

DAO ĐỘNG NGẪU NHIÊN PHI TUYẾN CỦA TOA XE

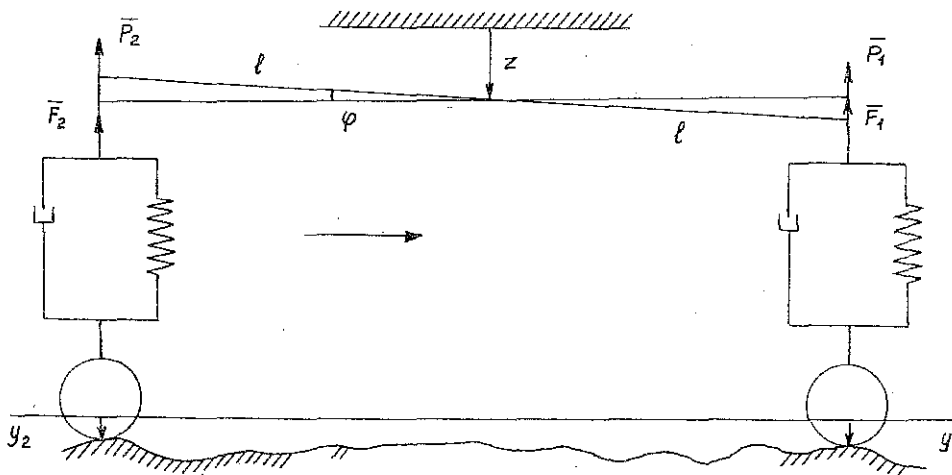
KIỀU THỂ ĐỨC

1. MỞ ĐẦU

Từ trước đến nay, việc nghiên cứu động lực học toa xe chỉ dựa trên các giả thiết là kích động mặt đường lên toa xe là hình sin và các thông số của toa xe là tuyến tính. Gần đây bài toán dao động ngẫu nhiên của toa xe được giải bằng phương pháp phổ nhưng cũng với giả thiết các thông số của toa xe là tuyến tính [1] thí dụ như lò xo đàn hồi tuyến tính hay lực cản nhớt tuyến tính. Tuy nhiên do sự phát triển của các vật liệu mới, người ta đưa vào sử dụng những loại thiết bị hiện đại hơn như lò xo cao su có đặc trưng phi tuyến hay lực cản nhớt phi tuyến trong các hệ giảm chấn. Vì vậy nảy sinh nhu cầu cần phải xét trực tiếp tác dụng của kích động ngẫu nhiên lên các mô hình có chứa những yếu tố phi tuyến. Bài báo này nhằm mục đích xét trường hợp toa xe hai bậc tự do có lò xo phi tuyến và cản nhớt phi tuyến.

2. DAO ĐỘNG CỦA TOA XE CÓ LÒ XO PHI TUYẾN

Xét mô hình toa xe dạng đơn giản là có hai bậc tự do. Trong thực tế, mô hình này có thể áp dụng cho một giá chuyển hướng. Hai tham số xác định vị trí là tọa độ z của trọng tâm toa xe và góc φ là góc quay "gật gù" của thân toa xe (hình 1).



Hình 1

Lực đàn hồi phi tuyến P_1, P_2 được tính theo công thức

$$\begin{aligned} P_1 &= c(z + \ell\varphi - y_1) + \varepsilon\gamma(z + \ell\varphi - y_1)^3, \\ P_2 &= c(z - \ell\varphi - y_2) + \varepsilon\gamma(z - \ell\varphi - y_2)^3. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Các chỉ số 1 và 2 là chỉ cặp bánh trước và cặp bánh sau của toa xe, c là hệ số cứng tuyến tính, ε - tham số bé, γ - hệ số phi tuyến.

Các lực cản nhớt tương ứng được tính theo công thức

$$\begin{aligned} F_1^* &= \varepsilon P(\dot{z} - \ell\dot{\varphi} - \dot{y}_1), \\ F_2^* &= \varepsilon P(\dot{z} - \ell\dot{\varphi} - \dot{y}_2). \end{aligned} \quad (2.2)$$

P là hệ số cản nhớt tuyến tính.

