

ẢNH HƯỞNG CỦA CÁC THAM SỐ ĐẾN DÁNG ĐIỀU DAO ĐỘNG PHI TUYẾN

NGUYỄN NHẬT LÊ

ĐẶT VẤN ĐỀ

Phương pháp giải tích nghiên cứu các hệ dao động phi tuyến đã được nhiều tác giả đề cập đến. Các phương pháp này thường dựa trên giả thiết về kích động bé. A. Told [1] đã chỉ ra rằng, lý thuyết kích động bé không thể cho biết rõ ràng "mức độ bé" và trong nhiều trường hợp không thể giải thích sự chuyển tiếp từ chế độ dao động này sang chế độ dao động khác. Trong [1] và [2] A. Told đã xây dựng nhiều phương pháp và dùng máy tính để khảo sát nhiều hệ phi tuyến khác nhau. Theo hướng đó, trong bài này, sự ảnh hưởng của tham số đến dáng điệu dao động phi tuyến được xét đến nhờ sự mô phỏng trên máy tính một số hệ phi tuyến đã được Nguyễn Văn Đạo nghiên cứu bằng phương pháp gần đúng của dao động phi tuyến [3].

1. MỞ ĐẦU

Trong [3] tác giả đã xét dao động của hệ phi tuyến với yếu tố đàn hồi có độ biến dạng tĩnh khá lớn. Lực lò xo tác dụng vào khối lượng M là:

$$f(x) = C_0(\Delta - x) + \beta_0(\Delta - x)^3 \quad (1.1)$$

trong đó: Δ - độ biến dạng của lò xo ở vị trí cân bằng tĩnh

C_0 - hằng số dương

β_0 - hằng số dương (đặc tính cứng) hoặc âm (đặc tính mềm)

Bằng cách đưa vào tham số bé ε , phương trình vi phân chuyển động của khối lượng M được viết ở dạng:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon \gamma x^2 + \varepsilon^2(-h\dot{x} - \beta x^3 + f(t, x)) \quad (1.2)$$

2. HỆ ÔTÔNÔM

2.1. Phương trình Duffing

Đầu tiên ta xét phương trình Duffing đã dẫn ra trong [3]:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon \gamma x^2 + \varepsilon^2(-h\dot{x} - \beta x^3) \quad (2.1)$$

bằng phương pháp giải tích, tác giả [3] đã kết luận: Dao động của hệ (2.1) là tắt dần với tần số phụ thuộc vào biên độ.

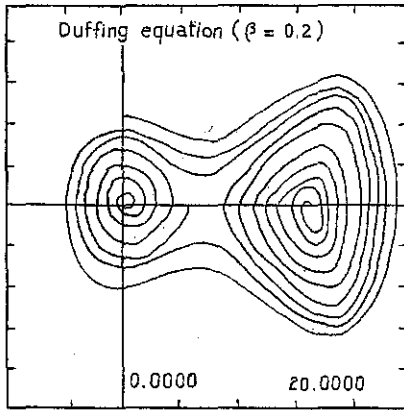
Khi mô phỏng hệ (2.1) trên máy tính với tham số bé được chọn là $\varepsilon = 0,25$ và do đó $\varepsilon^2 = 0,0625$ ta thấy:

a. Khi hệ có đặc tính cứng $\beta = 0, 2$: Hệ (2.1) có 3 điểm suy biến trong mặt phẳng pha là $x_1 = 0$; $x_2 = 5,52$ và $x_3 = 14,47$. Trong đó điểm x_2 là điểm yên, còn x_1, x_3 là hai điểm tiêu ổn định (hình 1).

