Tạp chí CƠ HỌC, tập XV, 1993, số 1 (5 - 9)

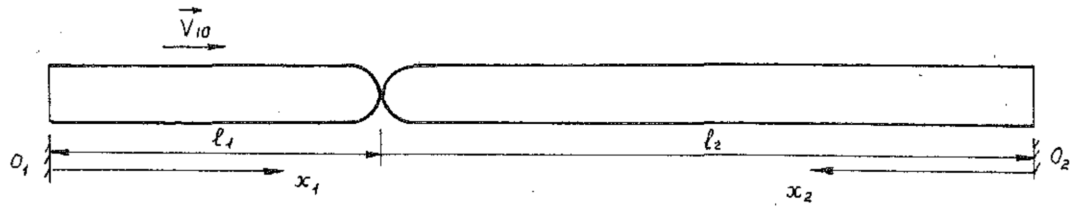
# VA CHẠM CỦA HAI THANH ĐẦU HÌNH CẦU

$(0 < t < 2\ell_2/a_2)$

NGUYỄN THÚC AN, NGUYỄN ĐĂNG TỘ
NGUYỄN HÙNG SƠN

Trên cơ sở lý thuyết sóng một chiều với nghiệm của ĐALAMBE một số tác giả đã nghiên cứu bài toán về sự va chạm của hai thanh đầu phẳng [1], [2].

Trong bài báo này các tác giả sẽ giải bài toán về va chạm dọc của hai thanh đàn hồi tự do với đầu hình cầu. Sơ đồ bài toán chỉ dẫn trên hình vẽ:




## 1. THIẾT LẬP BÀI TOÁN

Giả sử thanh 1 chuyển động tịnh tiến với vận tốc $V_{10}$ và va chạm vào thanh 2 đứng yên, kích thước và vật liệu của hai thanh khác nhau với giả thiết $2\ell_1/a_1 < 2\ell_2/a_2$ và chọn hệ qui chiếu như hình vẽ, tại thời điểm va chạm thì hai đầu thanh va chạm có tọa độ $x_1 = \ell_1$, $x_2 = \ell_2$. Phương trình chuyển động của thanh là:

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = a_i^2 \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_i^2} \tag{1.1}$$

trong đó $i = 1, 2$ $a_i = \sqrt{E_i/\rho_i}$ - vận tốc truyền sóng trong thanh.

Điều kiện đầu của bài toán với $t = 0$ thì

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = V_{10}; \quad U_1 = 0; \quad \frac{\partial U_1}{\partial x_1} = 0 \tag{1.2a}$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} = 0; \quad U_2 = 0; \quad \frac{\partial U_2}{\partial x_2} = 0 \tag{1.2b}$$

Điều kiện biên của bài toán:

Tại hai đầu thanh không bị va chạm là tự do, ta có:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1}(t, 0) = 0; \quad \frac{\partial U_2}{\partial x_2}(t, 0) = 0 \tag{1.3a}$$

Tại đầu thanh va chạm với $x_1 = \ell_1$, $x_2 = \ell_2$ ta có:

$$E_1F_1\frac{\partial U_1}{\partial x_1} = E_2F_2\frac{\partial U_2}{\partial x_2} = -k(U_1+U_2)^n \tag{1.3b}$$

Vì lực tiếp xúc vị trí P phụ thuộc vào dịch chuyển tương đối $(U_1+U_2)>0$ theo lý thuyết biến dạng của HÉC $P=-k(U_1+U_2)^{3/2}$ với $n=3/2$.

Nghiệm tổng quát của (1.1) theo ĐALAMBE

$$U_i = \varphi_i(a_it - x_i) + \psi_i(a_it + x_i) \quad \text{với } i = 1,2 \tag{1.4}$$

## 2. XÁC ĐỊNH HÀM SÓNG TRONG CÁC THANH

Theo điều kiện đầu

$$\frac{\partial U_1}{\partial t}(0,x_1) = a_1\big[\varphi_1'(-x_1) + \psi_1'(x_1)\big] = V_{10}$$

Suy ra

$$\varphi_1'(-x_1) + \psi_1'(x_1) = \frac{V_{10}}{a_1}$$

Mặt khác

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1}(0,x_1) = -\varphi_1'(-x_1) + \psi_1'(x_1) = 0$$

Kết hợp với hệ thức trên ta có

$$\varphi_1'(-x_1) = \psi_1'(x_1) = \frac{V_{10}}{2a_1} \tag{2.1}$$

trong đó $0 < x_1 < \ell_1$.