Trong các công thức trên y_1 và y_2 là các độ dời của bánh trước và bánh sau so với đường chuẩn O . Chúng được xem như các kích động lên toa xe.

$$\begin{aligned} y_1 &= H \sin \omega t + \sqrt{\varepsilon} u(t), \\ y_2 &= H \sin \omega(t + T) + \sqrt{\varepsilon} u(t + T), \end{aligned} \quad (2.3)$$

với $T = \frac{2\ell}{v}$, 2ℓ là khoảng cách giữa hai bánh, v là vận tốc của toa xe. Đại lượng $\sqrt{\varepsilon} u(t)$ là thành phần kích động ngẫu nhiên và thường bị bỏ qua trong các tính toán cổ điển. Theo [2] thì $u(t)$ là quá trình ngẫu nhiên có mật độ phổ $S_u(\omega)$ là:

$$S_u(\Omega) = \frac{\alpha}{\pi(\Omega^2 + \alpha^2)}, \quad (2.4)$$

ở đây α là hằng số. Ta biết rằng khi đó $u(t)$ có thể xem như là đầu ra của một bộ lọc mà đầu vào là quá trình "ồn trắng" ξ

$$L[u] = \dot{u} + \alpha u = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \dot{\xi}. \quad (2.5)$$

Quá trình "ồn trắng" ξ có $S_\xi = 1$.

Dựa vào nguyên lý D'alambert, ta có thể lập được phương trình chuyển động của toa xe là

$$\begin{aligned} m\ddot{z} &= -F_1^* - P_1 - F_2^* - P_2, \\ J\ddot{\varphi} &= -\ell(F_1^* + P_1) + \ell(F_2^* + P_2), \end{aligned} \quad (2.6)$$

trong đó m là khối lượng toa xe, J là mô men quán tính của nó đối với khối tâm C .

Thay các biểu thức của F_i^* và P_i từ (2.1), (2.2) vào phương trình chuyển động (2.6) ta có:

$$\begin{aligned} \ddot{z} + \nu_1^2 z &= \frac{c}{m}(y_1 + y_2) + \varepsilon F_1, \\ \ddot{\varphi} + \nu_2^2 \varphi &= \frac{c\ell}{J}(y_1 - y_2) + \varepsilon F_2, \end{aligned} \quad (2.7)$$

trong đó $\nu_1^2 = \frac{2c}{m}$, $\nu_2^2 = \frac{2c\ell^2}{J}$ các hàm F_1, F_2 có biểu thức là:

$$\begin{aligned} F_1 &= -\frac{1}{m} [P(2\dot{z} - \dot{y}_1 - \dot{y}_2) + \gamma(z + \ell\varphi - y_1)^3 + \gamma(z - \ell\varphi - y_2)^3], \\ F_2 &= \frac{\ell}{J} [P(-2\ell\dot{\varphi} + \dot{y}_1 - \dot{y}_2) + \gamma(z - \ell\varphi - y_2)^3 - \gamma(z + \ell\varphi - y_1)^3]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Thay thế biểu thức của y_1 và y_2 (2.3) vào (2.7) ta có

$$\begin{aligned}\bar{z} + \nu_1^2 z &= \frac{cH}{m} [\sin \omega t + \sin \omega(t+T)] + \frac{c\sqrt{\varepsilon}}{m} [u(t) + u(t+T)] + \varepsilon F_1, \\ \bar{\varphi} + \nu_2^2 \varphi &= \frac{c\ell H}{J} [\sin \omega t - \sin \omega(t+T)] + \frac{c\ell\sqrt{\varepsilon}}{J} [u(t) + u(t+T)] + \varepsilon F_2.\end{aligned}\quad (2.9)$$

Dùng phép thay biến:

$$\begin{aligned}z &= z_1 + A [\sin \omega t + \sin \omega(t+T)], \\ \varphi &= \varphi_1 + B [\sin \omega t - \sin \omega(t+T)],\end{aligned}\quad (2.10)$$

với

$$A = \frac{cH}{m(\nu_1^2 - \omega^2)}, \quad B = \frac{cH\ell}{J(\nu_2^2 - \omega^2)}.\quad (2.11)$$