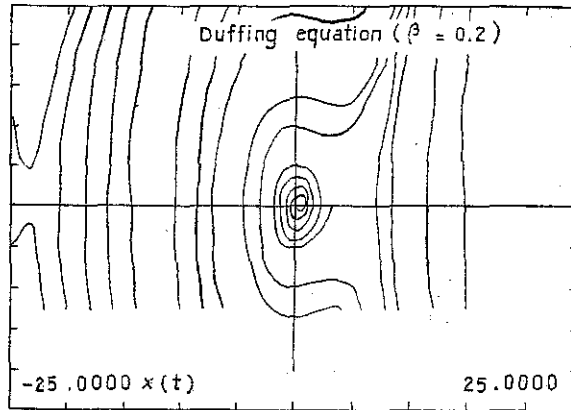
Như vậy tùy điều kiện đầu, các dao động sẽ tắt dần về x_1 hay x_3 . Ở lân cận gốc, dao động sẽ tắt dần về vị trí cân bằng.

b. Khi hệ có đặc tính mềm $\beta = -0, 2$:

Hệ (2.1) có 3 điểm suy biến là $x_1 = -2, 4$; $x_2 = 0$ và $x_3 = 3, 4$ trong đó x_2 là điểm tiêu ổn định (hình 2).



Hình 1



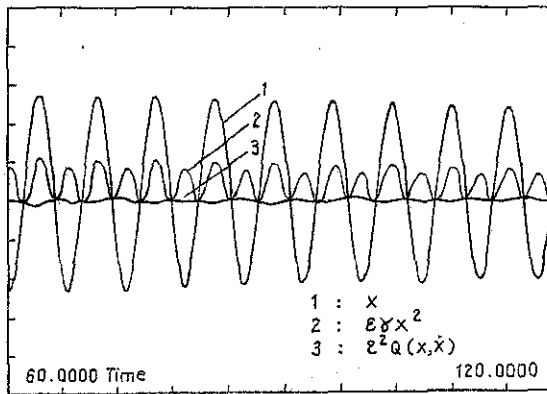
Hình 2

c. Ảnh hưởng của tham số bé ϵ : khi chọn hệ số cản $h = 0, 1$ và $\beta = 0, 2$ dáng điệu của dao động ở lân cận gốc được cho ở hình 3. Trong đó đường 1 biểu diễn dáng điệu $x(t)$; đường 2 biểu diễn thành phần $\epsilon\gamma x^2$; đường 3 biểu diễn thành phần $\epsilon^2(-hx - \beta x^3)$.

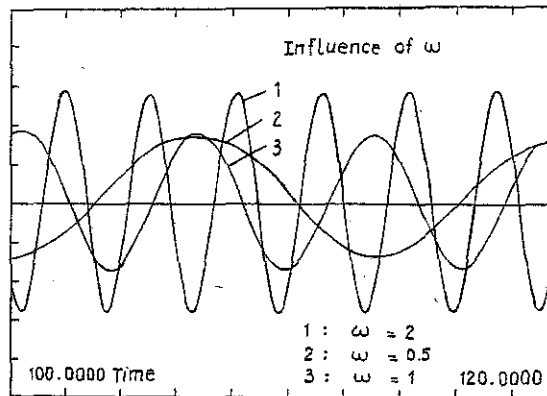
Nếu chọn tham số bé $\epsilon < 0, 25$ thì thành phần $\epsilon^2(\cdot) \approx 0$; nếu chọn ϵ quá lớn thì hệ sẽ không còn đặc trưng dao động tắt dần về gốc.

d. Ảnh hưởng của hệ số ω :

Xét hệ có đặc tính cứng ($\beta = 0, 2$): với các thông số được chọn như trước, ta thấy hệ chỉ có đặc trưng dao động tắt dần với $0, 34 \leq \omega \leq 2$. Trên hình 4 là dáng điệu $x(t)$ tương ứng với một số giá trị khác nhau của ω .



Hình 3



Hình 4

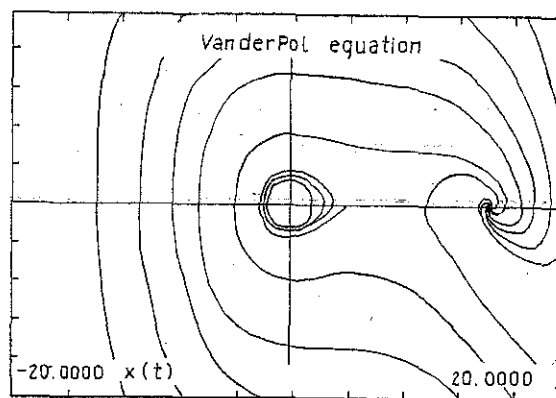
2.2. Phương trình Van-der-Pol

Xét phương trình :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \epsilon\gamma x^2 + \epsilon^2[-\beta x^3 + D(1 - x^2)\dot{x}] \quad (2.2)$$

trong đó D là hằng số dương.

