Tạp chí Cơ học Journal of Mechanics, NCNST of Vietnam T. XVI, 1994, No 4 (1 - 10)

VỀ BÀI TOÁN BẢN COMPOSITE LỚP ĐÀN HỒI DỊ HƯỚNG KHÔNG THUẦN NHẤT

ĐÀO HUY BÍCH

Bằng phương pháp trung bình hóa bài toán bản composite lớp đàn hồi dị hướng không thuần nhất được đưa về bài toán của bản thuần nhất dị hướng. Đã nhận được công thức xác định các hằng số vật liệu làm cơ sở để kiểm tra các kết quả thực nghiệm. Các kết quả nhận được cho phép khảo sát một loạt các bài toán tĩnh và động lực học của bản composite bằng các phương pháp quen biết.

1. BÀI TOÁN TĨNH

Bài toán của cơ học vật liệu compoisite đàn hồi theo chuyển vị có dạng

$$\left[C_{ijk\ell}(\vec{x})u_{k,\ell}\right]_{,j} + X_i = 0,$$

Với điều kiện biên:

$$u_i\Big|_{S_u} = u_i^0, \qquad C_{ijk\ell}(\vec{x})u_{k,\ell}n_j\Big|_{S_\sigma} = S_i^0,$$

trong đó:

$$C_{ijk\ell}(\vec{x} + \vec{a}_i N_i) = C_{ijk\ell}(\vec{x})$$

Đặt $\xi_\beta = \left[\dfrac{x_\beta}{\alpha} + N_\beta\right]$, $\alpha = \dfrac{\ell}{L}$ và tìm nghiệm dưới dạng khai triển:

$$u_i = \sum_{q=0}^{\infty} \alpha^q \sum_{p=0}^{q} N^{(p)}_{ijk_1\ldots k_p}(\vec{\xi}) w^{\{q-p\}}_{j,k_1\ldots k_p}(\vec{x}).$$

Đặt vào phương trình cân bằng và điều kiện biên, cân bằng các hệ số cùng bậc của α, đưa về một dãy các bài toán truy hồi với hệ số hằng số, tức là các bài toán đàn hồi dị hướng thuần nhất [1]

$$\begin{aligned} h^{(0)}_{ijnk} w^{\{p\}}_{n,kj} + X_i^{\{p\}} &= 0, \\ w_i^{\{p\}}\Big|_{S_u} &= u_i^{0\{p\}} \\ h^{(0)}_{ijnk} w^{\{p\}}_{n,k} n_j\Big|_{S_\sigma} &= S_i^{0\{p\}} \end{aligned} \tag{1.1}$$

trong đó

$$
\begin{aligned}
X_i^{\{p\}} &= \sum_{r=1}^{p} h^{(r)}_{ijmnk_1\ldots k_r} w^{\{p-r\}}_{m,nk_1\ldots k_r j}, \qquad p>0; \quad X_i^{\{0\}} \equiv X_i,\\
u_i^{0\{p\}} &= -\sum_{r=1}^{p} N^{(r)}_{ijk_1\ldots k_r} w^{\{p-r\}}_{j,k_1\ldots k_r}\Big|_{S_u}, \qquad p>0; \quad u_i^{0\{0\}} \equiv u_i^0,\\
S_i^{0\{p\}} &= -\sum_{r=1}^{p} h^{(r)}_{ijmnk_1\ldots k_r} w^{\{p-r\}}_{m,nk_1\ldots k_r} n_j\Big|_{S_\sigma}, \qquad p>0; \quad S_i^{0\{0\}} \equiv S_i^0
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Các đại lượng $h^{(p)}_{ijmnk_1\ldots k_p}$, $N^{(p)}_{ijk_1\ldots k_r}$ xác định theo công thức truy hồi.