Phương trình (2.8) với các ẩn z_1 và φ_1 sẽ là:

$$\begin{aligned}\bar{z}_1 + \nu_1^2 z_1 &= \varepsilon F_1 + \sqrt{\varepsilon} \frac{c}{m} [u(t) + u(t+T)], \\ \bar{\varphi}_1 + \nu_2^2 \varphi_1 &= \varepsilon F_2 + \sqrt{\varepsilon} \frac{c\ell}{J} [u(t) + u(t+T)].\end{aligned}\quad (2.12)$$

Tác dụng toán tử lọc (2.5) vào hai vế của hệ (2.12) ta có

$$\begin{aligned}\bar{z}_1 + \alpha \bar{z}_1 + \nu_1^2 \dot{z}_1 + \alpha \nu_1^2 z_1 &= \varepsilon L[F_1] + \sqrt{\varepsilon} \sigma_1 (\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2), \\ \bar{\varphi}_1 + \alpha \bar{\varphi}_1 + \nu_2^2 \dot{\varphi}_1 + \alpha \nu_2^2 \varphi_1 &= \varepsilon L[F_2] + \sqrt{\varepsilon} \sigma_2 (\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2).\end{aligned}\quad (2.13)$$

Ở đây ký hiệu

$$\sigma_1 = \frac{c}{m} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}, \quad \sigma_2 = \frac{c\ell}{J} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}, \quad \dot{\xi}_1 = \dot{\xi}(t), \quad \dot{\xi}_2 = \dot{\xi}(t+T).$$

Hệ (2.13) có dạng hai phương trình bậc ba. Vì vậy ta sẽ sử dụng phương pháp biến đổi tương tự như ở trong [3]:

Dùng phép đổi biến:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \dot{z}_1 \\ \ddot{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ -\nu_1^2 & 0 & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \dot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ -\nu_2^2 & 0 & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\quad (2.14)$$

Ta đưa hệ (2.13) về hệ:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\nu_1^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \frac{\varepsilon L[F_1]}{\nu_1^2 + \alpha^2} \begin{bmatrix} -1 \\ \alpha \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{\varepsilon} \sigma_1 (\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2)}{\nu_1^2 + \alpha^2} \begin{bmatrix} -1 \\ \alpha \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\nu_2^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \frac{\varepsilon L[F_2]}{\nu_2^2 + \alpha^2} \begin{bmatrix} -1 \\ \alpha \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{\varepsilon} \sigma_2 (\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2)}{\nu_2^2 + \alpha^2} \begin{bmatrix} -1 \\ \alpha \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (2.15)$$

Tương tự trong [3], ta bỏ qua các ẩn u_3 và v_3 vì chúng dần đến 0 khi $t \rightarrow \infty$. Tiếp tục dùng phép thay biến:

$$u_1 = a_1 \cos \psi_1, \quad v_1 = a_2 \cos \psi_2, \quad u_2 = -a_1 \nu_1 \sin \psi_1, \quad v_2 = -a_2 \nu_2 \sin \psi_2,\quad (2.16)$$

với $\psi_1 = \nu_1 t + \theta_1$, $\psi_2 = \nu_2 t + \theta_2$

Ta đưa hệ (2.15) về hệ phương trình vi phân Itô.

$$\begin{aligned} da_1 &= \alpha_1 dt + \beta_{11} d\xi_1 + \beta_{12} d\xi_2, & da_2 &= \alpha_3 dt + \beta_{31} d\xi_1 + \beta_{32} d\xi_2, \\ d\theta_1 &= \alpha_2 dt + \beta_{21} d\xi_1 + \beta_{22} d\xi_2, & d\theta_2 &= \alpha_4 dt + \beta_{41} d\xi_1 + \beta_{42} d\xi_2, \end{aligned} \quad (2.17)$$

trong đó biểu thức của các hệ số β_{ij} là:

