Tạp chí CƠ HỌC, tập XVI, 1994 số 3 (1 - 4)

MẤT ỔN ĐỊNH KHÍ ĐỘNG CỦA THANH HÌNH TRỤ TỰA TRÊN GỐI ĐÀN HỒI CÓ CẢN NHỚT

NGUYỄN ĐĂNG BÍCH, NGUYỄN VÕ THÔNG

Như đã trình bày trong [1], mất ổn định khí động là hiệu ứng đặc biệt của hiện tượng tự dao động, điều kiện xẩy ra những hiệu ứng này là sự thay đổi các tham số của lực khí động, chẳng hạn như sự tăng giảm của số Raynolds.

Bài báo này đề xuất một dạng lực khí động, tìm nghiệm chính xác của phương trình vi phân phi tuyến có cản nhớt, phân tích những trường hợp tới hạn dẫn đến sự mất ổn định khí động

§1. PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG

Phương trình chuyển động của hệ có cản nhớt xem như hệ một bậc tự do có dạng:

$$J\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} + c\varphi = M(\varphi, \dot{\varphi}) \tag{1.1}$$

φ - góc quay của thanh hình trụ

J - mô men quán tính khối lượng của thanh hình trụ đối với gối tựa

β - đặc trưng tắt dần

M - mô men của lực khí động đối với tiết diện gối tựa

Trong bài toán này $M(\varphi, \dot{\varphi})$ không phụ thuộc hiển vào thời gian và là hàm của vị trí và vận tốc dao động của chính thanh hình trụ

2. LỰC KHÍ ĐỘNG: DẠNG CHUNG VÀ CÁC TRƯỜNG HỢP RIÊNG

Ta xét lực khí động có dạng:

$$M(\varphi, \dot{\varphi}) = R\frac{\dot{\varphi}^2}{\varphi},$$

Trong trường hợp này ta có phương trình

$$\ddot{\varphi} + 2\nu\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = (a+1)\frac{\dot{\varphi}^2}{\varphi} \tag{2.1}$$

ở đây

$$2\nu = \frac{\beta}{J}, \qquad \omega^2 = \frac{c}{J}, \qquad a+1 = \frac{R}{J},$$

Phương trình (2.1) là phương trình vi phân phi tuyến, để giải ta dùng phép biến đổi

$$1 + au = \varphi^{-a}, \qquad \varphi = (1+au)^{-1/a} \tag{2.2}$$

với phép biến đổi (2.2), phương trình (2.1) được tuyến tính hóa và đưa về phương trình:

$$\ddot{u} + 2\nu\dot{u} - a\omega^2 u = \omega^2 \tag{2.3}$$

1) Trường hợp $a > 0$

Khi đó phương trình (2.3) có nghiệm

$$1 + au = e^{-\nu t}\left[C_1 \text{ch}(\nu^2 + a\omega^2)^{1/2} t + C_2 \text{sh}(\nu^2 + a\omega^2)^{1/2} t\right] \tag{2.4}$$

ở đây C_1, C_2 - hằng số tích phân

Biểu thức nghiệm có thể viết dưới dạng

$$1 + au = Ce^{-\nu t}\text{ch}\left[(\nu^2 + a\omega^2)^{1/2} t + \alpha\right] \tag{2.5}$$

ở đây $C = \sqrt{C_1^2 - C_2^2}$, $\alpha = \text{arth}\dfrac{C_2}{C_1}$

C, α - hằng số tích phân

Giả sử

$$u = u_0, \quad \dot{u} = \dot{u}_0 \quad \text{khi} \quad t = 0 \tag{2.6}$$

Từ (2.4) các hằng số tích phân được xác định qua các điều kiện đầu.

$$C_1 = au_0 + 1, \qquad C_2 = \frac{a\dot{u}_0 + \nu(au_0 + 1)}{\sqrt{\nu^2 + a\omega^2}}$$

$$C = \frac{\sqrt{a}(au_0 + 1)}{\sqrt{\nu^2 + a\omega^2}}\left[\omega^2 - \frac{a\dot{u}_0^2}{(au_0 + 1)^2} - \frac{2\nu\dot{u}_0}{au_0 + 1}\right]^{1/2}$$