Trường hợp composite lớp bao gồm nhiều bó (ℓ) tuần hoàn theo tọa độ x_3 chẳng hạn. Mỗi bó bao gồm nhiều lớp, tại mỗi lớp vật liệu có thể dị hướng và không thuần nhất. Khi đó các hệ số $\boldsymbol{h}^{(p)}$ và các hàm địa phương $\boldsymbol{N}^{(p)}$ xác định theo công thức sau:

$$
\begin{aligned}
&\left[C_{i3m3}\left(N^{(p+2)}_{mnk_1\ldots k_{p+2}}\right)'\right]' + \left(C_{i3mk_{p+2}} N^{(p+1)}_{mnk_1\ldots k_{p+1}}\right)' + C_{ik_{p+2}m3}\left(N^{(p+1)}_{mnk_1\ldots k_{p+1}}\right)' +\\
&+ C_{ik_{p+2}mk_{p+1}} N^{(p)}_{mnk_1\ldots k_p} = h^{(p)}_{ik_{p+2}nk_1\ldots k_{p+1}}, \quad p=-1,0,1,\ldots
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

trong đó

$$
h^{(p)}_{ik_{p+2}nk_1\ldots k_{p+1}} = \left\langle C_{ik_{p+2}m3}\left(N^{(p+1)}_{mnk_1\ldots k_{p+1}}\right)' + C_{ik_{p+2}mk_{p+1}} N^{(p)}_{mnk_1\ldots k_p}\right\rangle, \quad p=-1,0,1,\ldots \tag{1.4}
$$

Dấu phẩy ở trên chỉ đạo hàm theo biến ξ; với $\xi = \left[\dfrac{x_3}{\alpha} + N\right]$; dấu ngoặc nhọn chỉ giá trị trung bình của đại lượng.

Lý thuyết mô đun hiệu quả ứng với $p=0$

$$
\begin{aligned}
h_{ijnk} w^{(0)}_{n,kj} + X_i = 0; &\quad h_{ijnk} \equiv h^{(0)}_{ijnk},\\
w_i^{(0)}\Big|_{S_u} &= u_i^0,\\
h_{ijnk} w^{(0)}_{n,k} n_j\Big|_{S_\sigma} &= S_i^0
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

Trường hợp composite lớp tenxơ mô đun hiệu quả h_{ijnk} xác định như sau:

$$
h_{ijnk} = \langle C_{ijnk}\rangle + \langle C_{ijm3} C^{-1}_{m3\ell3}\rangle \langle C^{-1}_{\ell3p3}\rangle^{-1} \langle C^{-1}_{p3q3} C_{q3nk}\rangle - \langle C_{ijm3} C^{-1}_{m3\ell3} C_{\ell3nk}\rangle
$$

Do vậy điều quan trọng là xác định tenxơ mô đun hiệu quả khi biết tenxơ mô đun của các thành phần. Phần tiếp theo giải bài toán của lý thuyết đàn hồi dị hướng thuần nhất (1.5).

Nếu lớp là trực hướng và trục trực hướng trùng với trục tọa độ, ta có tenxơ mô đun hiệu quả có các thành phần khác không:

$$
\begin{aligned}
h_{1111} &= \langle C_{1111}\rangle + \frac{1}{\langle 1/C_{3333}\rangle}\left\langle \frac{C_{1133}}{C_{3333}}\right\rangle^2 - \left\langle \frac{C^2_{1133}}{C_{3333}}\right\rangle,\\
h_{2222} &= \langle C_{2222}\rangle + \frac{1}{\langle 1/C_{3333}\rangle}\left\langle \frac{C_{2233}}{C_{3333}}\right\rangle^2 - \left\langle \frac{C^2_{2233}}{C_{3333}}\right\rangle,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h_{3333} &= \frac{1}{\langle 1/C_{3333}\rangle}, \\
h_{1122} &= \langle C_{1122}\rangle + \frac{1}{\langle 1/C_{3333}\rangle}\Big\langle\frac{C_{1133}}{C_{3333}}\Big\rangle\Big\langle\frac{C_{2233}}{C_{3333}}\Big\rangle - \Big\langle\frac{C_{1133}C_{2233}}{C_{3333}}\Big\rangle, \\
h_{1133} &= \frac{1}{\langle 1/C_{3333}\rangle}\Big\langle\frac{C_{1133}}{C_{3333}}\Big\rangle, \\
h_{2233} &= \frac{1}{\langle 1/C_{3333}\rangle}\Big\langle\frac{C_{2233}}{C_{3333}}\Big\rangle, \\
h_{1212} &= \langle C_{1212}\rangle, \\
h_{1313} &= \frac{1}{\langle 1/C_{1313}\rangle}, \qquad h_{2323} = \frac{1}{\langle 1/C_{2323}\rangle}
\end{aligned} \tag{1.6}
$$