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= \beta_{12} = -\frac{\sqrt{\varepsilon} H_1 (\nu_1 \cos \psi_1 + \alpha \sin \psi_1)}{\nu_1}, \\ \beta_{21} &= \beta_{22} = -\frac{\sqrt{\varepsilon} H_1 (\alpha \cos \psi_1 - \nu_1 \sin \psi_1)}{a_1 \nu_1}, \\ \beta_{31} &= -\beta_{32} = -\frac{\sqrt{\varepsilon} H_2 (\nu_2 \cos \psi_2 + \alpha \sin \psi_2)}{\nu_2}, \\ \beta_{41} &= -\beta_{42} = -\frac{\sqrt{\varepsilon} H_2 (\alpha \cos \psi_2 - \nu_2 \sin \psi_2)}{a_2 \nu_2}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Các hằng số H_1 và H_2 sẽ bằng:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{\sigma_1}{\nu_1^2 + \alpha^2} = \frac{c}{m(\nu_1^2 + \alpha^2)} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}, \\ H_2 &= \frac{\sigma_2}{\nu_2^2 + \alpha^2} = \frac{c\ell}{J(\nu_2^2 + \alpha^2)} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}. \end{aligned}$$

Còn các hệ số α_i được tính qua β_{ij}

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\varepsilon \frac{(\alpha \sin \psi_1 + \nu_1 \cos \psi_1) L[F_1]}{\nu_1 (\nu_1^2 + \alpha^2)} + a_1 \beta_{21}^2, \\ \alpha_2 &= -\varepsilon \frac{(\alpha \cos \psi_1 - \nu_1 \sin \psi_1) L[F_1]}{a_1 \nu_1 (\nu_1^2 + \alpha^2)} - \frac{2}{a_1} \beta_{11} \beta_{12}, \\ \alpha_3 &= -\varepsilon \frac{(\alpha \sin \psi_2 + \nu_2 \cos \psi_2) L[F_2]}{\nu_2 (\nu_2^2 + \alpha^2)} + a_2 \beta_{41}^2, \\ \alpha_4 &= -\varepsilon \frac{(\alpha \cos \psi_2 - \nu_2 \sin \psi_2) L[F_2]}{a_2 \nu_2 (\nu_2^2 + \alpha^2)} - \frac{2}{a_2} \beta_{31} \beta_{41}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Các hệ số của phương trình FPK được tính bằng cách lấy trung bình các biểu thức α_i và β_{ij}

$$\tilde{K}_i = M_t[\alpha_i], \quad \tilde{K}_{ij} = M_t[\beta_{i1} \beta_{j1} + \beta_{i2} \beta_{j2}]. \quad (2.20)$$

$i, j = 1, 2, 3, 4.$

Trước tiên ta tính các hệ số \tilde{K}_{ij}

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{11} &= M_t[\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2] = 2M_t[\beta_{11}^2] = \varepsilon \frac{H_1^2 (\nu_1^2 + \alpha^2)}{\nu_1^2} = \varepsilon \frac{\sigma_1^2}{\nu_1^2 (\nu_1^2 + \alpha^2)}, \\ \tilde{K}_{22} &= \varepsilon \frac{\sigma_1^2}{a_1^2 \nu_1^2 (\nu_1^2 + \alpha^2)}, \quad \tilde{K}_{33} = \varepsilon \frac{\sigma_2^2}{\nu_2^2 (\nu_2^2 + \alpha^2)}, \quad \tilde{K}_{44} = \varepsilon \frac{\sigma_2^2}{a_2^2 \nu_2^2 (\nu_2^2 + \alpha^2)}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

$\tilde{K}_{ij} = 0$ với $i \neq j, \quad i, j = 1 \div 4.$

Để tính \tilde{K}_i ta chú ý trong phép thay biến (2.16) thì

$$\begin{aligned}
z_1 &\approx u_1 = a_1 \cos \psi_1, \\
\dot{z}_1 &\approx u_2 = -a_1 \nu_1 \sin \psi_1, \\
\varphi_1 &\approx v_1 = a_2 \cos \psi_2, \\
\dot{\varphi}_1 &\approx v_2 = -a_2 \nu_2 \sin \psi_2,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

