Tạp chí Cơ học Journal of Mechanics, NCNST of Vietnam T. XVI, 1994, No 4 (11 - 14)

MỘT VÀI PHƯƠNG TRÌNH PHI TUYẾN GIẢI ĐƯỢC CÓ LIÊN QUAN ĐẾN HIỆN TƯỢNG MẤT ỔN ĐỊNH KHÍ ĐỘNG

NGUYỄN ĐĂNG BÍCH, NGUYỄN VÕ THÔNG

Công trình cao, kết cấu mềm chịu tải trọng gió dao động không chỉ theo phương dòng gió, mà còn theo phương vuông góc với dòng gió. Chuyển động theo phương vuông góc với dòng gió là hiện tượng tự dao động, có thể dẫn tới tình trạng mất ổn định khí động. Phương trình mô tả hiện tượng tự dao động của công trình xem như hệ một bậc tự do có dạng [1, 2]:

$$J\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} + c\varphi = M(\varphi, \dot{\varphi}) \tag{1}$$

Trong bài toán này $M(\varphi, \dot{\varphi})$ là mô men của lực khí động, không phụ thuộc hiển vào thời gian và là hàm của vị trí và vận tốc dao động của chính công trình.

Bài báo này chỉ ra một số dạng lực khí động, tìm nghiệm chính xác của phương trình vi phân phi tuyến tương ứng, phân tích đặc trưng dao động và hiện tượng mất ổn định khí động ứng với các lực đó. Dưới đây xét các dạng lực khí động

1. MÔ MEN CỦA LỰC KHÍ ĐỘNG CÓ DẠNG

$$M(\varphi, \dot{\varphi}) = c\alpha^2\varphi^3, \tag{1.1}$$

ở đây α^2 - tham số của lực khí động.

Khi đó phương trình (1) có dạng [3]

$$\ddot{\varphi} + 2\nu\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = \omega^2\alpha^2\varphi^3, \tag{1.2}$$

ở đây

$$2\nu = \frac{\beta}{J}, \qquad \omega^2 = \frac{c}{J}$$

Trong trường hợp tham số ν, ω bất kỳ, phương trình (1.2) không tìm được nghiệm chính xác, nhưng nó có nghiệm đúng khi

$$\omega = \frac{2\sqrt{2}}{3}\nu \tag{1.3}$$

Trong trường hợp này phương trình (1.2) có tích phân đầu:

$$\dot{\varphi} + \frac{2\nu}{3}(1 + \alpha\varphi)\varphi = 0 \tag{1.4}$$

Phương trình (1.4) cho nghiệm

$$\varphi = -\frac{1}{\alpha}\frac{e^{-(\nu/3)t}}{Ce^{(\nu/3)t} + e^{-(\nu/3)t}} \tag{1.5}$$

ở đây C - hằng số tích phân

Từ (1.4), (1.5) suy ra: φ là hàm đồng biến và giá trị nằm trong khoảng hữu hạn

$$-\frac{1}{\alpha(C+1)} \leq \varphi \leq 0 \quad \text{khi} \quad 0 \leq t < +\infty$$

Nghiệm (1.5) là ổn định khi $C \neq -1$

2. MÔ MEN LỰC KHÍ ĐỘNG CÓ DẠNG

$$M(\varphi, \dot{\varphi}) = 3J\alpha^2 \frac{\varphi\dot{\varphi}^2}{1+\alpha^2\varphi^2} \tag{2.1}$$

Khi đó phương trình (1) có dạng

$$\ddot{\varphi} + 2\nu\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = 3\alpha^2 \frac{\varphi\dot{\varphi}^2}{1+\alpha^2\varphi^2} \tag{2.2}$$

