Tạp chí CƠ HỌC, tập XV, 1993, số 2 (7 — 12)

ỔN ĐỊNH CỦA BẢN BỊ NÉN ĐỒNG THỜI HAI PHÍA THEO QŨY ĐẠO PHỨC TẠP

ĐÀO VĂN DŨNG

Theo hướng nghiên cứu đã chỉ ra trong [1, 2, 4], bài này xét sự ổn định của bản mỏng đàn dẻo với quá trình biến dạng phức tạp, xây dựng phương pháp xác định lực tới hạn và chỉ ra ảnh hưởng của quá trình đặt tải phức tạp tới sự ổn định của bản.

1. CÁCH ĐẶT BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH

Xét bản mỏng chữ nhật cạnh a, b, chiều dày h đặt trong hệ Đề các vuông góc $Oxyz$ sao cho Oz vuông góc với bản. Giả thiết bản tựa bản lề tại các biên $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$ và chịu nén đồng thời hai phía bởi các lực thay đổi theo quy luật bất kỳ của tham số t là $P_{11}(t)$, $P_{12}(t)$, $P_{22}(t)$. Vật liệu là không nén được và không xét đến sự xuất hiện miền cất tải trong bản.

1. Quá trình trước khi vồng

Ta xem rằng, tại thời điểm t nào đó khi bản bị nén, tồn tại trạng thái ứng suất phẳng màng trong bản như sau

$$\sigma_{11} = -P_{11}(t), \quad \sigma_{22} = -P_{22}(t), \quad \sigma_{12} = -P_{12}(t)$$

và

$$\sigma = -\frac{1}{3}(P_{11} + P_{22}); \quad \sigma_u = (P_{11}^2 - P_{11}P_{22} + P_{22}^2 + 3P_{12}^2)^{1/2} \tag{1.1}$$

Các thành phần tenxơ tốc độ biến dạng tương ứng xác định theo lý thuyết quá trình độ cong trung bình là

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_{11} &= \frac{1}{N}(-\dot{P}_{11} + \frac{1}{2}\dot{P}_{22}) - \Big(\frac{1}{\phi'} - \frac{1}{N}\Big)\times \\
&\times \frac{(P_{11}\dot{P}_{11} + P_{22}\dot{P}_{22} - \frac{1}{2}P_{11}\dot{P}_{22} - \frac{1}{2}\dot{P}_{11}P_{22} + 3P_{12}\dot{P}_{12})(P_{11} - \frac{1}{2}P_{22})}{(P_{11}^2 + P_{22}^2 - P_{11}P_{22} + 3P_{12}^2)} \\
\dot{\varepsilon}_{22} &= \frac{1}{N}) - \dot{P}_{22} + \frac{1}{2}\dot{P}_{11} - \Big(\frac{1}{\phi'} - \frac{1}{N}\Big)\times \\
&\times \frac{(P_{11}\dot{P}_{11} + P_{22}\dot{P}_{22} - \frac{1}{2}P_{11}\dot{P}_{22} - \frac{1}{2}\dot{P}_{11}P_{22} + 3P_{12}\dot{P}_{12})(P_{22} - \frac{1}{2}P_{11})}{(P_{11}^2 + P_{22}^2 - P_{11}P_{22} + 3P_{12}^2)} \\
\dot{\varepsilon}_{12} &= \frac{3}{2N}\big(-\dot{P}_{12}\big) - \frac{3}{2}\Big(\frac{1}{\phi'} - \frac{1}{N}\Big)\times \\
&\times (P_{11}\dot{P}_{11} + P_{22}\dot{P}_{22} - \frac{1}{2}P_{11}\dot{P}_{22} - \frac{1}{2}\dot{P}_{11}P_{22} + 3P_{12}\dot{P}_{12})\frac{P_{12}}{\sigma_u^2}
\end{aligned} \tag{1.2}$$

trong đó $\phi' = \phi'(S)$; $N(S,t) = \sigma_u k(s)$

Phương trình xác định độ dài cung của qũy đạo biến dạng như sau:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\dot{\varepsilon}_{11}^2 + \dot{\varepsilon}_{11}\dot{\varepsilon}_{22} + \dot{\varepsilon}_{22}^2 + \dot{\varepsilon}_{12}^2\right)^{1/2} \equiv F(s,t) \tag{1.3}$$

