theta) + \cos\theta\} \tag{1.3}$$

Suy ra

$$A_1 = 0, \quad B_1 = 0, \quad u_1 = \frac{pa}{\nu^2}\cos\theta - \frac{pa}{3\nu^2}\cos(2\psi - \theta) \tag{1.4}$$

Ở cấp ε^2:

$$\begin{aligned} &- 2\nu A_2 \sin\psi - 2\nu a B_2 \cos\psi + \nu^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial\psi^2} + \nu^2 u_2 = 2p\cos(\psi - \theta)\Big\{\frac{pa}{\nu^2}\cos\theta - \frac{pa}{3\nu^2}\cos(2\psi - \theta)\Big\} + \\ &+ (\nu^2 - 1)a\cos\psi + ha\nu\sin\psi + qa\big\{\cos(3\psi - 2\theta + 2X) + \cos(\psi - 2\theta + 2X)\big\} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} A_2 &= -\frac{p^2}{2\nu^3}a\sin 2\theta - \frac{q}{2\nu}a\sin(2\theta - 2X) - \frac{h}{2}a, \\ aB_2 &= -\frac{p^2}{2\nu^3}a\cos 2\theta - \frac{q}{2\nu}a\cos(2\theta - 2X) - \frac{p^2}{3\nu^3}a - \frac{(\nu^2 - 1)}{2\nu}a \end{aligned} \tag{1.6}$$

Vậy ở biến a, θ dao động của hệ được mô tả bởi hệ phương trình vi phân:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{p^2}{2\nu^3}a\sin 2\theta - \frac{q}{2\nu}a\sin(2\theta - 2X) - \frac{h}{2}a, \\ a\dot{\theta} &= -\frac{p^2}{2\nu^3}a\cos 2\theta - \frac{q}{2\nu}a\cos(2\theta - 2X) - \frac{p^2}{3\nu^3}a - \frac{(\nu^2 - 1)}{2\nu}a \end{aligned} \tag{1.7}$$

2. VÙNG MẤT ỔN ĐỊNH CỦA CHẾ ĐỘ CÂN BẰNG

Để khảo sát tính ổn định của chế độ cân bằng $a = 0$, thực hiện phép biến đổi:

$$u = a\cos\theta, \quad v = a\sin\theta. \tag{2.1}$$

Dễ dàng tính được:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{1}{2\nu}\{q\sin 2X - h\nu\}u - \frac{1}{2\nu}\Big\{\frac{p^2}{3\nu^2} - (\nu^2 - 1) + q\cos 2X\Big\}v, \\ \dot{v} &= -\frac{1}{2\nu}\Big\{\frac{5p^2}{3\nu^2} + (\nu^2 - 1) + q\cos 2X\Big)u - \frac{1}{2\nu}\{q\sin 2X + h\nu\}v \end{aligned} \tag{2.2}$$

Chế độ cân bằng tương ứng nghiệm tầm thường $u = v = 0$ và tính ổn định của nó phụ thuộc vào dấu của phần thực của nghiệm của phương trình đặc trưng:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2\nu}(q\sin 2X - h\nu) - \rho & -\frac{1}{2\nu}\Big(\frac{p^2}{3\nu^2} - (\nu^2 - 1) + q\cos 2X\Big) \\ -\frac{1}{2\nu}\Big(\frac{5p^2}{3\nu^2} + (\nu^2 - 1) + q\cos 2X\Big) & -\frac{1}{2\nu}(q\sin 2X + h\nu) - \rho \end{vmatrix} = 0$$

hay:

$$\rho^2 + h\rho + \frac{1}{4\nu^2}\Big\{h^2\nu^2 - q^2 - \frac{5p^4}{9\nu^4} + \frac{4p^2(\nu^2 - 1)}{3\nu^2} - \frac{2p^2 q}{\nu^2}\cos 2X + (\nu^2 - 1)\Big\} = 0$$

Vùng mất ổn định được xác định bởi điều kiện phương trình đặc trưng có nghiệm với phần thực dương:

$$h^2\nu^2 - q^2 - \frac{5p^4}{9\nu^4} + \frac{4p^2(\nu^2-1)}{3\nu^2} - \frac{2p^2q}{\nu^2}\cos 2X + (\nu^2-1)^2 < 0$$

hay

$$\left[(\nu^2-1) + \frac{2p^2}{3\nu^2}\right]^2 < \left(\frac{p^2}{\nu^2}\right)^2 + \frac{2p^2q}{\nu^2}\cos 2X + q^2 - h^2\nu^2 \tag{2.4}$$

Vùng mất ổn định chỉ tồn tại khi vế phải của (2.4) là dương nên điều kiện này được viết dưới dạng:

$$-\sqrt{\Delta} < (\nu^2-1) + \frac{2p^2}{3\nu^2} < \sqrt{\Delta} \tag{2.5}$$

trong đó

$$\Delta = \left(\frac{p^2}{\nu^2}\right)^2 + \frac{2p^2q}{\nu^2}\cos 2X + q^2 - h^2\nu^2$$