Tương tự đối với thanh hai ta có

$$\varphi_2'(-x_2) = \psi_2'(x_2) = 0 \tag{2.2}$$

trong đó $0 < x_2 < \ell_2$.

Từ (2.1) và (2.2) kết hợp với điều kiện biên (1.3a) ta có

$$\begin{aligned} \varphi_1'(Z_1) &= \frac{V_{10}}{2a_1} \quad \text{với } -\ell_1 < Z_1 < \ell_1 \\ \varphi_2'(Z_2) &= 0, \qquad \text{với } -\ell_2 < Z_2 < \ell_2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

trong đó $Z_1 = x_1$, $Z_2 = x_2$.

Từ điều kiện biên (1.3b) ta có:

$$\alpha\big[-\varphi_1'(a_1t-\ell_1) + \psi_1'(a_1t+\ell_1)\big] = -\varphi_2'(a_2t-\ell_2) + \psi_2'(a_2t+\ell_2) \tag{a}$$

$$\begin{aligned} -\varphi_1'(a_1t-\ell_1) + \psi_1'(a_1t+\ell_1) = -\beta\big[&\varphi_1(a_1t-\ell_1) + \psi_1(a_1t+\ell_1) + \\ &+ \varphi_2(a_2t-\ell_2) + \psi_2(a_2t+\ell_2)\big]^{3/2} \end{aligned} \tag{b}$$

trong đó $\alpha = \dfrac{E_1F_1}{E_2F_2}$; $\beta = \dfrac{k}{E_1F_1}$.

Từ (b) ta có $\big[-\frac{1}{\beta}(-\varphi_1' + \psi_1')\big]^{2/3} = \varphi_1 + \psi_1 + \varphi_2 + \psi_2$

Vi phân đẳng thức này theo thời gian ta có:

$$\frac{2}{3}\Big[-\frac{1}{\beta}(-\varphi_1'+\psi_1')\Big]^{-1/3}(-\varphi_1''+\psi_1'')\big(-\frac{1}{\beta}\big)=(\varphi_1'+\psi_1')+\frac{a_2}{a_1}(\varphi_2'+\psi_2') \tag{2.4}$$

Từ (a) ta có

$$\psi_1'=\varphi_1'+\frac{1}{\alpha}(-\varphi_2'+\psi_2') \tag{2.5}$$

Đạo hàm (9) theo thời gian $t$ ta có:

$$\psi_1''=\varphi_1''+\frac{a_2}{\alpha a_1}(-\varphi_2''+\psi_2'')$$

Thay $\psi_1'$ và $\psi_1''$ vào (2.4) và rút gọn ta có

$$A\big(-\varphi_2'+\psi_2'\big)^{-1/3}\big(-\varphi_2''+\psi_2''\big)=2\varphi_1'+B\varphi_2'+C\psi_2' \tag{2.6}$$

trong đó

$$A=\frac{2}{3}\Big(-\frac{1}{\beta}\Big)^{2/3}\Big(\frac{1}{\alpha}\Big)^{2/3}\frac{a_2}{a_1}\ ;\quad B=\frac{a_2\alpha-a_1}{\alpha a_1}\ ;\quad C=\frac{\alpha a_2+a_1}{\alpha a_1}$$

Gọi $T_1=\dfrac{2\ell_1}{a_1}$; $T_2=\dfrac{2\ell_2}{a_2}$ là chu kỳ dao động của 2 thanh. Giả sử $T_2=iT_1+qT_1$ với $i\geq 1$, $0\leq q<1$. Ta xác định các hàm sóng: $\varphi_1'(a_1t-x_1)$; $\psi_1'(a_1t+x_1)$; $\varphi_2'(a_2t-x_2)$ và $\psi_2'(a_2t+x_2)$ trong khoảng thời gian $0<t<T_2$.

Xét ở chu kỳ đầu của $T_1$ với $0\leq t\leq 2\ell_1/a_1$, thì $\varphi_2'=0$, $\varphi_2''=0$, theo (2.3) ta có

$$(\varphi_1')_1=\frac{V_{10}}{2a_1} \tag{2.7}$$

Phương trình (2.6) có dạng

$$A\psi_2''=\frac{V_{10}}{a_1}\psi_2'^{\,1/3}+C\psi'^{4/3}$$

Ta ký hiệu $\dfrac{d\psi_2}{dz}=\psi_2'=y$ với $Z=a_2t+\ell_2$, phương trình trên được viết:

$$y'=\frac{1}{A}\Big(Cy+\frac{V_{10}}{a_1}\Big)y^{1/3} \tag{2.8}$$

Tích phân (2.8) ta có:

$$Z-Z_0=\frac{3}{C.C_1}\Big[\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{y^{2/3}-C_1y^{1/4}+C_1^3}{(y^{1/3}+C_1)^2}+\operatorname{arctg}\frac{2y^{1/3}-C_1}{\sqrt{3}C_1}-\operatorname{arctg}\Big(-\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)\Big] \tag{2.9}$$

trong đó $C_1^3=\dfrac{V_{10}}{Ca_1}$.