2. Quá trình sau khi vồng

Giả thiết rằng các lực ngoài phụ thuộc vào các tham số tải t. Tại thời điểm t^* (cần xác định) bản bị vồng, tức là xuất hiện dạng cân bằng lân cận. Khi đó hệ các phương trình ổn định đàn dẻo của bản có dạng:

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 \frac{\partial^4 \delta W}{\partial x^4} + \gamma_2 \frac{\partial^4 \delta W}{\partial x^3 \partial y} + \gamma_3 \frac{\partial^4 \delta W}{\partial x^2 \partial y^2} + \gamma_4 \frac{\partial^4 \delta W}{\partial x \partial y^3} + \gamma_5 \frac{\partial^4 \delta W}{\partial y^4} + \\
&+ \frac{3}{h^2 G}\left(P_{11}\frac{\partial^2 \delta W}{\partial x^2} + 2P_{12}\frac{\partial^2 \delta W}{\partial x \partial y} + P_{22}\frac{\partial^2 \delta W}{\partial y^2}\right) = 0
\end{aligned} \tag{1.4}$$

trong đó

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= 1 - \frac{3}{4}\left(1 - \frac{\varphi_t}{\varphi_N}\right)\frac{P_{11}^2}{\sigma_u^2} \\
\gamma_2 &= -3\left(1 - \frac{\varphi_t}{\varphi_N}\right)\frac{P_{12}P_{11}}{\sigma_u^2} \\
\gamma_3 &= 2 - 3\left(1 - \frac{\varphi_t}{\varphi_N}\right)\frac{P_{12}^2}{\sigma_u^2} - \frac{3}{2}\left(1 - \frac{\varphi_t}{\varphi_N}\right)\frac{P_{11}P_{22}}{\sigma_u^2} \\
\gamma_4 &= -3\left(1 - \frac{\varphi_t}{\varphi_N}\right)\frac{P_{12}P_{22}}{\sigma_u^2} \\
\gamma_5 &= 1 - \frac{3}{4}\left(1 - \frac{\varphi_t}{\varphi_N}\right)\frac{P_{22}^2}{\sigma_u^2} \\
\varphi_t &= \frac{\phi'(s)}{3G}\ ; \quad \varphi_N = \frac{N(S,t)}{3G}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Việc giải bài toán ổn định quy về nghiên cứu đồng thời hệ 2 phương trình (1.3) và (1.4) cùng với các điều kiện biên đã cho.

2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Phương pháp chung để giải bài toán là chọn nghiệm δW sao cho thỏa mãn điều kiện biên động học, đem thay vào phương trình (1.4), từ điều kiện tồn tại nghiệm không tầm thường, suy ra hệ thức xác định lực tới hạn. Ở đây do tính phức tạp của quá trình (thông qua tham số t), nên để xác định lực tới hạn ta phải kết hợp với phương trình (1.3). Sau đây trình bày một cách tường minh ý tưởng trên.

Từ điều kiện biên động học ta chọn

$$\delta W = A\cos\left(\frac{\pi x}{a} + \frac{\pi y}{b}\right), \tag{2.1}$$

Dễ thấy rằng cách tìm nghiệm như vậy thỏa mãn điều kiện biên tựa bản lề theo nghĩa tích phân. Thay (2.1) vào (1.4) và từ điều kiện tồn tại nghiệm không tầm thường, tức là $A \neq 0$ thu được

$$P_{11}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + 2P_{12}\left(\frac{\pi}{a}\right)\left(\frac{\pi}{b}\right) + P_{22}\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 = \frac{Gh^2\varphi_N}{3}\Big[\gamma_1\left(\frac{\pi}{a}\right)^4 + $$
$$+ \gamma_2\left(\frac{\pi}{a}\right)^3\left(\frac{\pi}{b}\right) + \gamma_3\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \gamma_4\left(\frac{\pi}{a}\right)\left(\frac{\pi}{b}\right)^3 + \gamma_5\left(\frac{\pi}{b}\right)^4\Big] \tag{2.2}$$

Gọi $i = \dfrac{3b}{h}$ là độ uốn của bản và đặt $\alpha = \dfrac{a}{b}$, khi đó (2.2) có dạng

$$i^2 = 9\left(\frac{b}{h}\right)^2 = \frac{3G\pi^2\varphi_N\left(\gamma_1\dfrac{1}{\alpha^4} + \gamma_2\dfrac{1}{\alpha^3} + \gamma_3\dfrac{1}{\alpha^2} + \gamma_4\dfrac{1}{\alpha} + \gamma_5\right)}{P_{11}\dfrac{1}{\alpha^2} + 2P_{12}\dfrac{1}{\alpha} + P_{22}} \tag{2.3}$$

Giá trị tới hạn $P^*_{ij} = P_{ij}(t_*)$ được tính tương ứng với giá trị $t = t_*$ của tham số t. Giá trị t^* tìm được bằng cách đồng thời giải hai phương trình (1.3) và (2.3).