Sau khi tìm được nghiệm của bài toán (1.5), có thể xác định ứng suất vi mô tại mỗi lớp theo lý thuyết gần đúng:

$$
\sigma_{ij} = C^{(0)}_{ijk\ell}(\xi)w_{k,\ell}(\vec{x}), \tag{1.7}
$$

trong đó

$$
C^{(0)}_{ijk\ell} = C_{ijk\ell} + C_{ijm3}\big(N^{(1)}_{mk\ell}\big)' \tag{1.8}
$$

$N^{(1)}_{mk\ell}$ là nghiệm của phương trình vi phân

$$
\big[C_{i3m3}\big(N^{(1)}_{mk\ell}\big)' + C_{i3k\ell}\big]' = 0,
$$

thỏa mãn điều kiện

$$
\langle N^{(1)}_{mk\ell}\rangle = 0, \qquad [[N^{(1)}_{mk\ell}]] = 0
$$

Trường hợp composite lớp các thành phần này có dạng:

$$
\begin{aligned}
C^{(0)}_{1111} &= C_{1111} + \frac{C_{1133}}{C_{3333}}\frac{\langle C_{1133}/C_{3333}\rangle}{\langle 1/C_{3333}\rangle} - \frac{C^2_{1133}}{C_{3333}}, \\
C^{(0)}_{2222} &= C_{2222} + \frac{C_{2233}}{C_{3333}}\frac{\langle C_{2233}/C_{3333}\rangle}{\langle 1/C_{3333}\rangle} - \frac{C^2_{2233}}{C_{3333}}, \\
C^{(0)}_{3333} &= \frac{1}{\langle 1/C_{3333}\rangle}, \\
C^{(0)}_{1133} &= \frac{C_{1133}}{C_{3333}}\frac{1}{\langle 1/C_{3333}\rangle}, \\
C^{(0)}_{2233} &= \frac{C_{2233}}{C_{3333}}\frac{1}{\langle 1/C_{3333}\rangle},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C^{(0)}_{3311} &= \left\langle \frac{C_{1133}}{C_{3333}} \right\rangle \frac{1}{\langle 1/C_{3333} \rangle}\ , \\
C^{(0)}_{3322} &= \left\langle \frac{C_{2233}}{C_{3333}} \right\rangle \frac{1}{\langle 1/C_{3333} \rangle}\ , \\
C^{(0)}_{1122} &= C_{1122} + \frac{C_{1133}}{C_{3333}} \left\langle \frac{C_{2233}}{C_{3333}} \right\rangle \frac{1}{\langle 1/C_{3333} \rangle} - \frac{C_{1133}C_{2233}}{C_{3333}}\ , \\
C^{(0)}_{2211} &= C_{1122} + \frac{C_{2233}}{C_{3333}} \left\langle \frac{C_{1133}}{C_{3333}} \right\rangle \frac{1}{\langle 1/C_{3333} \rangle} - \frac{C_{1133}C_{2233}}{C_{3333}}\ , \\
C^{(0)}_{2323} &= \frac{1}{\langle 1/C_{2323} \rangle}\ , \\
C^{(0)}_{1313} &= \frac{1}{\langle 1/C_{1313} \rangle}\ , \\
C^{(0)}_{1212} &= C_{1212}.
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Dễ dàng thấy rằng:

$$
h_{ijk\ell} = \langle C^{(0)}_{ijk\ell} \rangle
$$

Bài toán về bản là bài toán ứng suất phẳng suy rộng

$\sigma_{33} = 0$ trên toàn độ dày của bản,

$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ tại mặt bản $x_3 = \pm h/2$.