Vì p có cấp ε còn h, q, (ν^2-1) có cấp ε^2 nên - nếu chỉ giữ lại các đại lượng đến cấp ε^2 - điều kiện (2.5) sẽ trở nên đơn giản:

$$-\sqrt{\delta^2 - h^2} < (\nu^2-1) + \frac{2p^2}{3} < \sqrt{\delta^2 - h^2} \tag{2.6}$$

trong đó:

$$\delta^2 = (p^2)^2 + 2p^2q\cos 2X + q^2$$

Trường hợp $p = 0$, điều kiện (2.6) trở thành

$$-\sqrt{q^2 - h^2} < \nu^2 - 1 < \sqrt{q^2 - h^2} \tag{2.7}$$

và khi $q = 0$ chúng ta có:

$$-\sqrt{p^2 - h^2} < (\nu^2-1) + \frac{2p^2}{3} < \sqrt{p^2 - h^2} \tag{2.8}$$

Từ (2.6), (2.7), (2.8) có thể rút ra một số nhận xét:

- Thành phần kích động cơ bản làm lệch trái (về phía ν nhỏ) vùng mất ổn định một đoạn $2p^2/3$.

Vùng mất ổn định tồn tại khi $\delta^2 > h^2$ nghĩa là khi h^2 (lực cản) đủ nhỏ và khi δ^2 (phụ thuộc vào cường độ p, q của hai thành phần kích động và độ lệch pha X giữa chúng) đủ lớn.

- Tác động tổng hợp của hai thành phần kích động mạnh nhất khi $X = 0, \pi$ và yếu nhất khi $X = \pi/2$, điều đó được nhận biết dễ dàng qua biểu thức của δ^2.

- Tác động tổng hợp của hai thành phần không luôn mạnh hơn mà có thể yếu hơn tác động của riêng từng thành phần; nói cách khác, hai thành phần kích động có thể cộng hoặc khử tác động của nhau. Cụ thể, tác động tổng hợp sẽ mạnh hơn các tác động riêng nếu $\delta^2 > \max(p^4, q^2)$ hay $\cos 2X > \max(-q/4p^2, -p^2/2q)$ và yếu hơn nếu bất đẳng thức có chiều ngược lại.

Thí dụ: $q = 0.00200$, $h = 0.00250$, $p = 0.04000$. Riêng từng thành phần kích động không gây mất ổn định. Tác động tổng hợp của hai thành phần kích động gây ra khi $X = 0$ vùng mất ổn định rộng nhất $(-0.0036 < \nu^2 - 1 < 0.0015)$ nhưng sẽ không gây mất ổn định nếu độ lệch pha nằm trong vùng $\alpha < X < \pi - \alpha$ với $\cos 2\alpha = 0.0484375$ $(0 < \alpha < \pi/2)$.

Thí dụ khác: $q = 0.00300$, $h = 0.00250$, $p = 0.02$. Riêng thành phần kích động cơ bản không gây mất ổn định; riêng thành phần kích động bội hai gây ra vùng mất ổn định $-0.0016 < \nu^2 - 1 < 0.0016$; tác động tổng hợp của hai thành phần kích động cùng pha $(X = 0)$ gây ra vùng mất ổn định $(-0.0026 < \nu^2 - 1 < 0.0020)$. Nếu $p = 0.04$ và $X = 0$, vùng mất ổn định là $-0.0049 < \nu^2 - 1 < 0.0028$.

3. ỔN ĐỊNH CỦA CON LẮC CÓ ĐIỂM TREO DAO ĐỘNG

Theo hướng những phân tích vừa tiến hành, hãy xét vấn đề ổn định của con lắc khi dao động của điểm treo có hai thành phần.

Khảo sát ổn định của con lắc là khối lượng m tập trung tại đầu C của thanh cứng không trọng lượng $BC = \ell$, dao động được trong mặt phẳng thẳng đứng Oxy do điểm treo của nó được cơ cấu tay quay - thanh truyền OAB làm di chuyển dọc trục thẳng đứng Ox. Ký hiệu: ω - vận tốc góc của tay quay; $r = OA$, $\mu = OA/AB$. Dễ dàng tính được gia tốc điểm B và, với giả thiết μ nhỏ, nếu chỉ giữ lại trong khai triển của gia tốc hai số hạng đầu tiên, chúng ta được:

$$\ddot{x}_B = -r\omega^2 \cos\omega t - \mu . r\omega^2 \cos 2\omega t \tag{3.1}$$

Áp dụng nguyên lý Đalămbe, có thể lập phương trình vi phân dao động nhỏ của con lắc:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = -\frac{\lambda}{m\ell^2}\dot{\varphi} - \frac{r}{\ell}\omega^2\varphi\cos\omega t - \mu\frac{r}{\ell}\omega^2\varphi\cos 2\omega t \tag{3.2}$$

trong đó: g - gia tốc trọng trường;

$\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$ - tần số riêng của con lắc;

λ - hệ số cản.