Theo (2.5) ta có

$$\big(\psi_1'\big)_1=\big(\varphi_1'\big)_1+\frac{1}{\alpha}\big(\psi_2'\big)_1=\frac{V_{10}}{2a_1}+\frac{1}{\alpha}y \tag{2.10}$$

Xét ở chu kỳ hai thanh 1 với $2\ell_1/a_1\leq t\leq 4\ell_1/a_1$.

Ta kí hiệu $\big(\psi_2'\big)_1=y_1$ và $\big(\psi_2'\big)_2=y_2$, các chỉ số ngoài móc đơn chỉ số thứ tự chu kỳ dao động thanh 1. Chu kỳ hai bắt đầu khi sóng $\big(\varphi_1'\big)_2$ xuất hiện tại vị trí va chạm: Theo (1.3a) ta có $\big(\varphi_1'\big)_2=\big(\psi_1'\big)_1$.

Ở chu kỳ hai dao động của thanh 1 thì $\varphi_2'(a_2t - \ell_2) = 0$ và $\varphi_2''(a_2t - \ell_2) = 0$. Từ (2.6) ta có

$$y_2' = \frac{1}{A} y_2^{1/3} \left[2\left(\varphi_1'\right)_2 + Cy_2\right] \tag{2.11}$$

Lý luận tương tự với chu kỳ i của dao động thanh 1 ta có:

$$y_i' = \frac{1}{A} y_i^{1/3} \left[2\left(\varphi_1'\right)_i + Cy_i\right] \tag{2.12}$$

trong đó $\left(\varphi_1'\right)_i = \left(\psi_1'\right)_{i-1}$ đã xác định.

Theo (1.3a) ta có $\left(\varphi_1'\right)_i = \left(\psi_1'\right)_{i-1}$, kết hợp với (2.5) ta có:

$$\left(\varphi_1'\right)_i = \left(\varphi_1'\right)_{i-1} + \frac{1}{\alpha} y_{i-1}$$

Ta có:

$$\left(\varphi_1'\right)_1 = \frac{V_{10}}{2a_1}$$

$$\left(\varphi_1'\right)_2 = \frac{V_{10}}{2a_1} + \frac{1}{\alpha} y_1$$

..................

$$\left(\varphi_1'\right)_i = \frac{V_{10}}{2a_1} + \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{i-1} y_n \tag{2.13}$$

Vậy (2.12) được viết

$$y_i' = \frac{1}{A} y_i^{1/3} \left[\frac{V_{10}}{a_1} + \frac{2}{\alpha} \sum_{n=1}^{i-1} y_n + Cy_i\right] \tag{2.14}$$

trong đó $y_n$ với $n = 1, 2, \ldots, (i-1)$ đã biết.

Phương trình (2.14) có thể giải bằng phương pháp sai phân hữu hạn.

Các giá trị $y_i$ ở đầu chu kỳ $i$ sẽ bằng giá trị của nó ở cuối chu kỳ $(i-1)$.

Từ (9) ta có

$$\left(\psi_1'\right)_i = \left(\varphi_1'\right)_i + \frac{1}{\alpha} y_i = \frac{V_{10}}{2a_1} + \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{i} y_n \tag{2.15}$$

Cuối cùng ta xét trong khoảng $iT_1 < t < T_2 = iT_1 + qT_1$.

Trong khoảng này $\varphi_2' = 0$, $\varphi_2'' = 0$.

Từ (2.6) ta vẫn có:

$$y' = \frac{1}{A} y^{1/3} \left[2\varphi_1' + Cy\right] \tag{a}$$

trong đó $y = \psi_2'$.

Từ (1.3a) ta có $\varphi_1'(a_1t) = \psi_1'(a_1t) \quad \forall t$.

$$\varphi_1' = \varphi_1'(a_1t - \ell_1) = \psi_1'(a_1t - \ell_1) = \psi_1'\Big|_{t'=t-T_1} \left(\psi_1'\right)_{1i}$$

Như vậy trong (a) $\varphi_1'$ là hàm đã biết.

