Tạp chí Cơ học Journal of Mechanics, NCNST of Vietnam T. XVI, 1994, No 4 (28 - 32)

BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH ĐỘ NHẠY CỦA CÁC THAM SỐ THIẾT KẾ VỚI PHIẾM HÀM ĐÁP ỨNG LÀ ĐỘ TIN CẬY

NGUYỄN VĂN PHÓ

1. MỞ ĐẦU

Bài toán xác định độ nhạy của các tham số thiết kế đã được nghiên cứu trong các công trình [1, 2, 3,...].

Trong các công trình trên, phiếm hàm đáp ứng được chọn là trọng lượng, giá thành, chuyển vị hay hàm ràng buộc ứng suất...

Đối với người thiết kế thì an toàn của công trình là vấn đề quan trọng. Người ta cần nghiên cứu sự biến thiên của chất lượng công trình khi các tham số thiết kế thay đổi riêng rẽ hay đồng thời.

Độ tin cậy là chỉ tiêu an toàn quan trọng nhất của công trình. Nếu ta chọn phiếm hàm đáp ứng của bài toán là độ tin cậy thì lời giải của bài toán độ nhạy sẽ giúp cho việc đánh giá chất lượng công trình và giá trị còn lại của công trình theo từng tham số thiết kế.

Trong bài này, tác giả nghiên cứu phương pháp xác định độ nhạy của các tham số thiết kế, trong đó phiếm hàm đáp ứng là độ tin cậy của công trình.

Nội dung bài báo gồm các phần chính:

- Phát biểu bài toán độ nhạy với phiếm hàm đáp ứng là độ tin cậy.
- Một số hệ thức cơ bản và nhận xét.
- Phương pháp giải bài toán.
- Thí dụ.

2. PHÁT BIỂU BÀI TOÁN

Xét một công trình, với các tham số thiết kế là vectơ $\vec{\omega} = \{\omega_i\}$, ở đây các tham số thiết kế được hiểu là diện tích tiết diện ngang, chiều dài, chiều rộng, hằng số vật liệu... của các yếu tố. Ngoài ra, tải trọng cũng được coi là tham số thiết kế.

Chẳng hạn, $\vec{P}$ là vectơ tải trọng ngoài thì ta đặt $\vec{P} = \mu\vec{P}_0$, $\vec{P}_0$ là vectơ xác định trước (tải trọng cơ sở), khi λ thay đổi thì $\vec{P}$ thay đổi theo hướng $\vec{P}_0$. Nếu $\vec{P}_0$ thay đổi tùy ý thì ta chọn $\vec{P} = \{\lambda_i P_i^{(0)}\}$, các λ_i thay đổi một cách độc lập, các $P_i^{(0)}$ xác định trước.

Các tham số thiết kế có thể là đại lượng tất định hay ngẫu nhiên, hàm tất định của thời gian hay quá trình ngẫu nhiên. Do đó, nói chung độ tin cậy là một hàm của thời gian.

Theo [4], trong trường hợp tổng quát độ tin cậy $P(t)$ được xác định như sau:

$$P(t) = \text{Prob}\left\{\begin{array}{l} L\vec{u} = \vec{q} \\ M\vec{u} = \vec{v} \\ \\ f(\vec{v}) \in \Omega_0 \\ \forall \vec{r} \in V, \quad \forall \tau \in [0,t] \end{array}\right\} \tag{2.1}$$

trong đó $\vec{v}$ là vectơ chất lượng, $\vec{u}$ là biến trạng thái, $\vec{q}$ là tải trọng ngoài, Ω_0 là miền kiểm tra chất lượng. Trong bài toán độ nhạy, tham số thiết kế không chỉ chứa trong $\vec{v}$ mà còn chứa trong L, $\vec{q}$, Ω_0.

Trong trường hợp riêng V. V. Bolotin [5] đã đưa ra biểu thức $P(t)$:

$$P(t) = \text{Prob}\ \{f(\vec{v}) \in \Omega_0, \quad \forall \vec{r} \in V, \quad \forall \tau \in [0,t]\} \tag{2.2}$$

về biểu thức cho trường hợp hệ phân bố tham số

$$P(t) = \text{Prob}\left\{\sup_{0 \le \tau \le t} \sup_{\vec{r} \in V} \vec{v}(\vec{r},\tau) < v^*\right\} \tag{2.3}$$

Bài toán độ nhạy của các tham số thiết kế với phiếm hàm đáp ứng là độ tin cậy là bài toán tìm gradient của $P(t)$ theo các tham số thiết kế ω_i. Tức tìm

$$\frac{\partial P(t)}{\partial \vec{\omega}} = \left\{\frac{\partial P}{\partial \omega_i}\right\} \tag{2.4}$$

Cần chú ý rằng $P(t)$ là đại lượng tất định, còn các tham số thiết kế có thể là ngẫu nhiên. Nếu các tham số thiết kế không ngẫu nhiên thì ta có bài toán độ nhạy tất định.