với $\psi_1 = \nu_1 t + \theta_1$, $\psi_2 = \nu_2 t + \theta_2$

Từ đó suy ra biểu thức của K_1 , K_3 sau khi lấy trung bình là

$$\begin{aligned}
K_1 &= -\frac{a_1}{m(\nu_1^2 + \alpha^2)} \left[\frac{\gamma\alpha}{2} (a_2^2 \ell^2 + H^2) + P(\alpha^2 + \nu_1^2) \right] + \frac{K_{11}}{2a_1}, \\
K_2 &= -\frac{a_2 \ell^2}{J(\nu_2^2 + \alpha^2)} \left[\frac{\gamma\alpha}{2} (a_1^2 + H^2) + P(\alpha^2 + \nu_1^2) \right] + \frac{K_{33}}{2a_2}.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Phương trình FPK dừng cho hàm mật độ dừng W là:

$$\frac{\partial(K_1 W)}{\partial a_1} + \frac{\partial(K_3 W)}{\partial a_2} = \frac{1}{2} \left(K_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial a_1^2} + K_{33} \frac{\partial^2 W}{\partial a_2^2} \right) \tag{2.24}$$

Phương trình này sẽ giải được nếu hai phương trình sau thỏa mãn [4]

$$\frac{\partial(K_1 W)}{\partial a_1} = \frac{K_{11}}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial a_1^2}; \quad \frac{\partial(K_3 W)}{\partial a_2} = \frac{K_{33}}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial a_2^2} \tag{2.25}$$

Suy ra điều kiện để giải được (2.24) là:

$$\frac{\partial}{\partial a_2} \left(\frac{K_1}{K_{11}} \right) = \frac{\partial}{\partial a_1} \left(\frac{K_3}{K_{33}} \right) \quad \left(\text{vì cùng bằng } \frac{\partial^2(\ln W)}{\partial a_1 \partial a_2} \right) \tag{2.26}$$

Sau khi thay biểu thức (2.23) và (2.21) vào và tính toán ta thấy (2.26) trở thành:

$$\frac{1}{mK_{11}(\nu_1^2 + \alpha^2)} = \frac{1}{JK_{33}(\nu_2^2 + \alpha^2)} \tag{2.27}$$

Sau khi tính toán ta thấy mỗi vế bằng:

$$I = \frac{2\Pi}{c\alpha} \tag{2.28}$$

Do vậy phương trình (2.24) luôn giải được.

Dựa vào phương trình đầu của (2.25) ta tìm được

$$\ln W = -I a_1^2 \left[\frac{\gamma\alpha}{2} (a_2^2 \ell^2 + H^2) + P(\alpha^2 + \nu_1^2) \right] + \ln a_1 + \varphi(a_2) \tag{2.29}$$

Đạo hàm theo a_2 ta được

$$\frac{\partial \ln W}{\partial a_2} = -I a_1 a_2 \gamma \alpha \ell^2 + \varphi'(a_2)$$

Theo phương trình thứ hai của (2.25) thì đại lượng trên cũng bằng: $\frac{2K_3}{K_{33}}$

Do đó

$$\varphi'(a_2) = \frac{2K_3}{K_{33}} + I \gamma \alpha \ell^2 a_1^2 a_2$$

Từ đó tính được

$$\varphi(a_2) = \frac{1}{a_2} - a_2 \ell^2 I [H^2 \gamma \alpha + 2P(\alpha^2 + \nu_2^2)]$$

Suy ra

$$\varphi(a_2) = \ln a_2 - \frac{a_2^2}{2} I \ell^2 [H^2 \alpha \gamma + 2P(\alpha^2 + \nu_2^2)] \quad (2.30)$$

Thay vào (2.29) rồi tính tiếp ta được:

$$W = C a_1 a_2 \exp [-I(A a_1^2 + B a_2^2 \ell^2 + D a_1^2 a_2^2)] \quad (2.31)$$

Ở đây ta dùng ký hiệu

$$A = \frac{H^2 \alpha \gamma}{2} + P(\alpha^2 + \nu_1^2), \quad B = \frac{H^2 \alpha \gamma}{2} + P(\alpha^2 + \nu_2^2), \quad D = \frac{\alpha \gamma}{2}. \quad (2.32)$$

Hệ số C tìm từ điều kiện chuẩn của hàm mật độ W .

Bây giờ ta tìm các biên độ dừng a_{1d} và a_{2d} ứng với xác suất lớn nhất tức là điểm cực đại của hàm $W(a_1, a_2)$.