Ký hiệu $\nu = \omega/\omega_0$ và thực hiện phép biến đổi:

$$\tau = \omega_0 t + \pi/\nu \tag{3.3}$$

phương trình (3.2) trở thành:

$$\ddot{\varphi} + \varphi = -\frac{\lambda}{m\omega_0\ell^2}\varphi' + \frac{r}{\ell}\nu^2\varphi\cos\nu\tau + \mu\frac{r}{\ell}\nu^2\varphi\cos 2(\nu\tau + \pi/2) \tag{3.4}$$

trong đó dấu "," ký hiệu đạo hàm theo τ

Giả thiết μ, r/ℓ, $\lambda/m\omega_0\ell^2$ đều nhỏ và có thể viết (3.4) dưới dạng:

$$\varphi'' + \varphi = \varepsilon(2p\nu^2\varphi\cos\nu\tau) + \varepsilon^2\{-h\varphi' + 2q\nu^2\varphi\cos 2(\nu\tau + \pi/2)\} \tag{3.5}$$

trong đó $2p = r/\ell$, $2q = \mu r/\ell$, $h = \lambda/m\omega_0\ell^2$, ε ký hiệu tham số bé. Phương trình (3.5) có dạng (1.1), chỉ khác thừa số ν^2 ở cường độ các thành phần kích động và độ lệch pha có giá trị $X = \pi/2$. Vùng mất ổn định vẫn được xác định bởi biểu thức (2.6).

Cho $r = 0.010$, $\ell = 0.200$, $\mu = 0.12$, $\lambda/m\omega_0 = 0.001$ thì $p = 0.025$, $q = 0.003$, $h = 0.0025$. Riêng thành phần kích động bội hai gây ra vùng mất ổn định $-0.0016 < \nu^2 - 1 < 0.0016$. Có thêm thành phần kích động cơ bản, vùng mất ổn định không tồn tại, vị trí cân bằng của con lắc được ổn định hóa.

KẾT LUẬN

Những kết quả thu được cho thấy, khi lực cản và cường độ thành phần kích động bội hai đều rất nhỏ, tính ổn định của chế độ cân bằng phụ thuộc một cách đáng kể vào thành phần kích động cơ bản và độ lệch pha giữa hai thành phần kích động. Hai thành phần kích động có thể cộng hoặc khử tác động của nhau và do đó có thể làm xuất hiện, mở rộng hoặc thu hẹp, triệt tiêu vùng mất ổn định.

Công trình này được hoàn thành với sự tài trợ của Chương trình Nghiên cứu cơ bản trong lĩnh vực Khoa học tự nhiên

Địa chỉ:
Viện Cơ học Viện KHVN

Nhận ngày 26/8/1992

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Москва, 1963.
2. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Москва, 1956.
3. Каудерер Г. Нелинейная механика, Москва, 1961.
4. Naufeh A. H. Interaction of fundamental parametric resonances with subharmonic resonances of order one-half Journal of Sound and Vibration (1984) 96 (3). 333-340.
5. Raymond H. Plant, Jeanette J. Gentry and Dean T. Mook - Non - linear oscillations under multifrequency parametric excitation. International Journal of Non-linear Mechanics, vol. 25, No 2/3, pp. 187-198, 1990.

SUMMARY

STABILITY OF A PARAMETRICALLY - EXCITED SYSTEM UNDER TWO EXCITATIONS

In this paper, the stability of a parametrically - excited system under two excitations of different orders is studied. It is found that these excitations either renforce their actions or eliminate each other. Hence, the unstable region can be either expanded or restricted.

GENERALIZED DIFFUSION THEORY OF ...

(tiếp trang 26)

LÝ THUYẾT KHUYẾCH TÁN SUY RỘNG MÔI TRƯỜNG CHẤT LỎNG - CÁC HẠT BIẾN DẠNG VI MÔ VÀ CÁC DÒNG CHẢY HAI PHA CHẤT LỎNG - BỌT KHÍ

Nguyễn Văn Điệp

Dòng chảy của chất lỏng mang các hạt cầu biến dạng được, khi các hạt chỉ co, rãn theo bán kính, quay và chuyển động tịnh tiến, được xét trong công trình này. Đã thu nhận được hệ phương trình đủ để nghiên cứu chuyển động của môi trường. Cùng với các biểu thức xác định, hệ phương trình này cho phép xác định được tất cả các đặc trưng dòng chảy, và có thể sử dụng để nghiên cứu dòng chảy hai pha chất lỏng - bọt khí. Các vấn đề truyền sóng động học và sóng âm trong dòng chảy chất lỏng - bọt khí đã được nghiên cứu.