Để minh họa xét bản mỏng cạnh a chịu nén đồng thời theo hai phía Ox, Oy bởi hai lực $P(t)$ và $q(t)$. Tính toán kết quả bằng số lực tới hạn của bản khi bản làm việc ở trạng thái đàn hồi và ở trạng thái đàn dẻo với quá trình đặt tải phức tạp và đặt tải đơn giản và so sánh các kết quả đó.

3. BẢN VUÔNG CHỊU NÉN THEO HAI TRỤC

Ký hiệu

$$\sigma_{11} = -P_{11} = -P(t), \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{22} = -P_{22} = -q(t),$$
$$\sigma_u^2 = (P^2 - Pq + q^2); \; a = b; \; \dot{\varepsilon}_{11} \neq 0, \; \dot{\varepsilon}_{22} \neq 0; \; \dot{\varepsilon}_{12} = 0$$

Phương trình độ dài cung (1.3) dẫn về

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\dot{\varepsilon}_{11}^2 + \dot{\varepsilon}_{11}\cdot\dot{\varepsilon}_{22} + \dot{\varepsilon}_{22}^2\right)^{1/2} \equiv F(s,t) \tag{3.1}$$

Hệ thức xác định lực tới hạn (2.3) có dạng

$$i^2 = 9\left(\frac{a}{h}\right)^2 = \frac{3G\pi^2\varphi_N}{P(t)+q(t)}\cdot\left[4 - \frac{3}{4}\left(1 - \frac{\varphi_t}{\varphi_N}\right)\frac{\left[P(t)+q(t)\right]^2}{\sigma_u^2}\right] \tag{3.2}$$

Bài toán tìm các giá trị lực tới hạn $P(t)$, $q(t)$ quy về việc tìm giá trị $t = t^*$ của tham số tải mà ứng với nó $P(t)$ và $q(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất. Vì S cũng là hàm của t nên giá trị t^* tìm được bằng cách giải đồng thời 2 phương trình (3.1) và (3.2).

Để tiện lợi cho tính toán bằng số, ta sai phân (3.1) như sau: Giả sử t biến thiên trong $[0,T]$ nào đó, chia $[0,T]$ thành n bước chia $0 = t_0, t_1, \ldots, t_n = T$ với bước chia τ. Khi đó (3.1) tương đương với

$$S(t_{n+1}) - S(t_n) = \tau F(t_n, S(t_n)) \tag{3.3}$$

Giả sử quỹ đạo đặt tải được cho bởi quy luật sau

$$P(t) = P_{00} + t, \qquad q(t) = \frac{\left[P(t)\right]^4}{P_0^3} \tag{3.4}$$

Với P_{00}, P_0 là các hằng số

Khi đó cường độ ứng suất (1.1) bằng

$$\sigma_u = \left[(P_{00}+t)^2 - (P_{00}+t)^5/P_0^3 + (P_{00}+t)^8/P_0^6\right]^{1/2} \tag{3.5}$$

Các thành phần tenxơ tốc độ biến dạng

$$\dot{\varepsilon}_{12} = 0$$

$$\dot{\varepsilon}_{11} = \frac{1}{N(S,t)}\Big[-1 + \frac{2(P_{00}+t)^3}{P_0^3}\Big] - \Big(\frac{1}{\phi'(s)} - \frac{1}{N(S,t)}\Big)\Big[(P_{00}+t) + \frac{4(P_{00}+t)^7}{P_0^6} - \frac{2(P_{00}+t)^4}{P_0^3} - \frac{1}{2}\frac{(P_{00}+t)^4}{P_0^3}\Big]\Big[\frac{(P_{00}+t)}{1} - \frac{1}{2}\frac{(P_{00}+t)^4}{P_0^3}\Big]\sigma_u^{-2}$$

$$\dot{\varepsilon}_{22} = \frac{1}{N(S,t)}\Big[-4\frac{(P_{00}+t)^3}{P_0^3} + \frac{1}{2}\Big] - \Big(\frac{1}{\phi'(S)} - \frac{1}{N(S,t)}\Big)\Big[(P_{00}+t) + \frac{4(P_{00}+t)^7}{P_0^6} - \frac{2(P_{00}+t)^4}{P_0^3} - \frac{1}{2}\frac{(P_{00}+t)^4}{P_0^3}\Big]\Big[\frac{(P_{00}+t)^4}{P_0^3} - \frac{1}{2}(P_{00}+t)\Big]\sigma_u^{-2} \qquad (3.6)$$