Nói chung giải bài toán độ nhạy được chia làm 2 giai đoạn là tính $P(t)$ và tìm gradient của $P(t)$.

3. MỘT SỐ HỆ THỨC CƠ BẢN VÀ NHẬN XÉT

Theo [4], giả sử tập hợp xác định sự an toàn của công trình là

$$\{\vec{\omega} \ : \ \xi_j(\vec{\omega}) < x_j, \quad j = \overline{1,m}\}; \quad \vec{x} = \{x_i\}$$

Độ tin cậy là xác suất đồng thời [6]

$$F_{\xi(x)} = \text{Prob}(\{\vec{\omega} \ : \ \xi_j(\vec{\omega}) < x_j, \quad j = \overline{1,n}\}) \tag{3.1}$$

trong đó x_j, $j = \overline{1,m}$ là các đại lượng tất định.

Hàm mật độ xác suất đồng thời

$$g_\xi(\vec{x}) = \frac{\partial^m F(x)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m} \tag{3.2}$$

Hàm phân phối xác suất đối với một biến x_k là

$$F_\xi(x_k) = F_\xi(\infty, \ldots, \infty, x_k, \ldots, \infty) \tag{3.3}$$

Gradient của F_ξ theo biến x_k là

$$\frac{\partial}{\partial x_k} F_\xi(\infty, \ldots, \infty, x_k, \infty, \ldots, \infty) = \frac{\partial F_\xi(x_k)}{\partial x_k} \tag{3.4}$$

Theo định nghĩa (3.2) thì trong xác suất (3.1) ta chỉ giữ lại một điều kiện $\xi_k(\omega) < x_k$, điều đó không thích hợp với bài toán thiết kế, vì người ta cần xét tốc độ biến thiên của độ tin cậy theo từng tham số thiết kế trong khi các tham số khác giữ nguyên giá trị.

Mặt khác, các tham số không chỉ chứa trong x_j. Do đó giải bài toán độ nhạy nói chung không thể đi theo con đường tìm xác suất đồng thời hay mật độ xác suất đồng thời và mật độ riêng cho từng tham số thiết kế [5].

Trường hợp riêng khi các tham số thiết kế là x_j hoặc x_j là hàm của các tham số thiết kế thì có thể giải bài toán độ nhạy bằng cách tìm mật độ xác suất.

4. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Trường hợp riêng, khi xác suất tin cậy chỉ phụ thuộc một điều kiện

$$F_\xi(x) = \text{Prob}\ (\{\vec{\omega}\ :\ \xi(\vec{\omega}) < x\})$$

$$g_\xi(x) = \frac{dF_\xi(x)}{dx}\ ,\quad F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} g_\xi(x)dx$$

Nếu $\xi(\vec{\omega})$ là đại lượng ngẫu nhiên chuẩn thì

$$P\ =\ \text{Prob}\ (\xi(\vec{\omega}) < x) = \Big[1 + \Phi\Big(\frac{x-a}{S}\Big)\Big] \tag{4.1}$$

trong đó a là kỳ vọng toán và S là độ lệch chuẩn của $\xi(\omega)$, Φ là hàm Laplace

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}dt$$

Vì vậy việc tính $\dfrac{\partial P}{\partial \vec{\omega}} = \Big\{\dfrac{\partial P}{\partial \omega_i}\Big\}$ có thể tiến hành dễ dàng

$$\frac{\partial P}{\partial \omega_i} = \frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial \omega_i} \quad \text{mà} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \omega_i} \quad \text{với} \quad t = \frac{x-a}{S}$$

Kỳ vọng $a = \varphi(\vec{\omega}_i)$, $\vec{\omega}_i$ là kỳ vọng của ω_i

$S = \text{const}$

mà $\dfrac{\partial t}{\partial \omega_i} = -\dfrac{1}{S}\dfrac{\partial a}{\partial \omega_i}$, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ Ta có

$$\frac{\partial P(\xi(\vec{\omega}) < x)}{\partial \omega_i} = -\frac{1}{S\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_i} \tag{4.2}$$

Các biến thiết kế chứa trong a, ta xét sự biến thiên ngẫu nhiên quanh giá trị trung bình.

Như ta đã biết, để ứng dụng trong công tác thiết kế, người ta tìm xác suất an toàn phụ thuộc vào giá trị của hệ số an toàn m.