Ta có liên hệ ứng suất - biến dạng theo lý thuyết mô đun hiệu quả:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11} &= h_{1111}\varepsilon_{11} + h_{1122}\varepsilon_{22} + h_{1133}\varepsilon_{33}\ , \\
\sigma_{22} &= h_{1122}\varepsilon_{11} + h_{2222}\varepsilon_{22} + h_{2233}\varepsilon_{33}\ , \\
0 &= h_{1133}\varepsilon_{11} + h_{2233}\varepsilon_{22} + h_{3333}\varepsilon_{33}\ , \\
\sigma_{12} &= 2h_{1212}\varepsilon_{12}.
\end{aligned}
$$

Biểu diễn

$$
\varepsilon_{33} = -\frac{1}{h_{3333}}\big(h_{1133}\varepsilon_{11} + h_{2233}\varepsilon_{22}\big),
$$

Thay vào hai phương trình đầu đi đến

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \left(h_{1111} - \frac{h^2_{1133}}{h_{3333}}\right)\varepsilon_{11} + \left(h_{1122} - \frac{h_{1133}h_{2233}}{h_{3333}}\right)\varepsilon_{22}\ , \\
\sigma_{22} &= \left(h_{1122} - \frac{h_{1133}h_{2233}}{h_{3333}}\right)\varepsilon_{11} + \left(h_{2222} - \frac{h^2_{2233}}{h_{3333}}\right)\varepsilon_{22}\ , \\
\sigma_{12} &= 2h_{1212}\varepsilon_{12}.
\end{aligned}
$$

Ký hiệu

$$
\begin{aligned}
&h_{1212} = G \ , \\
&h_{1111} - \frac{h_{1133}^2}{h_{3333}} = \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2} \ , \\
&h_{2222} - \frac{h_{2233}^2}{h_{3333}} = \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2} \ , \\
&\frac{h_{1122}h_{3333} - h_{1133}h_{2233}}{h_{1111}h_{3333} - h_{1133}^2} = \nu_2 \ , \\
&\frac{h_{1122}h_{3333} - h_{1133}h_{2233}}{h_{2222}h_{3333} - h_{2233}^2} = \nu_1, \quad \text{với} \quad E_1\nu_2 = E_2\nu_1,
\end{aligned} \tag{1.10}
$$

Suy ra

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \frac{\left(h_{1111}h_{3333} - h_{1133}^2\right)\left(h_{2222}h_{3333} - h_{2233}^2\right) - \left(h_{1122}h_{3333} - h_{1133}h_{2233}\right)^2}{h_{3333}\left(h_{2222}h_{3333} - h_{2233}^2\right)} \ , \\
E_2 &= \frac{\left(h_{2222}h_{3333} - h_{2233}^2\right)\left(h_{1111}h_{3333} - h_{1133}^2\right) - \left(h_{1122}h_{3333} - h_{1133}h_{2233}\right)^2}{h_{3333}\left(h_{1111}h_{3333} - h_{1133}^2\right)} \ .
\end{aligned} \tag{1.11}
$$

Các đại lượng E_1, E_2, ν_1, ν_2, G gọi là các mô đun tương đương trong các bài toán ứng suất phẳng suy rộng.

Liên hệ ứng suất - biến dạng theo lý thuyết mô đun hiệu quả có dạng lý thuyết đàn hồi trực hướng

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2}\left(\varepsilon_{11} + \nu_2\varepsilon_{22}\right) \ , \\
\sigma_{22} &= \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2}\left(\varepsilon_{22} + \nu_1\varepsilon_{11}\right) \ , \\
\sigma_{12} &= 2G\varepsilon_{12} \ .
\end{aligned} \tag{1.12}
$$

Có thể sử dụng công thức (1.10), (1.11) để kiểm định số liệu thực nghiệm.