Phương trình (3.2) dẫn về

$$i^2 = 9\Big(\frac{a}{h}\Big)^2 = \frac{3G\pi^2\varphi_N}{(P_{00}+t) + \dfrac{(P_{00}+t)^4}{P_0^3}} \cdot \left\{4 - \frac{3}{4}\Big(1 - \frac{\varphi_t}{\varphi_N}\Big)\frac{\Big[(P_{00}+t) + \dfrac{(P_{00}+t)^4}{P_0^3}\Big]^2}{\sigma_u^2}\right\} \qquad (3.7)$$

Nhận xét:

a) Nếu vật thể đàn hồi tức là $\varphi_t = 1$, $\varphi_N = 1$ ta có phương trình xác định lực tới hạn cho bản đàn hồi (theo Euler) [3].

b) Nếu quá trình đặt tải là đơn giản, khi đó

$$\varphi_N = \frac{1}{3G}\cdot\frac{\sigma_u}{\varepsilon_u}\;; \quad \varphi_t = \frac{\phi'(\varepsilon_u)}{3G}$$

ta có phương trình xác định lực tới hạn khi sử dụng lý thuyết đàn dẻo nhỏ [3].

Như vậy dựa vào các hệ thức (3.1), (3.7) ta có thể xác định tham số tải tới hạn t^*. Các lực tới hạn P_*, q_* xác định như sau $P_* = P(t_*)$; $q_* = q(t_*)$.

KẾT QUẢ TÍNH TOÁN BẰNG SỐ

Tính lực tới hạn cho bản vuông bằng thép 30ХГСА, với giới hạn chảy $\sigma_s = 4000kg/cm^2$, $3G = 2,6.10^6kg/cm^2$; $P_{00} = 2830kg/cm^2$; $P_0 = 4500kg/cm^2$. Tỷ số a/h lấy các giá trị là 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, 49.

Các kết quả các lực tới hạn cho bởi bảng I, II, III

Nhận xét:

a) Giá trị lực tới hạn tính theo Euler (đàn hồi) (bảng III) luôn luôn lớn hơn lực tới hạn tính theo các lý thuyết dẻo phức tạp và đơn giản, hơn nữa khi vật thể chịu tải phức tạp giá trị của lực tới hạn nhỏ hơn so với lực tới hạn khi đặt tải dơn giản (xem bảng I và II). Điều này phù hợp với tính chất cơ lý của vật liệu. Trên đồ thị liên hệ giữa σ_u^* với a/h, ta thấy đồ thị của đặt tải đơn giản nằm giữa đồ thị của đàn hồi và đặt tải phức tạp (Hình 1).

b) Qua ví dụ này cho thấy khi bản mỏng có tỷ số $\frac{a}{h} \geq 40$, tức là độ mềm $i = \frac{3a}{h} \geq 120$ tải tới hạn tính cho bản đàn hồi, và bản đàn dẻo (kể cả phức tạp và đơn giản) trùng nhau. Do vậy khi bản có độ mềm lớn sử dụng công thức Euler là hợp lý. Trong trường hợp này bản mất ổn định ngay trong giai đoạn đàn hồi.

c) Ví dụ cho thấy sự cần thiết phải tính lực tới hạn theo lý thuyết quá trình đàn dẻo đối với các bản dày hơn $\left(\frac{a}{h} < 40\right)$