Để đơn giản, ta xét cho trường hợp ứng suất một chiều, chẳng hạn chỉ ứng suất kéo σ, σ là một đại lượng ngẫu nhiên được gọi là ứng suất thực (σ_{th}), kỳ vọng của ứng suất thực là ứng suất tính toán σ_{tt}.

Nếu chọn điều kiện an toàn là $\sigma_{th} < \sigma_{tt}$ thì khi σ là đại lượng ngẫu nhiên chuẩn ta có

$$P(\sigma_{th} \le \sigma_{tt}) = 0,5$$

Để nâng cao độ an toàn, ta có thể chọn $\sigma_{tt} = \dfrac{\sigma_0}{m}$

Khi tính toán theo ứng suất cho phép ta có thể chọn σ_0 là giá trị trung bình thống kê giá trị bền của vật liệu, nó được xác định theo kết quả thực nghiệm.

Theo công thức

$$P(X \le \ell) = \frac{1}{2}\Big[1 + \Phi\Big(\frac{\ell - a}{S}\Big)\Big]$$

trong đó X là đại lượng ngẫu nhiêm, ℓ là một số, a là kỳ vọng, S là độ lệch chuẩn. Ta có

$$P(\sigma_{th} \le m\sigma_{tt}) = \frac{1}{2}\Big\{1 + \Phi\Big(\frac{(m-1)\sigma_{tt}}{S_{\sigma th}}\Big)\Big\}$$

trong đó $S_{\sigma th}$ là độ lệch chuẩn của ứng suất thực. Các tham số chứa trong σ_{tt}.

Tương tự (4.2) ta tính được đạo hàm của xác suất tin cậy theo các tham số thiết kế.

2. Trường hợp tổng quát. Không mất tính chất tổng quát ta xét trường hợp xác suất tin cậy phụ thuộc một hệ bất đẳng thức

$$P(t) \;=\; \text{Prob}\;(\{\vec{\omega}\;:\;\xi_i(\vec{\omega}) \le 0,\quad i = \overline{1,n}\})$$

Tuyến tính hóa các hàm $\xi_i(\vec{\omega})$ quanh giá trị kỳ vọng $E\vec{\omega}$ của $\vec{\omega}$ ta có:

$$\xi_i(\vec{\omega}) = \xi_i(E\vec{\omega}) + \sum_i \frac{\partial \xi_i}{\partial \omega_i}\cdot \Delta\omega_i + \dots$$

Bỏ qua các số hạng bậc cao ta có

$$P \;=\; \text{Prob}\;\Big(\sum_i \Psi_{ij}(E\vec{\omega})\Delta\omega_i \le 0,\quad j = \overline{1,n}\Big) \tag{4.3}$$

trong đó $\Delta\omega_i$ là các đại lượng ngẫu nhiên đủ nhỏ.

Như vậy bài toán dẫn đến tìm xác suất đồng thời thỏa mãn một hệ bất đẳng thức tuyến tính của các đại lượng ngẫu nhiên.

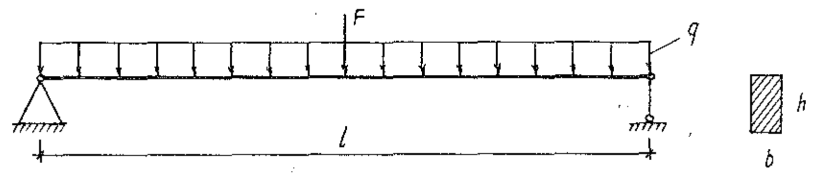
Ngay việc tính (4.3) cũng gặp nhiều khó khăn, cho đến nay chưa có phương pháp hữu hiệu. Điều đáng chú ý là các phương pháp hiện hành [6] đòi hỏi số thông tin quá lớn, thực tế không đáp ứng được. Để đáp ứng các đòi hỏi của thực tế, khi xét các hệ thống có xác suất an toàn cao, và sự cố là là các biến cố hiếm (xác suất bé) chẳng hạn đối với các công trình xây dựng được thiết kế một cách nghiêm túc thì người ta dùng dạng gần đúng (2.3) hay dạng gần đúng của (4.3) như sau [4].

$$P \approx \min_{\{j\}}\Big\{\text{Prob}\Big(\sum_i \Psi_{ij}(E\vec{\omega}_i)\Delta\omega_i \le 0\Big\} \tag{4.4}$$

Điều này trùng với quan niệm quen thuộc trong xây dựng là kiểm tra an toàn một kết cấu (hệ yếu tố) nào đó ta chỉ cần kiểm tra tại các tiết diện nguy hiểm (nơi có ứng suất, mômen, chuyển vị,... đạt cực trị). Một cách tính khác xác suất (12) đã được trình bày trong [4]. Khi có cách tính độ tin cậy $P(t)$ thì ta tính được biểu thức gần đúng $\dfrac{\partial P(t)}{\partial \vec{\omega}} \approx \Big\{\dfrac{\Delta P(t)}{\Delta\omega_i}\Big\}$.