Xét bài toán uốn bản chữ nhật trực hướng

$$
\varepsilon_{11} = -x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \ , \quad \varepsilon_{22} = -x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \ , \quad \varepsilon_{12} = -x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}
$$

Do đó

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11} &= -\frac{E_1 x_3}{1-\nu_1\nu_2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu_2\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) \ , \\
\sigma_{22} &= -\frac{E_2 x_3}{1-\nu_1\nu_2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu_1\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right) \ , \\
\sigma_{12} &= -2Gx_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \ .
\end{aligned}
$$

Các đại lượng σ_{13}, σ_{23} xác định từ phương trình cân bằng

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}=0\ ,$$
$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3}=0\ ,$$

với điều kiện tại $x_3=\pm h/2$; $\sigma_{13}=\sigma_{23}=0$ ta được

$$\sigma_{13}=\frac{1}{2}\Big(x_3^2-\frac{h^2}{4}\Big)\Big[\frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2}\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3}+\Big(\frac{E_1\nu_2}{1-\nu_1\nu_2}+2G\Big)\frac{\partial^3 w}{\partial x_1\partial x_2^2}\Big]\ ,$$
$$\sigma_{23}=\frac{1}{2}\Big(x_3^2-\frac{h^2}{4}\Big)\Big[\Big(\frac{E_1\nu_2}{1-\nu_1\nu_2}+2G\Big)\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2\partial x_2}+\frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2}\frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3}\Big]\ .$$

Các thành phần mô men và lực cắt

$$M_1=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{11}x_3dx_3=-D_1\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu_2\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\Big)\ ,$$
$$M_2=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{22}x_3dx_3=-D_2\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\nu_1\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\Big)\ ,$$
$$M_{12}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{12}x_3dx_3=-2D_k\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\ , \tag{1.13}$$

$$Q_1=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{13}dx_3=-\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(D_1\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+D_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\Big)\ ,$$
$$Q_2=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{23}dx_3=-\frac{\partial}{\partial x_2}\Big(D_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+D_2\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\Big)\ .$$

trong đó

$$D_1=\frac{E_1h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}\ ,\quad D_2=\frac{E_2h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}\ ,\quad D_k=\frac{Gh^3}{12}\ ,\quad D_3=D_1\nu_2+2D_k.$$

Phương trình cân bằng của bản trực hướng

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2}+2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2}+q=0$$

đưa về [2]

$$D_1\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4}+2D_3\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+D_2\frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4}=q \tag{1.14}$$

Còn bản trên nền đàn hồi với một hệ số có dạng

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + k_0 w = q$$

Kết hợp với các điều kiện gắn biên, ta có phương trình cơ bản của bài toán uốn bản trực hướng quen thuộc

2. BÀI TOÁN ĐỘNG CỦA COMPOSITE ĐÀN HỒI DỊ HƯỚNG

Phương trình chuyển động của composite đàn hồi có dạng

$$\left[C_{ijk\ell}(\vec{x}) u_{k,\ell}\right]_{,j} + X_i = \rho \ddot{u}_i$$

Điều kiện biên

$$u_i\Big|_{S_u} = u_i^0, \quad C_{ijk\ell}(\vec{x}) u_{k,\ell} n_j\Big|_{S_\sigma} = S_i^0$$

Điều kiện ban đầu

$$t = 0 \;:\; u_i = U_i, \quad \dot{u}_i = V_i$$

Đặt nghiệm

$$u_i = \sum_{q=0}^{\infty} \alpha^q \sum_{\beta} N_{ijk_1\ldots k_{q-2\beta}}^{(q)(\beta)} \frac{\partial^{2\beta}}{\partial t^{2\beta}} v_{j,k_1\ldots k_{q-2\beta}}$$

và $\quad v_i = \sum_{p=0}^{q} \alpha^p w_i^{\{p\}} \qquad$ bài toán đưa về [1]