Các hằng số tích phân cũng có thể xác định qua điều kiện đầu:

$$\varphi = \varphi_0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 \quad \text{khi} \quad t = 0 \tag{2.7}$$

Dựa vào (2.2) ta có:

$$\dot{u} = -\varphi^{-(a+1)}\dot{\varphi} \tag{2.8}$$

Từ (2.2), (2.8) suy ra:

$$C_1 = \varphi_0^{-a}, \qquad C_2 = \varphi_0^{-a}\frac{\nu - a\dfrac{\dot{\varphi}_0}{\varphi_0}}{\sqrt{\nu^2 + a\omega^2}}, \quad C = \varphi_0^{-a}\sqrt{\frac{a}{\nu^2 + a\omega^2}}\left[\omega^2 + 2\nu\frac{\dot{\varphi}_0}{\varphi_0} - a\frac{\dot{\varphi}_0^2}{\varphi_0^2}\right]^{1/2} \tag{2.9}$$

Thay (2.5) vào (2.2) với hằng số tích phân tính theo (2.9) ta được

$$\varphi = \frac{e^{(\nu/a)t}}{C^{1/a}\text{ch}^{1/a}\left(\sqrt{\nu^2 + a\omega^2} \cdot t + \alpha\right)} \tag{2.10}$$

Nghiệm (2.10) có tính chất đơn độc và ổn định, tình trạng mất ổn định khí động xảy ra khi $C = 0$.

Từ (2.9) suy ra điều kiện mất ổn định khí động là:

$$a = \omega^2\frac{\varphi_0^2}{\dot{\varphi}_0^2} + 2\nu\frac{\varphi_0}{\dot{\varphi}_0} \tag{2.11}$$

2) Trường hợp $a = 0$

Khi đó các phương trình (2.1) có dạng

$$\ddot{\varphi} + 2\nu\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = \frac{\dot{\varphi}^2}{\varphi} \tag{2.12}$$

Phép biến đổi thích hợp suy ra từ phép biến đổi (2.2) là:

$$\varphi = e^{-u}, \qquad u = -\ln\varphi \tag{2.13}$$

Với phép biến đổi này, phương trình (2.2) đưa về phương trình giải được

$$\ddot{u} + 2\nu\dot{u} = \omega^2 \tag{2.14}$$

Phương trình (2.14) có nghiệm

$$u = \frac{1}{2\nu}\Big(C_0 - \frac{\omega^2}{2\nu}\Big) + \frac{\omega^2}{2\nu}t + C_1 e^{-2\nu t} \tag{2.15}$$

ở đây : C_0, C_1 - hằng số tích phân

Từ (2.15) các hằng số tích phân được xác định qua điều kiện đầu (2.6)

$$C_0 = 2\nu u_0 + \dot{u}_0, \qquad C_1 = \frac{1}{2\nu}\Big(\frac{\omega^2}{2\nu} - \dot{u}_0\Big)$$

Các hằng số tích phân cũng có thể xác định qua điều kiện đầu (2.7)

Dựa vào (2.13) ta có:

$$\dot{u} = -\frac{\dot{\varphi}}{\varphi} \tag{2.16}$$

Từ (2.12), (2.16) suy ra:

$$C_0 = -2\nu\ln\varphi_0 - \frac{\dot{\varphi}_0}{\varphi_0}, \qquad C_1 = \frac{1}{2\nu}\Big(\frac{\omega^2}{2\nu} + \frac{\dot{\varphi}_0}{\varphi_0}\Big) \tag{2.17}$$

Thay (2.15) vào (2.13) với hằng số tích phân tính theo (2.17) ta được

$$\varphi = \varphi_0 \exp\Big(-\frac{\omega^2}{2\nu}t\Big)\exp\big[C_1(1 - e^{-2\nu t})\big] \tag{2.18}$$

ở đây hằng số tích phân C_1 được tính theo (2.17)

Khi $\nu > 0$ (2.18) là nghiệm có tính chất đơn độc và ổn định

3) Trường hợp $-\frac{\nu^2}{\omega^2} < a < 0$

Theo (2.9), hằng số C là đại lượng thực khi

$$\omega^2 + 2\nu\frac{\dot{\varphi}_0}{\varphi_0} - a\frac{\dot{\varphi}_0^2}{\varphi_0^2} < 0 \tag{2.19}$$