Ta biết rằng theo điều kiện cực trị của hàm hai biến thì a_{1d} và a_{2d} phải thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\begin{aligned} a') \quad & \frac{\partial W}{\partial a_1} = 0 \\ b') \quad & \frac{\partial W}{\partial a_2} = 0 \\ c') \quad & D' = \frac{\partial^2 W}{\partial a_1^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial a_2^2} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial a_1 \partial a_2} \right)^2 > 0 \\ d) \quad & \frac{\partial^2 W}{\partial a_1^2} < 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Từ (2.33) suy ra các điều kiện a'); b'); c') trở thành:

$$\begin{aligned} a) \quad & K_1 = 0 \\ b) \quad & K_3 = 0 \\ c) \quad & \Delta = \frac{\partial K_1}{\partial a_1} \cdot \frac{\partial K_3}{\partial a_2} - \frac{\partial K_1}{\partial a_2} \cdot \frac{\partial K_3}{\partial a_1} > 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

Từ a) và b) ta suy ra phương trình xác định a_{1d} và a_{2d} là:

$$\begin{aligned} a_{1d}^2 [D a_{2d}^2 \ell^2 + A] &= \frac{\alpha c}{4\pi} \\ a_{2d}^2 \ell^2 [D a_{1d}^2 + B] &= \frac{\alpha c}{4\pi}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

trong đó biểu thức của D, A, B lấy từ (2.32). Ta ký hiệu

$$E = \frac{\alpha c}{4\pi} \quad (2.36)$$

Khi đó biểu thức của a_{1d}^2 và a_{2d}^2 sẽ là:

$$\begin{aligned} a_{1d}^2 &= \frac{B}{2D} \left(\sqrt{1 + 4 \frac{ED}{AB}} - 1 \right) \\ a_{2d}^2 &= \frac{A}{2D \ell^2} \left(\sqrt{1 + 4 \frac{ED}{AB}} - 1 \right) \end{aligned} \quad (2.37)$$

Để xem các nghiệm này có ổn định không, ta chứng minh các bất đẳng thức c) và d)

Thực vậy ta tính được ngay:

$$\Delta = K_{11}K_{33} \left[\frac{16\pi^2}{\alpha^2 c^2} (Da_2^2 \ell^2 + A)(Da_1^2 \ell^2 + B) - \frac{16\pi D a_1^2 a_2^2 \ell^2}{\alpha^2 c^2} \right] > 0$$

và

$$\frac{\partial^2 W}{\partial a_1^2} = 2W \left[-\frac{2\pi}{\alpha c} (Da_2^2 \ell^2 + A) - \frac{1}{a_1^2} \right] < 0$$

Vì ở đây các hệ số A , B , α và c đều dương.

Ta xét thêm một vài trường hợp riêng. Xét hai phương trình (2-35), khi $\alpha = 0$ tức là bỏ qua yếu tố ngẫu nhiên khi mô hình hóa bài toán. Khi đó theo biểu thức (2.32) ta thấy $D = 0$ do đó tính được $a_{1d} = a_{2d} = 0$. Như vậy nếu chỉ xét bài toán trong phạm vi tiền định, ta sẽ không phát hiện được các dao động này.

Còn trong trường hợp $\gamma = 0$ tức là không có sự tham gia của yếu tố phi tuyến thì $D = 0$ và ta tính được:

$$\begin{aligned} a_{1d} &= \frac{\alpha c}{4\pi P(\alpha^2 + \nu_1^2)} \\ a_{2d} &= \frac{\alpha c}{4\pi P(\alpha^2 + \nu_2^2)\ell^2} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Các biên độ dao động này tỷ lệ nghịch với hệ số cản nhớt tuyến tính P .