Khi mô phỏng hệ (2.2) trên máy tính số, ta thấy trong mặt phẳng pha có một điểm tiêu ổn định $x = 14,5$ và một vòng giới hạn ổn định bao quanh gốc với bán kính $a \approx 2$ không phụ thuộc hằng số $D > 0$ (hình 5). Điều đó phù hợp với kết luận trong [3] là: Hệ (2.2) là hệ tự kích động với biên độ không đổi $a = 2$.



3. HỆ KHÔNG ÔTÔNÔM

3.1. Trường hợp kích động tuần hoàn

Xét hệ (1.2) với kích động tuần hoàn:

Hình 5

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon \gamma x^2 + \varepsilon^2 [-h\dot{x} - \beta x^3 + E \cos(pt)] \quad (3.1)$$

ở [3] trong trường hợp thứ nhất, tác giả đã xét sự qua cộng hưởng chính và đã nhận được quan hệ biên độ - tần số.

Kết quả mô phỏng hệ (3.1) trên máy tính số cho thấy:

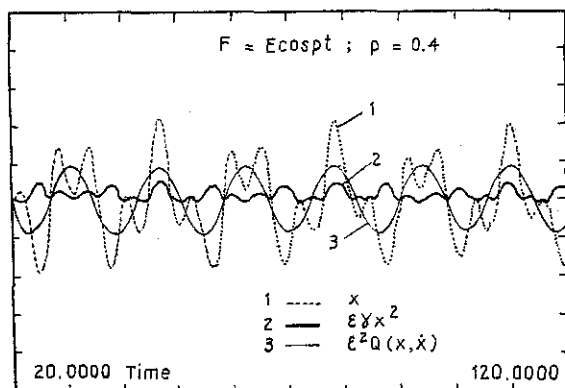
a. Với hằng số $E = 1,5$; $p = 0,4$; $\beta = 0,2$: Dạng điệu $x(t)$ được cho bởi đường 1 (hình 6). Trong trường hợp này, hàm $x(t)$ tuần hoàn với chu kỳ $T \approx 30$ sec.

Để thấy rõ ảnh hưởng của tham số bé ε và thành phần kích động điều hòa chúng ta quan sát đường 2 (thành phần $\varepsilon(\cdot)$) đã được khuếch đại 5 lần và đường 3 (thành phần $\varepsilon^2(\cdot)$).

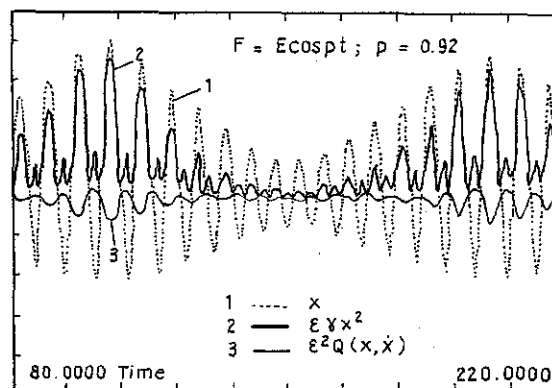
b. Thay đổi giá trị của tham số p ta thấy khi $p \approx 0,92$ thì có hiện tượng phách với biên độ lớn (hình 7) vì lúc này hệ đã gần cộng hưởng.

Dạng điệu $x(t)$ được cho bởi đường 1. Dạng điệu các thành phần $\varepsilon(\cdot)$ và $\varepsilon^2(\cdot)$ được cho bởi đường 2 và đường 3.

c. Khi hệ có đặc tính mềm ($\beta = -0,2$): Dạng điệu của các đường cong không thay đổi so với hệ có đặc tính cứng.