Bất đẳng thức (2.19) được thỏa mãn khi

$$\frac{\nu + \sqrt{\nu^2 + a\omega^2}}{a} < \frac{\dot{\varphi}_0}{\varphi_0} < \frac{\nu - \sqrt{\nu^2 + a\omega^2}}{a} \tag{2.20}$$

khi đó nghiệm (2.10) là nghiệm có tính chất đơn độc và ổn định khi $\nu > 0$

4) Trường hợp $a = -b \leq -\frac{\nu^2}{\omega^2}$

Trong trường hợp này phương trình (2.3) có nghiệm

$$1 + bu = e^{-\nu t}\big(A_1\cos\sqrt{b\omega^2 - \nu^2}\; t + A_2\sin\sqrt{b\omega^2 - \nu^2}\; t\big) \tag{2.21}$$

ở đây A_1, A_2 - hằng số tích phân

Biểu thức nghiệm có thể viết dưới dạng khác

$$1 - bu = Ae^{-\nu t} \cos\left[(b\omega^2 - \nu^2)^{1/2} t - \beta\right] \qquad (2.22)$$

ở đây $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$, $\beta = \mathrm{arctg}\dfrac{A_2}{A_1}$, A, β - hằng số tích phân. Các hằng số tích phân này có thể xác định qua điều kiện đầu (2.7)

$$A = \varphi_0^b \sqrt{\frac{b}{b\omega^2 - \nu^2}} \left[\omega^2 + 2\nu \frac{\dot{\varphi}_0}{\varphi_0} + b\frac{\dot{\varphi}_0^2}{\varphi_0^2}\right]^{1/2} \qquad (2.23)$$

Thay nghiệm (2.22) vào (2.2) với hằng số tích phân tính theo (2.23) ta được:

$$\varphi = A^{1/b} e^{-\frac{\nu}{b} t} \cos^{1/b}\left[(b\omega^2 - \nu^2)^{1/2} t - \beta\right] \qquad (2.24)$$

Nghiệm (2.24) là nghiệm tuần hoàn và mất ổn định khí động khi $b = \dfrac{\nu^2}{\omega^2}$

KẾT LUẬN

1. Nghiên cứu tình trạng mất ổn định khí động bằng cách tìm nghiệm đúng của phương trình vi phân mô tả hiện tượng tự dao động không những tìm được điều kiện mất ổn định khí động mà còn biết được dáng điệu của trạng thái mất ổn định khí động

2. Sự thay đổi tham số của lực khí động chính là nguyên nhân gây nên tình trạng mất ổn định khí động. Ở mỗi khoảng biến thiên khác nhau của tham số ứng với mỗi điều kiện và trạng thái mất ổn định khác nhau của hiện tượng tự dao động

3. Phương pháp giải bài toán này gợi ra ý tưởng có những lớp phương trình vi phân phi tuyến có thể tìm cách giải đúng.

Công trình này được hoàn thành với sự tài trợ của Chương trình Nghiên cứu cơ bản trong lĩnh vực Khoa học tự nhiên

Địa chỉ:
Viện Khoa học Kỹ thuật Xây dựng

Nhận ngày 24/12/1993

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Đăng Bích. Mất ổn định khí động của thanh hình trụ công xôn tựa trên gối đàn hồi. Tuyển tập công trình khoa học Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ 5, tập III (27-32), 1993.
2. Руководство по расчету зданий и сооружений на действие ветра. Стройиздат. М., 1978, 216с.

SUMMARY

ON THE AERODYNAMICAL INSTABILITY OF CYLINDRICAL BARS BASED ON ELASTIC SUPPORT WITH VISCOUS RESTRAINT

The aerodynamical instability is a special effect of the self-oscillation phenomenon. The occurence condition of this effect is the change of the aerodynamic parameters, such as the increase and decrease of the Reynolds coefficients.

In this paper the authors present an aerodynamic form, look for an exact solution to the non-linear differential equation with viscous restraint and analyse critical cases leading to the aerodynamic instability.

The obtained result gives an idea in exactly solving some non-linear differential equation classes.