3. DAO ĐỘNG CỦA TOA XE CÓ LỰC CẢN NHỚT PHI TUYẾN

Ta cũng xét bài toán trên nhưng bây giờ lò xo là tuyến tính:

$$\begin{aligned} P_1 &= c(z + \ell\dot{\varphi} - \dot{y}_1), \\ P_2 &= c(z - \ell\dot{\varphi} - \dot{y}_2). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Còn lực cản nhớt phụ thuộc vào vận tốc theo công thức:

$$\begin{aligned} F_1^* &= \varepsilon [P(\dot{z} + \ell\dot{\varphi} - \dot{y}_1) + \beta(\dot{z} + \ell\dot{\varphi} - \dot{y}_1)^3], \\ F_2^* &= \varepsilon [P(\dot{z} - \ell\dot{\varphi} - \dot{y}_2) + \beta(\dot{z} - \ell\dot{\varphi} - \dot{y}_2)^3]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Tính toán hoàn toàn tương tự như trong §2, ta có các kết quả sau:

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{\sigma_1^2}{\nu_1^2(\nu_1^2 + \alpha^2)}, \quad K_{22} = \frac{\sigma_1^2}{a_1^2 \nu_1^2(\nu_1^2 + \alpha^2)}, \quad K_{33} = \sigma_2^2(\nu_2^2 + \alpha^2), \\ K_{44} &= \frac{\sigma_2^2}{a_2^2 \nu_2^2(\nu_2^2 + \alpha^2)}, \quad \text{với } \sigma_1^2 = \frac{c^2 \alpha}{m^2 \pi}, \quad \sigma_2^2 = \frac{c^2 \ell^2 \alpha}{J^2 \pi}. \\ K_1 &= -\frac{a_1}{m} \left[\frac{3\beta}{2} \left(\frac{a_1^2 \nu_1^2}{2} + \ell^2 \nu_2^2 a_2^2 \right) + \left(P + \frac{3\beta H^2}{2} \right) \right] + \frac{K_{11}}{2a_1}, \\ K_3 &= -\frac{\ell^2 a_2}{J} \left[\frac{3\beta}{2} \left(a_1^2 \nu_1^2 + \frac{a_2^2 \nu_2^2 \ell^2}{2} \right) + \left(P + \frac{3\beta H^2}{2} \right) \right] + \frac{K_{33}}{2a_2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Cũng như ở [4] điều kiện giải đúng phương trình FPK là:

$$\frac{\partial}{\partial a_2} \left(\frac{K_1}{K_{11}} \right) = \frac{\partial}{\partial a_1} \left(\frac{K_3}{K_{33}} \right) \quad (3.4)$$

Sau khi thay biểu thức (3.3) vào (3.4) rồi tính toán ta có:

$$J = m\ell^2 \quad (3.5)$$

Điều kiện giải được (3.5) dẫn đến

$$\nu_1^2 = \nu_2^2 = \nu^2 \quad (3.6)$$

Sau khi tính toán tương tự §2 ta đến kết quả sau:

$$W = C a_1 a_2 \exp \left\{ -I \left[\frac{3\beta}{8} (a_1^4 + \ell^4 a_2^4) + \frac{3\beta}{2} a_1^2 a_2^2 \ell^2 + \frac{D}{\nu^2} (a_1^2 + a_2^2) \right] \right\} \quad (3.7)$$

Ở đây ta dùng ký hiệu:

$$I = \frac{\nu^2}{mK_{11}} = \frac{\nu^2}{JK_{33}}; \quad D = P + \frac{3\beta H^2}{2} \quad (3.8)$$

C là hằng số được xác định vì điều kiện chuẩn.

Cũng như §2. Các biên độ dùng a_{1d} và a_{2d} xảy ra với xác suất lớn nhất được xác định từ 4 điều kiện:

$$\begin{aligned} a) \quad & K_1(a_{1d}, a_{2d}) = 0 \\ b) \quad & K_3(a_{1d}, a_{2d}) = 0 \\ c) \quad & \Delta = \frac{\partial K_1}{\partial a_1} \cdot \frac{\partial K_3}{\partial a_2} - \frac{\partial K_1}{\partial a_2} \cdot \frac{\partial K_3}{\partial a_1} > 0 \\ d) \quad & \frac{\partial^2 W}{\partial a_1^2} = \frac{2W}{K_{11}} \cdot \frac{\partial K_1}{\partial a_1} < 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Hai phương trình đầu của (3.9) sẽ viết dưới dạng chi tiết là:

$$\begin{aligned} \nu^2 a_1^2 \left[\frac{3\beta}{2} \left(\frac{a_1^2 \nu^2}{2} + \ell^2 \nu^2 a_2^2 \right) + D \right] &= I_0^3, \\ \nu^2 \ell^2 a_2^2 \left[\frac{3\beta}{2} \left(a_1^2 \nu^2 + \frac{a_2^2 \nu^2 \ell^2}{2} \right) + D \right] &= I_0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

với ký hiệu

$$I_0 = \frac{\nu^2 m K_{11}}{2} = \frac{\nu^2 J K_{33}}{2} \quad (3.11)$$

Điều kiện $mK_{11} = JK_{33}$ được suy từ (3.5)