5. THÍ DỤ

Xét dầm tựa đơn giản trên hai gối, chịu tải trọng tập trung F tại giữa nhịp và lực phân bố đều cường độ q, tiết diện chữ nhật $b \times h$, chiều dài nhịp ℓ (hình 1).



Hình 1

Hãy tìm gradient của xác suất tin cậy theo các tham số thiết kế $= F, \ell, b, h, q$

Dễ dàng ta có $\sigma_{\max} = \sigma\left(\frac{\ell}{2}\right)$ Vậy ta kiểm tra tiết diện giữa nhịp

$$\sigma_{\max} = \sigma\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{3}{4}\left[\frac{2F\ell + q\ell^2}{bh^2}\right] = \Psi(F, \ell, q, h, b)$$

ta coi gần đúng kỳ vọng của Ψ là giá trị của Ψ khi các ẩn là kỳ vọng của chúng tức

$$\overline{\psi} = \Psi(\overline{F}, \overline{\ell}, \overline{q}, \overline{h}, \overline{b}) \quad \text{và} \quad \overline{\psi} = \overline{\sigma}_{\max}$$

Xác suất an toàn của dầm là

$$\mathrm{Prob}(\sigma_{\max} \le m\sigma_{tt}) = \frac{1}{2}\left\{1 + \Phi\left(\frac{(m-1)\sigma_{tt}}{S_{\sigma th}}\right)\right\}$$

trong đó $\overline{\sigma}_{\max} = a$, $S = S_{\sigma th} = \text{const}$ có như đã biết.

Do thực nghiệm, $S_{\sigma_{th}}$ được tính theo công thức

$$S = S_{\sigma th} = \sqrt{S_F^2 + S_b^2 + S_\ell^2 + S_h^2 + S_q^2}$$

trong đó S_F, S_b, S_ℓ, S_h, S_q là độ lệch chuẩn của các tham số F, b, ℓ, h, q

$$\frac{\partial P}{\partial F} = \frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial F} = -\frac{1}{S\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(m-1)^2 a^2}{2}} \frac{\partial \Psi}{\partial F}$$

$$\frac{\partial P}{\partial F} = -\frac{3\overline{\ell} e^{-\frac{(m-1)^2 a^2}{2}}}{2S\sqrt{2\pi}\,\overline{b}\,\overline{h}^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial h} = -\frac{3e^{-\frac{(m-1)^2 a^2}{2}}}{2S\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\overline{F} + \overline{q}\overline{\ell}}{\overline{b}\,\overline{h}^3}\right]$$

$$\frac{\partial P}{\partial h} = \frac{3e^{-\frac{(m-1)^2 a^2}{2}}}{2S\sqrt{2\pi}} \frac{2\overline{F}\,\overline{\ell} + \overline{q}\overline{\ell}^2}{\overline{b}\,\overline{h}^3}$$

$$\frac{\partial P}{\partial b} = \frac{3e^{-\frac{(m-1)^2 a^2}{2}}}{4S\sqrt{2\pi}} \frac{2\overline{F}\,\overline{\ell} + \overline{q}\overline{\ell}^2}{\overline{h}^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial q} = -\frac{3e^{-\frac{(m-1)^2 a^2}{2}}}{4S\sqrt{2\pi}} \frac{\overline{\ell}^2}{\overline{b}\,\overline{h}^2}$$

Công trình này được hoàn thành với sự hỗ trợ của chương trình nghiên cứu cơ bản trong lĩnh vực khoa học tự nhiên (KT-04)

Địa chỉ:
Trường ĐH Xây dựng

Nhận ngày 22/6/1994

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Tran Duong Hien. Determinictic and stochastic sensitivity in Computational Struvtural Mechanics. 46/1990 - Warszawa 1990.
2. Frank P. M. Introduction to System Sensitivity Theory. Academic Press, 1978.
3. Hien T. D. and Kleiber M. Computational aspects in structural design sensitivity analysis for statics and dynamics. Comput. Struct. 33(4): 939-950, 1989.
4. Nguyễn Văn Phó. Phương pháp xác định độ tin cậy trong điều kiện thông tin không đầy đủ. Tạp chí Cơ học T.VI, No 2, 1985.
5. Bogdan skalmierski, andrzej tylikowski. Stochastic processes in Dynamics. PWN - Polish scientific Publishers. Warszawa - 1982.
6. Bolotin V. V. Methods of probability theory and reliability theory in the calculation of structures (in Russian) - Moscow - Xtroizdat, 1982.

(xem tiếp trang 43)