Để giải phương trình (2.2) ta dùng phép biến đổi

$$(au)^{1/a} = \varphi(1+\alpha^2\varphi^2)^{-1/2} \tag{2.3}$$

nhờ phép biến đổi (2.3), phương trình (2.2) đưa về phương trình

$$\ddot{u} + 2\nu\dot{u} + a\omega^2 u = \omega^2\alpha^2(au)^{(2/a)+1} - \left(\frac{1}{a} - 1\right)\frac{\dot{u}^2}{u} \tag{2.4}$$

a) Khi $a = 1$

Trong trường hợp này phép biến đổi (2.3) và phương trình (2.4) có dạng:

$$\varphi = u(1-\alpha^2u^2)^{-1/2} \tag{2.5}$$

$$\ddot{u} + 2\nu\dot{u} + \omega^2 u = \omega^2\alpha^2u^3 \tag{2.6}$$

như vậy, với phép biến đổi (2.5) phương trình (2.2) đưa về phương trình (2.6) có cùng dạng với phương trình (1.2). Do đó nếu thỏa mãn điều kiện (1.3), dựa vào (1.5), (2.5) ta tìm được nghiệm của phương trình (2.2)

$$\varphi = -\frac{1}{\alpha}\frac{e^{-\frac{\nu}{2}t}}{\left(C^2e^{\frac{\nu}{3}t} + 2Ce^{-\frac{\nu}{3}t}\right)^{1/2}} \tag{2.7}$$

ở đây : C - hằng số tích phân

Khảo sát nghiệm (2.7) ta thấy, φ là hàm đồng biến và giá trị nằm trong khoảng hữu hạn

$$-\frac{1}{\alpha C(C+2)} \leq \varphi \leq 0 \quad \text{khi} \quad 0 \leq t < +\infty$$

Nghiệm (2.7) là ổn định khi $C \neq -2$

b) Khi $a = -2$

Trong trường hợp này phép biến đổi (2.3) và phương trình (2.4) có dạng

$$-2u = \varphi^{-2}(1+\alpha^2\varphi^2) \tag{2.8}$$

$$\ddot{u} + 2\nu\dot{u} - 2\omega^2 u = \omega^2\alpha^2 + \frac{3}{2}\frac{\dot{u}^2}{u} \tag{2.9}$$

như vậy, với phép biến đổi (2.8) phương trình (2.2) đưa về phương trình (2.9), vì thế nếu thỏa mãn điều kiện (1.3), dựa vào (2.7), (2.8) ta tìm được nghiệm của phương trình (2.9)

$$u = -\frac{\alpha^2}{2}\left(Ce^{\frac{2}{3}\nu t} + 1\right)^2 \tag{2.10}$$

Dễ dàng nhận thấy rằng (2.10) là nghiệm không ổn định

c) Khi a bất kỳ

Dựa vào (2.3), (2.7) ta tìm được nghiệm của phương trình (2.4)

$$u = \frac{1}{a(-\alpha)^a}\,\frac{1}{\left(Ce^{\frac{2}{3}\nu t} + 1\right)^a} \tag{2.11}$$

Nghiệm (2.11) ổn định khi $a > 0$, không ổn định khi $a < 0$

3. MÔ MEN LỰC KHÍ ĐỘNG CÓ DẠNG

$$M(\varphi, \dot{\varphi}) = 3J\alpha^2 \frac{\varphi\dot{\varphi}^2}{1 + \alpha^2\varphi^2} - c\alpha^2\varphi^3 \tag{3.1}$$

Khi đó phương trình (1) có dạng

$$\ddot{\varphi} + 2\nu\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = 3\alpha^2 \frac{\varphi\dot{\varphi}^2}{1 + \alpha^2\varphi^2} - \omega^2\alpha^2\varphi^3 \tag{3.2}$$

nhờ phép biến đổi (2.3) phương trình (3.2) đưa về phương trình [4]

$$\ddot{u} + 2\nu\dot{u} + a\omega^2 u = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\frac{\dot{u}^2}{u} \tag{3.3}$$

a) Khi $a = 1$

Trong trường hợp này phép biến đổi (2.3) và phương trình (3.3) có dạng:

$$\varphi = u\left(1 - \alpha^2 u^2\right)^{-1/2} \tag{3.4}$$

$$\ddot{u} + 2\nu\dot{u} + \omega^2 u = 0 \tag{3.5}$$

Khi $\nu > \omega$, phương trình (3.5) cho nghiệm

$$u = \frac{1}{C}e^{-\nu t}\,\mathrm{ch}\left(\sqrt{\nu^2 - \omega^2}\cdot t + \beta\right) \tag{3.6}$$