Hệ phương trình (3.10) cho ta nghiệm dương là:

$$\nu^2 a_{1d}^2 = \ell^2 \nu^2 a_{2d}^2 = \sqrt{\frac{4D^2}{(9\beta)^2} + \frac{4I_0^2}{9\beta}} - \frac{2D}{9\beta} \quad (3.12)$$

Để xét các điều kiện c) và d) ở (3.9) ta tính Δ và W''_{a_1} . Sau vài tính toán ta có:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\ell^2}{mJ} (6\beta \nu^2 a_1^2 + D)^2 - \frac{9\beta^2}{mJ} \ell^2 \nu^4 a_1^4, \\ W''_{a_1} &= \frac{2W}{K_M} \left[-\frac{1}{m} (6\beta \nu^2 a_1^2 + D) \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Rõ ràng các điều kiện $\Delta > 0$ và $W''_{a_1} < 0$ thỏa mãn. Như vậy các biên độ a_{1d} , a_{2d} là điểm cực đại của hàm mật độ $W(a_1, a_2)$ ứng với các biên độ xảy ra với xác suất lớn nhất.

Khi $\alpha = 0$ tức là không có kích động ngẫu nhiên thì $K_{11} = K_{33} = 0$ do biểu thức (3.3). Khi đó ta tính được $a_{1d} = a_{2d} = 0$ tức là những dao động này không có trong trường hợp tiền định. Khi $\beta = 0$ ta tính được từ (3.10) biểu thức của a_{1d} và a_{2d} là:

$$a_{1d}^2 = \frac{c\alpha}{4\pi P(\nu^2 + \alpha^2)}, \quad a_{2d}^2 = \frac{\alpha c}{4\pi \ell^2(\nu^2 + \alpha^2)}. \quad (3.14)$$

Tức là trùng với (2.38). Các biên độ này cũng tỷ lệ nghịch với hệ số cản tuyến tính.

4. KẾT LUẬN

1 - Bằng phương pháp trung bình kết hợp với phương trình FPK, ta đã tìm được hàm mật độ và biên độ dừng có xác suất lớn nhất của toa xe trong cả hai trường hợp lò xo phi tuyến và cản nhớt phi tuyến.

2 - Các dao động nói trên không có trong trường hợp tiền định. Biểu thức giải tích của các biên độ dừng cho thấy mối liên quan giữa chúng và các thông số cấu tạo toa xe.

Công trình này được hoàn thành với sự tài trợ của Chương trình Nghiên cứu cơ bản trong lĩnh vực Khoa học tự nhiên

Địa chỉ:

Trường Đại học Giao thông

Nhận ngày 10/11/1992

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyen Huy Kim. Vertikale Schwingungen der Schienenfahrzeuge lev stochastischer Erregung von Gleisunelthenheiten. DET - Die Eisenbahntechn. Berlin 26, 2, 1978.
2. Lvov A. A., Kogan A. L. Einige charakteristika geometrischer (Vertikaler) Unebenheiten der Gleise (Rusé) Vestnik NIIT Moskva 30, 3, 1971.
3. Нгуен Донг Анъ, Къеу Те Дык. Случайные колебания в системах третьего порядка. Укр. Мат. Журн. Т. 32, No 5, 1980.
4. Nguyễn Đông Anh, Kiều Thế Đức. Bộ tắt chấn chịu kích động ngẫu nhiên. Tạp chí Cơ học số 3, 1990.

SUMMARY

RANDOM NONLINEAR VIBRATION OF WAGON

In this paper, the random nonlinear vibration of wagon in the model of two degrees of freedom is examined. Two kinds of nonlinear wagon have been considered : wagon with nonlinear spring and wagon with nonlinear damping force.

The results are obtained by averaging method and FPK equations one.