$$\begin{aligned}
& h_{ijk\ell}^{(0)(0)} w_{k,\ell j}^{\{p\}} + X_i^{\{p\}} = \langle \rho \rangle \frac{\partial^2}{\partial t^2} w_i^{\{p\}}, \\
& w_i^{\{p\}}\Big|_{S_u} = u_i^{\{p\}}, \quad h_{ijk\ell}^{(0)(0)} w_{k,\ell} n_j\Big|_{S_\sigma} = S_i^{\{p\}}, \\
& t = 0 \;:\; w_i^{\{p\}} = U_i^{\{p\}}, \quad \frac{\partial w_i^{\{p\}}}{\partial t} = V_i^{\{p\}}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

với

$$\begin{aligned}
X_i^{\{p\}} &= \begin{cases} X_i; & p = 0 \\ \displaystyle\sum_{r=1}^{p} \sum_{\beta} h_{ijmk_1\ldots k_{r+1-2\beta}}^{(r)(\beta)} \frac{\partial^{2\beta}}{\partial t^{2\beta}} w_{m,jk_1\ldots k_{r+1-2\beta}}^{\{p-r\}}; & p > 0, \end{cases} \\
S_i^{\{p\}} &= \begin{cases} S_i^0; & p = 0 \\ \displaystyle -\sum_{r=1}^{p} \sum_{\beta} h_{ijmk_1\ldots k_{r+1-2\beta}}^{(r)(\beta)} \frac{\partial^{2\beta}}{\partial t^{2\beta}} w_{m,,k_1\ldots k_{r+1-2\beta}}^{\{p-r\}} n_j\Big|_{S_\sigma}; & p > 0, \end{cases} \\
u_i^{\{p\}} &= \begin{cases} u_i^0; & p = 0 \\ Q_i^{\{p\}}\Big|_{S_u}; & p > 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$U_i^{\{p\}} = \begin{cases} U_i; & p = 0 \\ Q_i^{\{p\}}\Big|_{t=0}; & p > 0 \end{cases}$$

$$V_i^{\{p\}} = \begin{cases} V_i; & p = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t} Q_i^{\{p\}}\Big|_{t=0}; & p > 0. \end{cases}$$

trong đó

$$Q_i^{\{p\}} = -\sum_{r=1}^{p} \sum_{\beta} N_{ijk_1\ldots k_{r-2\beta}}^{(r)(\beta)} \frac{\partial^{2\beta}}{\partial t^{2\beta}} w_{j,k_1\ldots k_{r-2\beta}}^{\{p-r\}}$$

Trường hợp composite lớp $\boldsymbol{N}^{(q)(\beta)}$ và $\boldsymbol{h}^{(q)(\beta)}$ xác định theo công thức sau:

$$\begin{aligned} &\left[C_{i3m3}\left(N_{mnk_1\ldots k_{q+2-2\beta}}^{(q+2)(\beta)}\right)'\right]' + \left(C_{i3mk_{q+2-2\beta}} N_{mnk_1 k_{q+1-2\beta}}^{(q+1)(\beta)}\right)' + C_{ik_{q+2-2\beta}m3}\left(N_{mnk_1\ldots k_{q+2-2\beta}}^{(q+1)(\beta)}\right)' + \\ &C_{ik_{q+2-2\beta}mk_{q+1-2\beta}} N_{mnk_1\ldots k_{q-2\beta}}^{(q)(\beta)} - \rho N_{ink_1\ldots k_{q+2-2\beta}}^{(q)(\beta-1)} = h_{ik_{q+2-2\beta}nk_{q+1-2\beta}k_1\ldots k_{q-2\beta}}^{(q)(\beta)}; \qquad (2.3) \\ &\qquad q = -1, 0, 1, \ldots; \qquad \beta = 0, 1, \ldots \end{aligned}$$

$$N_{ij}^{(0)(0)} = \delta_{ij}$$

với điều kiện

$$\langle \boldsymbol{N}^{(q)(\beta)} \rangle = 0, \quad p > 0; \qquad [[\boldsymbol{N}^{(q)(\beta)}]] = 0,$$