Giải phương trình (a) ta tìm được $y = \psi_2'$, còn hàm $\psi_1'$ được xác định từ (2.5).

$$\psi_1' = \varphi_1' + \frac{1}{\alpha} y \tag{b}$$

Khi $t < \ell_2/a_2$ trong thanh 2 chưa xuất hiện sóng phản $\varphi_2'(a_2t - x_2)$, còn các sóng $\varphi_1'$, $\psi_2'$ và $\psi_1'$ được xác định từ (2.13), (2.14) và (2.15). Khi $\ell_2/a_2 < t < 2\ell_2/a_2$ thì $\varphi_2'(a_2t - \ell_2) = 0$, nhưng

$\varphi_2'(a_2t - x_2)$ đã xuất hiện ở thanh 2. Trong khoảng thời gian này ta luôn có $0 < a_2t - x_2 < 2\ell_2$. Khi $0 < a_2t - x_2 < \ell_2$ thì $\varphi_2'(a_2t - x_2) = 0$.

Để xác định $\varphi_2(a_2t - x_2)$ khi $\ell_2 < a_2t - x_2 < 2\ell_2$ ta tiến hành như sau:

Từ (1.3a) ta có $\varphi_2'(a_2t) = \psi_2'(a_2t)$ hay

$$\varphi_2'(a_2t - x_2) = \psi_2'(a_2t - x_2) \tag{2.16}$$

Trong các bước đã trình bày ở trên ta đã xác định được giá trị của hàm $\psi_2'(a_2t + \ell_2) = \{y_n\}$ với $n = \overline{1,i}$ trong toàn bộ khoảng thời gian $0 < t < iT_1$ hay trong khoảng thời gian $\ell_2 < a_2t + \ell_2 < iT_1a_2 + \ell_2$. Nếu đặt $a_2t + \ell_2 = z$ thì hàm $\psi_2'(z)$ đã được xác định trong khoảng $\ell_2 < z < iT_1a_2 + \ell_2$.

Theo trên $T_2 = iT_1 + qT_1$ suy ra:

$T_2 = iT_1 + qT_1 < 2iT_1$, do đó $ia_2T_1 > \ell_2$.

Suy ra: $iT_1a_2 + \ell_2 > 2\ell_2$.

Vậy khoảng $\ell_2 < z < iT_1a_2 + \ell_2$ luôn chứa khoảng $\ell_2 < a_2t - x_2 < 2\ell_2$.

Do vậy với $z$ ở trong khoảng $\ell_2 < z < 2\ell_2$ thì hàm $\psi_2'(z)$ hoàn toàn xác định.

Theo (2.16) thì $\varphi_2'(a_2t - x_2)$ được xác định.

Và lực nén va chạm $P$ sẽ là:

$$P = E_2F_2y_n \quad \text{khi} \quad (n-1)T_1 < t < nT_1 \tag{2.17}$$

## KẾT LUẬN

Bài toán va chạm dọc của hai thanh tự do đầu hình cầu đã được xét với thời gian trong khoảng $0 < t < 2\ell_2/a_2$.

Trong khoảng $0 < t < 2\ell_2/a_2$ dựa vào các công thức (2.13), (2.14) và (2.15) ta xác định được các sóng $\varphi_1'$, $\psi_2'$, $\psi_1'$ và $\varphi_2' = 0$.

Trong khoảng $\ell_2/a_2 < t < 2\ell_2/a_2$ dựa vào các công thức trên và (2.16) ta tìm được các hàm sóng $\varphi_1'$, $\psi_2'$, $\psi_1'$, $\varphi_2'$.

Từ đó ta xác định được các biến dạng, ứng suất, vận tốc tại mỗi tiết diện của thanh và lực nén va chạm $P$.

Công trình này được hoàn thành với sự tài trợ của Chương trình Nghiên cứu cơ bản trong lĩnh vực Khoa học tự nhiên

*Địa chỉ:*
*Đại học Thủy Lợi*

*Nhận ngày 2/11/1992*

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Кильчевский Н. А. Теория соударений твёрдых тел. Киев, 1969.
2. Nguyễn Thúc An, Vũ Văn Nguyện: Sự va chạm dọc của hai thanh đàn hồi. Tạp chí Cơ học số 1, 1983.

## SUMMARY

LONGITUDINAL SHOCK OF TWO ELASTIC BARS WITH ONE SPHERICAL END

In this paper, authors researched a problem about longitudinal shock of two free elastic bars with one spherical end in interval $0 < t < 2\ell_2/a_2$. Authors defined wave function in the bars, stress, strain and velocity of every section.

Also authors defined the force of compression caused by shock of two bars.