

# XÁC ĐỊNH THAM SỐ CỦA DẦM BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐO DAO ĐỘNG

NGUYỄN CAO MỆNH, TRẦN TRỌNG TOÀN

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Khi giải quyết một số vấn đề cơ học, người ta thường lập mô hình toán học, trong đó đưa vào các tham số cơ bản của hệ cơ học như các kích thước hình học, tính chất vật liệu, các điều kiện biên,...

Khi biết các tham số cơ bản và tải trọng tác động, người ta dùng mô hình toán học để đánh giá phản ứng của hệ. Đó là nội dung cơ bản của bài toán thiết kế. Ngược lại, đối với các công trình đã tồn tại và đang sử dụng, việc đo đạc phản ứng và kích động để xác định lại các tham số ứng với một mô hình thích hợp nào đó là một nội dung của bài toán đồng nhất hóa. Bài toán này nhằm chẩn đoán trạng thái của hệ trong điều kiện thực tại với các loại tải trọng khác nhau. Lý thuyết đồng nhất hóa các hệ động lực nói chung đã được viết trong nhiều công trình [1], nhưng trong các hệ cơ học, đặc biệt là các hệ có tham số phân bố việc ứng dụng để giải quyết các bài toán thực tế còn gặp nhiều khó khăn [2, 3].

Trong bài này, chúng tôi đề cập đến một bài toán đồng nhất hóa là xác định độ dài của dầm bị ngàm một đầu, một đầu tự do, dưới tác động của tải trọng ngang bằng phương pháp đo dao động tại một số điểm trên dầm.

## 2. DAO ĐỘNG CỦA DẦM ĐÀN HỒI

Ở đây chúng ta hãy tóm tắt một số kết quả đã biết về dao động của dầm đàn hồi, một đầu ngàm, một đầu tự do và chịu lực tác dụng của tải trọng phân bố phụ thuộc thời gian [4] (hình 1).

Hệ tọa độ, kích thước của dầm và tải trọng được cho trên hình 1.

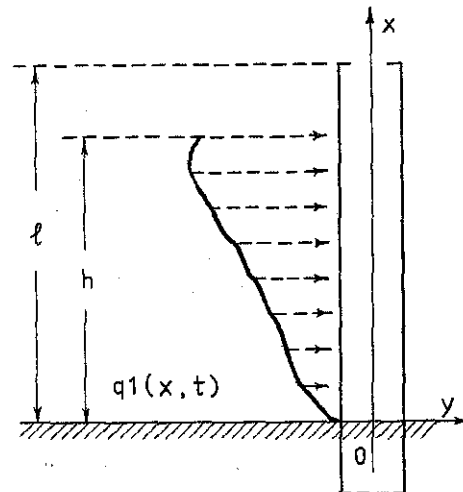
Phương trình chuyển động có dạng:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EJ(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] + m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\alpha m \frac{\partial y}{\partial t} = -q_1(x, t) \quad (2.1)$$

trong đó  $m(x)$  là khối lượng trên một đơn vị dài,  $EJ(x)$  là độ cứng chống uốn.

Trong trường hợp dầm có tiết diện không thay đổi từ (2.1) ta có phương trình:

$$a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\alpha \frac{\partial y}{\partial t} = q(x, t) \quad (2.2)$$



Hình 1

trong đó:

$$a = \sqrt{\frac{EJ}{m}}; \quad q(x, t) = -\frac{q_1(x, t)}{m}$$

Điều kiện biên:

$$y(0, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(\ell, t) = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(\ell, t) = 0 \quad (2.3)$$

Điều kiện ban đầu:

$$y(x, 0) = y_0(x); \quad \dot{y}(x, 0) = \dot{y}_0(x) \quad (2.4)$$

Từ bài toán giá trị riêng và hàm riêng với các điều kiện biên (2.3) ta tìm được giá trị riêng  $k_j$ , là nghiệm của phương trình:

$$\cos(k_j \ell) \operatorname{ch}(k_j \ell) + 1 = 0 \quad (2.5)$$

và hàm riêng có dạng:

$$X_j(x) = B(k_j, \ell)C(k_j, x) - A(k_j, \ell)D(k_j, x) \quad (2.6)$$

trong đó:

$$A(k_j, x) = 0,5[\operatorname{ch}(k_j x) + \cos(k_j x)]$$

$$B(k_j, x) = 0,5[\operatorname{sh}(k_j x) + \sin(k_j x)]$$

$$C(k_j, x) = 0,5[\operatorname{ch}(k_j x) - \cos(k_j x)]$$

$$D(k_j, x) = 0,5[\operatorname{sh}(k_j x) - \sin(k_j x)]$$

Sau khi có giá trị riêng và hàm riêng, người ta khai triển  $q(x, t)$  theo hàm riêng:

$$q(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} X_j(x)S_j(\ell, t) \quad (2.7)$$

trong đó:

$$S_j(\ell, t) = \frac{\int_0^{\ell} q(x, t)X_j(x)dx}{\int_0^{\ell} X_j^2(x)dx} \quad (2.8)$$

và tìm nghiệm của phương trình (2.2) dưới dạng:

$$y(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} F_j(t)X_j(x) \quad (2.9)$$