$$\begin{aligned} h_{ik_{q+2-2\beta}nk_{q+1-2\beta}k_1\ldots k_{q-2\beta}}^{(q)(\beta)} &= \langle C_{ik_{q+2-2\beta}m3}\left(N_{mnk_1\ldots k_{q+1-2\beta}}^{(q+1)(\beta)}\right)' + \\ &+ C_{ik_{q+2-2\beta}mk_{q+1-2\beta}} N_{mnk_1\ldots k_{q-2\beta}}^{(q)(\beta)} - \rho N_{ink_1\ldots k_{q+1-2\beta}}^{(q)(\beta-1)} \rangle \end{aligned} \qquad (2.4)$$

So sánh (1.3), (1.4) với (2.3), (2.4) dễ dàng thấy rằng $\boldsymbol{h}^{(q)(0)}$ trùng với $\boldsymbol{h}^{(q)}$ xác định trong bài toán tĩnh. Đại lượng $\boldsymbol{h}^{(0)(0)} = \boldsymbol{h}^{(0)} = \boldsymbol{h}$ là ten xơ mô đun hiệu quả. Do vậy theo lý thuyết mô đun hiệu quả bài toán động lực học của vật liệu composite đưa về bài toán động của lý thuyết đàn hồi dị hướng thuần nhất sau:

$$\begin{aligned} &h_{ijk\ell} w_{k,\ell j} + X_i = \rho_0 \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2}, \quad \rho_0 \equiv \langle \rho \rangle, \\ &w_i\Big|_{S_u} = u_i^0, \\ &h_{ijk\ell} w_{k,\ell} n_j\Big|_{S_\sigma} = S_i^0, \\ &t = 0 \ : \ w_i = U_i, \quad \frac{\partial w_i}{\partial t} = V_i. \end{aligned} \qquad (2.5)$$

Trường ứng suất động vi mô được xác định theo lý thuyết gần đúng sau:

$$\sigma_{ij}^{(0)} = C_{ijk\ell}^{(0)}(\xi) w_{k,\ell}(\vec{x}, t) \qquad (2.6)$$

Đối với bài toán bản ta lặp lại các kết quả tính toán như ở mục trước. Trong bài toán dao động uốn tự do thay đại lượng q trong phương trình (1.14) bằng lực quán tính - $\langle \rho \rangle h \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}$. Theo lý thuyết mô đun hiệu quả bài toán dao động uốn tự do của bản composite lớp đàn hồi đưa về bài toán dao động uốn của bản trực hướng thuần nhất, tất nhiên với các mô đun tương đương (1.10), (1.11). Phương trình dao động có dạng:

$$\langle\rho\rangle h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D_1\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2D_3\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2\partial x_2^2} + D_2\frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = 0,$$

trong đó : $\langle\rho\rangle = \left\langle \frac{\gamma}{g} \right\rangle = \frac{\gamma_0}{g}$

Đặt nghiệm

$$w(x_1, x_2, t) = \big(A\cos(pt) + B\sin(pt)\big)W(x_1, x_2)$$

đưa về

$$D_1\frac{\partial^4 W}{\partial x_1^4} + 2D_3\frac{\partial^4 W}{\partial x_1^2\partial x_2^2} + D_2\frac{\partial^4 W}{\partial x_2^4} - \frac{p^2\gamma_0 h}{g}W = 0.$$

a) BẢN TỰA TỰ DO CẢ 4 CẠNH

Đặt

$$W = \sin\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{n\pi x_2}{b}$$

Phương trình xác định tần số riêng:

$$D_1\Big(\frac{m\pi}{a}\Big)^4 + 2D_3\Big(\frac{mn\pi}{ab}\Big)^2 + D_2\Big(\frac{n\pi}{b}\Big)^4 - p^2\frac{\gamma_o h}{g} = 0$$