ở đây C, β - hằng số tích phân

Dựa vào (3.4), (3.6) ta tìm được nghiệm của phương trình (3.2)

$$\varphi = \frac{\mathrm{ch}\left(\sqrt{\nu^2 - \omega^2}\cdot t + \beta\right)}{\left[C^2 e^{2\nu t} - \alpha^2\mathrm{ch}^2\left(\sqrt{\nu^2 - \omega^2}\cdot t + \beta\right)\right]^{1/2}} \tag{3.7}$$

Khảo sát nghiệm (3.7) ta thấy: trong khoảng biến thiên của t, $0 \le t < +\infty$, φ là hàm có cực đại, cực đại đó có thể hữu hạn, cũng có thể vô hạn, phụ thuộc vào giá trị của tham số lực khí động α^2. Như vậy có thể xem (3.1) là dạng lực có khả năng gây mất ổn định khí động và (3.7) là nghiệm mô tả hiện tượng mất ổn định khí động tương ứng với nó.

b) Khi a bất kỳ

Dựa vào (2.3), (3.7) ta tìm được nghiệm của phương trình (3.3)

$$u = \frac{1}{2} \frac{\text{ch}^a\left(\sqrt{\nu^2 - \omega^2} \cdot t + \beta\right)}{C^a e^{a\nu t}} \tag{3.8}$$

Nghiệm (3.8) ổn định khi $a > 0$, không ổn định khi $a < 0$

KẾT LUẬN

1. Qua khảo sát nghiệm các phương trình vi phân phi tuyến được đề cập cho thấy: phương trình (2.4) và phương trình (3.1) cho nghiệm không ổn định, như vậy dạng lực khí động cho ở vế phải các phương trình này là đáng chú ý, vì nó có khả năng gây mất ổn định khí động.

2. Phương pháp giải các phương trình vi phân phi tuyến ở đây là: dùng phép biến đổi chứa tham số (2.3) để điều khiển việc hướng tới những phương trình giải được, sau đó dùng hiệu ứng dây chuyền: biết nghiệm của phương trình giải được, nhờ phép biến đổi tìm nghiệm của phương trình khác.

3. Đây mới chỉ là cố gắng bước đầu trong việc chỉ ra một số dạng lực khí động gây mất ổn định, song có thể nhận xét, những lực khí động cấu thành từ hai yếu tố: yếu tố phi tuyến và yếu tố tán sắc như (3.1), dễ gây mất ổn định khí động.

Công trình hoàn thành với sự tài trợ của Chương trình nghiên cứu cơ bản trong lĩnh vực khoa học tự nhiên.

Địa chỉ:
Viện Khoa học Kỹ thuật Xây dựng

Nhận ngày 12/9/1994

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Đăng Bích. Mất ổn định khí động của thanh hình trụ công xôn tựa trên gối đàn hồi. Tuyển tập công trình Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ 5, tập III (27-32), 1993.
2. Emil Simiu Robert H. Scanlan. Wind Effects on Structures. John Wiley and Sons. New York - 1973.
3. Бондарь Н. Г. Некоторые автономные задачи нелинейной механики. Наукова Думка, Киев 1969.
4. Nguyễn Đăng Bích, Nguyễn Võ Thông. Mất ổn định khí động của thanh hình trụ tựa trên gối đàn hồi có cản nhớt. Tạp chí Cơ học, No. 3, 1994

SUMMARY

SOME SOLVABLE NON-LINEAR EQUATIONS RELATED TO AERODYNAMIC INSTABILITY PHENOMENA

This article proposes some forms of aerodynamic forces, looks for accurate solutions of correspondent non-linear differential equations and analyses the characteristics of aerodynamic forces and of equation's solution. Found solutions proves that aerodynamic forces are formed from two elements: element of non-linear and dispersion, that single solutions are usually found and aerodynamic instability easy occurs.