Bảng I. Bản đàn - dẻo chịu quá trình đặt tải phức tạp

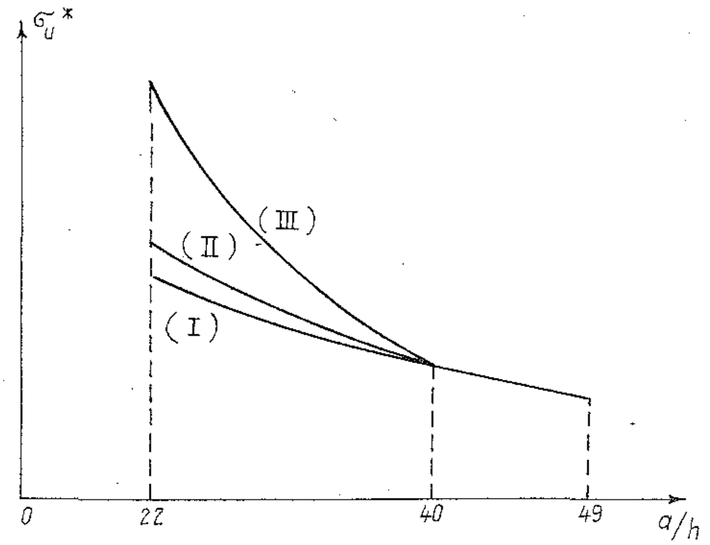
a/h	t^*	$S.10^3$	P_*	q_*	σ_{u_*}
22	1630	1,9516	4450	4310	4383,0
25	1570	1,7503	4400	4100	4256,0
28	1550	1,7086	4380	4040	4223,1
31	1510	1,6236	4340	3880	4125,5
34	1480	1,5814	4310	3770	4065,7
37	1440	1,5388	4270	3660	4000,3
40	1240	1,4084	4070	3020	3661,9
43	984	1,2806	3810	2320	3329,6
46	744	1,1903	3570	1790	3095,2
49	518	1,1209	3350	1380	2914,4

Bảng II. Bản đàn - dẻo chịu quá trình đặt tải đơn giản

a/h	t^*	$S.10^3$	P_*	q_*	σ_{u_*}
22	1700	1,9507	4530	4390	4461,5
25	1640	1,7502	4470	4170	4328,2
28	1620	1,7025	4450	4100	4285,7
31	1560	1,6233	4390	3920	4175,9
34	1510	1,5809	4340	3800	4095,4
37	1440	1,5386	4270	3660	4000,3
40	1240	1,4084	4070	3020	3661,9
43	984	1,2806	3810	2320	3329,6
46	744	1,1905	3570	1790	3095,2
49	518	1,1209	3350	1380	2914,4

Bảng III. Bản đàn hồi bị nén đồng thời hai phía

a/h	t^*	$S.10^3$	P_*	q_*	σ_{u_*}
22	3460	5,7838	6290	17200	15038,0
25	2960	4,1221	5790	12400	10718,0
28	2540	3,0500	5370	9110	7930,1
31	2160	2,3511	4990	6820	6113,0
34	1830	1,8957	4660	5160	4928,7
37	1520	1,6004	4350	3940	4160,9
40	1240	1,4084	4070	3020	3661,9
43	984	1,2806	3810	2320	3329,6
46	744	1,1905	3570	1790	3095,2
49	518	1,1209	3350	1380	2914,4



Hình 1

Đường I. Đàn - dẻo phức tạp, Đường II. Đàn - dẻo đơn giản, Đường III. Đàn hồi

KẾT LUẬN

Phương pháp giải bài toán trên đây cho ta khảo sát định tính và định lượng về sự ổn định của bản khi chịu quá trình đặt tải phức tạp. Các kết quả nhận được có ý nghĩa lý thuyết và thực tế.

Tác giả chân thành cảm ơn giáo sư tiến sĩ Đào Huy Bích đã hướng dẫn công trình này.

Công trình này được hoàn thành với sự tài trợ của Chương trình Nghiên cứu cơ bản trong lĩnh vực Khoa học tự nhiên

Địa chỉ:
Đại học Tổng hợp HN

Nhận ngày 5/3/1993

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Dao Huy Bich. Influence of complex loading on the Stability outside elastic limit of thin plates. Journal of Mechanis. v. 11, No 3, 1989.
2. Đào Huy Bích. Bài toán ổn định ngoài giới hạn đàn hồi của bản và vỏ mỏng theo lý thuyết quá trình biến dạng đàn - dẻo. Tạp chí Cơ học, số 2, 1986.
3. Volmir A. S. Stability of deformable systems. Edition of Science, Moscow, 1967 (in Russian).
4. Đào Văn Dũng. Về sự ổn định của bản mỏng trong lý thuyết quá trình biến dạng đàn - dẻo. Tạp chí Cơ học, số 2, 1987.

SUMMARY

ON THE STABILITY OF THIN PLATES SUBJECTED TO BIAXIAL COMPRESSIONS OF COMPLEX LOADING

In this paper, the method for calculating an expression of critical forces in general case has been presented. As for its application, using computer programming in Pascal we've found the value of critical forces. The influence of complex loading on the stability of plates has been studied.