Do đó

$$p_{mn} = \sqrt{\frac{g}{\gamma_0 h}\Big[D_1\Big(\frac{m\pi}{a}\Big)^4 + 2D_3\Big(\frac{mn\pi^2}{ab}\Big)^2 + D_2\Big(\frac{n\pi}{b}\Big)^4\Big]}$$

b) BẢN TỰA TỰ DO TẠI $x_1 = 0$, $x_1 = a$, HAI CẠNH KIA TÙY Ý

Đặt

$$W(x_1, x_2) = Y(x_2)\sin\frac{m\pi x_1}{a}$$

dẫn tới

$$D_1 Y\Big(\frac{m\pi}{a}\Big)^4 - 2D_3 Y''\Big(\frac{m\pi}{a}\Big)^2 + D_2 Y^{IV} - \frac{p^2\gamma_0 h}{g}Y = 0.$$

Nghiệm sẽ là

$$Y = C_1\mathrm{ch}\frac{m\pi k_1}{a}x_2 + C_2\mathrm{sh}\frac{m\pi k_1}{a}x_2 + C_3\cos\frac{m\pi k_2}{a}x_2 + C_4\sin\frac{m\pi k_2}{a}x_2$$

trong đó

$$k_1 = \sqrt{\frac{1}{D_2}\Big(D_3 + \sqrt{D_3^2 - D_1 D_2 + D_2\frac{p^2\gamma_0 h a^4}{g m^4\pi^4}}\ \Big)}\ ,$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{-1}{D_2}\Big(D_3 - \sqrt{D_3^2 - D_1 D_2 + D_2\frac{p^2\gamma_0 h a^4}{g m^4\pi^4}}\ \Big)}\ .$$

Cho thỏa mãn điều kiện biên ở hai cạnh còn lại, chẳng hạn ngàm chặt

$$W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial x_2} = 0 \quad \text{tại} \quad x_2 = 0, \quad x_2 = b$$

hay

$$Y(0) = 0, \quad Y'(0) = 0, \quad Y(b) = 0, \quad Y'(b) = 0;$$

Ta nhận được bốn phương trình đại số thuần nhất chứa C_1, C_2, C_3, C_4. Định thức hệ số của hệ phương trình này bằng không cho ta phương trình xác định tần số p cần tìm.

Để xác định các hằng số A, B, ta sử dụng điều kiện ban đầu.

Ứng suất động vi mô tại từng lớp của bản composite xác định theo công thức (2.5).

3. KẾT LUẬN

Cho composite lớp ta biết các đặc trưng cơ học của từng lớp, theo công thức (1.6) xác định các thành phần của ten xơ mô đun hiệu quả. Trong bài toán bản (ứng suất phẳng suy rộng) các mô đun tương đương tính theo công thức (1.10), (1.11), các đại lượng này được sử dụng cho cả bài toán tĩnh và động, chúng có thể được kiểm tra bằng thực nghiệm. Kết quả đã đưa bài toán bản composite lớp đàn hồi về bài toán lý thuyết bản đàn hồi dị hướng với các mô đun tương đương này. Các tính toán tiếp theo (cả tĩnh và động) dựa trên các phương pháp của bản dị hướng thuần nhất.

Công trình hoàn thành với sự tài trợ của Chương trình nghiên cứu cơ bản trong lĩnh vực khoa học tự nhiên.

Địa chỉ:
Trường ĐH Tổng hợp HN

Nhận ngày 20/5/1994

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. Издательство МГУ, 1984.
2. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехиздат, М., 1957.

SUMMARY

ON THE PROBLEMS OF NONHOMOGENEOUS AND ANISOTROPIC ELASTIC LAYER - COMPOSITE PLATES

Using the homogenization method problems of nonhomogeneous and anisotropic elastic layer - composite plates reduce to the problems of homogeneous and anisotropic elastic plates. The formulae of effective modulus theory determining material behaviors in this cases are given and can be checked by experimental data. Obtained results allow to analyse static and dynamic problems of composite plates by well-know methods.