Hình 6



Hình 7

3.2. Trường hợp kích động tham số

Xét hệ (1.2) với kích động tham số:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon \gamma x^2 + \varepsilon^2 [-h\dot{x} - \beta x^3 + \mu x \cos(pt)] \quad (3.2)$$

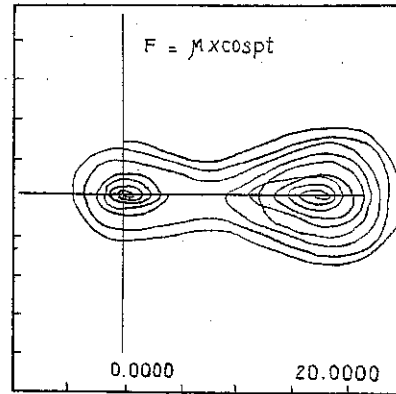
Tác giả [3] trong trường hợp 2 đã xét sự qua cộng hưởng tham số và đã nhận được quan hệ biên độ - tần số.

Khi mô phỏng (3.2) trên máy tính số đối với hệ có đặc tính cứng ta thấy:

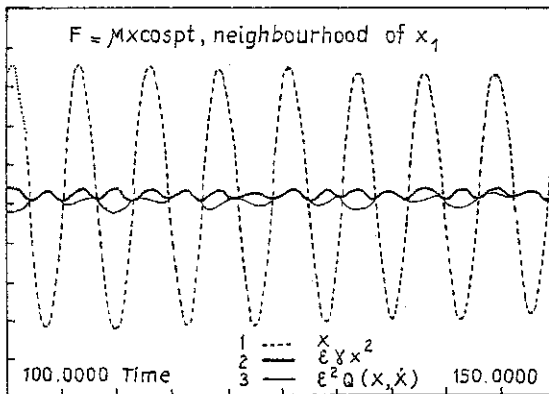
a. Với $p = 0,4$ và $\mu = 1,2$: trên mặt phẳng pha, hệ (3.2) có 3 điểm suy biến $x_1 = 0$; $x_2 = 4,5$ và $x_3 = 14,5$. Trong đó x_2 là điểm yên, còn x_1 và x_3 là điểm tiêu ổn định (hình 8). Ở lân cận x_1 , hệ dao động tắt dần về gốc. Tùy theo điều kiện đầu, hệ có thể tắt dần trở về x_1 hoặc x_3 , hệ cũng có thể dao động, quỹ đạo pha bao lấy x_1 và x_3 .

b. Dáng điệu các đường cong lân cận x_1 có đặc tính điều hòa (hình 9) còn dáng điệu các đường cong lân cận x_3 có đặc tính tuần hoàn (Hình 10).

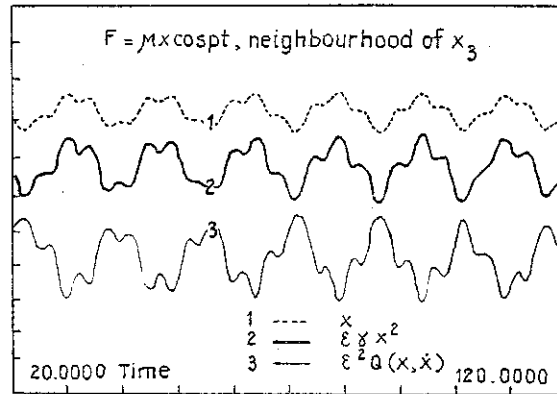
c. Đối với hệ có đặc tính mềm: Chỉ có vị trí gốc là điểm tiêu ổn định. còn 2 vị trí khác là điểm yên.



Hình 8



Hình 9



Hình 10

4. KẾT LUẬN

Đã mô phỏng trên máy tính số hệ dao động phi tuyến chứa yếu tố đàn hồi có độ biến dạng tĩnh lớn. Hệ này đã được tác giả [3] nghiên cứu bằng phương pháp gần đúng của lý thuyết dao động phi tuyến, kết hợp với máy tính số.

Đã xét giá trị bằng số của tham số bé và xét ảnh hưởng của một số tham số đến dáng điệu của hệ phi tuyến ôtônôm và không ôtônôm với kích động tuần hoàn và kích động tham số.

Các kết quả được cho ở dạng đồ thị: ở lân cận vị trí cân bằng, các kết quả thu được đều phù hợp với kết luận đã dẫn ra ở [3].

Công trình này được hoàn thành với sự tài trợ của chương trình nghiên cứu cơ bản trong lĩnh vực khoa học tự nhiên.

Địa chỉ:
Trường đại học Bách khoa HN

Nhận ngày 20/10/1994
(xem tiếp trang 28)