Thay (2.9) vào (2.2) ta được hệ phương trình xác định  $F_j(t)$ :

$$\ddot{F}_j + 2\alpha\dot{F}_j + \omega_j^2 F_j = S_j(\ell, t) \quad (2.10)$$

trong đó:

$$\omega_j^2 = a^2 k_j^4 \quad (2.11)$$

Nghiệm dừng của phương trình (2.10), không phụ thuộc vào điều kiện đầu có thể viết dưới dạng:

$$F_j(\ell, t) = \int_{-\infty}^t R_j(t - \tau)S_j(\ell, \tau)d\tau \quad (2.12)$$

trong đó:

$$R_j(u) = \begin{cases} \frac{1}{\beta_j} e^{-u\alpha} \sin(\beta_j u) & \text{với } u \geq 0 \\ 0 & \text{với } u \leq 0 \end{cases}$$

$$\beta_j^2 = \omega_j^2 - \alpha^2$$

Trong trường hợp đặc biệt:

$$q(x, t) = Q_1(x) \sin \omega t + Q_2(x) \cos \omega t \quad (2.13)$$

ta sẽ có:

$$S_j(\ell, t) = a_j(\ell) \sin \omega t + b_j(\ell) \cos \omega t; \quad (2.14)$$

$$a_j(\ell) = \frac{\int_0^\ell Q_1(x) X_j(x) dx}{\int_0^\ell X_j^2(x) dx}; \quad b_j(\ell) = \frac{\int_0^\ell Q_2(x) X_j(x) dx}{\int_0^\ell X_j^2(x) dx} \quad (2.15)$$

Nghiệm dừng của phương trình (2.10) trở thành:

$$F_j(\ell, t) = A_j(\ell) \sin \omega t + B_j(\ell) \cos \omega t \quad (2.16)$$

với:

$$A_j(\ell) = \frac{a_j(\ell)(\omega_j^2 - \omega^2) + 2\alpha\omega b_j(\ell)}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} \quad (2.17)$$

$$B_j(\ell) = \frac{b_j(\ell)(\omega_j^2 - \omega^2) - 2\alpha\omega a_j(\ell)}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha\omega^2} \quad (2.18)$$

Dao động cưỡng bức của dầm là:

$$y(x, \ell, t) = \sum_{j=1}^{\infty} [X_j(x) A_j(\ell) \sin \omega t + X_j(x) B_j(\ell) \cos \omega t] \quad (2.19)$$

và biên độ dao động có dạng:

$$Y(x, \ell) = \sqrt{\left[ \sum_{j=1}^{\infty} X_j(x) A_j(\ell) \right]^2 + \left[ \sum_{j=1}^{\infty} X_j(x) B_j(\ell) \right]^2} \quad (2.20)$$

Như vậy về mặt nguyên tắc, đối với bài toán thuận, khi biết các tham số của dầm và lực tác dụng, ta tìm được biên độ dao động tại vị trí bất kỳ của dầm.

### 3. BÀI TOÁN ĐỒNG NHẤT HÓA

Bây giờ giả sử ta biết tải trọng phân bố  $q_1(x, t)$  và đo được biên độ dao động tại một số điểm của dầm. Vấn đề đặt ra là, nếu như từ ý nghĩa vật lý và trong các trường hợp thực tiễn nào đó ta có thể coi dầm tuân theo các điều kiện biên như trên, ta hãy xác định độ dài của dầm kể từ thiết diện bắt đầu bị ngâm đến mút tự do.

Giả sử rằng, tại vị trí  $\ell - h_k$  nào đó trên dầm (với  $h_k$  đã cho và  $h_0 = 0$ ) ta đo được biên độ dao động  $D_k$ , khi đó, để tìm độ dài của dầm ta cần giải phương trình:

$$Y(\ell - h_k, \ell) = D_k \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

trong đó  $Y(\ell - h_k, \ell)$  được cho bởi công thức (2.20) sau khi thay  $x$  bởi  $\ell - h_k$ . Vì  $h_k$  đã cho nên phương trình (3.1) được coi là phương trình để xác định độ dài  $\ell$ .

Phương trình (3.1) là phương trình phức tạp đối với  $\ell$ , vì các chuỗi trong công thức (2.20) là chuỗi vô hạn, ta cần phải đưa ra điều kiện gần đúng để chuyển các chuỗi trên thành hữu hạn. Mặt khác, trong các biểu thức của  $X_j(x)$ ,  $A_j(\ell)$  và  $B_j(\ell)$  đều có chứa giá trị riêng  $k_j$ , mà  $k_j$  lại là nghiệm của phương trình chứa độ dài  $\ell$  theo công thức (2.5). Do đó về trái của (3.1) không thể biểu diễn dưới dạng biểu thức giải tích và càng không thể giải trực tiếp để tìm biểu thức của theo các tham số khác của dầm cũng như của tải trọng. Vì vậy, ta sẽ giải quyết bài toán trên bằng phương pháp số và vẽ đồ thị. Từ phương trình (3.1) ta chuyển về dạng:

$$F_k(\ell) = Y(\ell - h_k, \ell) - D_k = 0 \quad (3.2)$$

Khi  $k = 0$  ta có:

$$F_0(\ell) = Y(\ell, \ell) - D_0 \quad (3.3)$$

trong với giá trị biên độ dao động  $D_0$  ở đầu tự do của dầm.

Để giải phương trình (3.2), ta chọn  $\ell$  biến thiên trong một khoảng nào đó, là giới hạn dưới và trên của bài toán thực tế, vẽ đồ thị hàm số  $F_k = F_k(\ell)$  trên mặt phẳng  $(\ell, F_k)$ . Giao điểm của đồ thị và trục hoành chính là các giá trị có thể có của  $\ell$ . Như phân tích trong bài toán thuận, khi cho giá trị  $\ell$ ,  $h_k$  và  $D_k$  cùng với các tham số khác, ta phải tính  $k_j$ ,  $\omega_j$ ,  $X_j(\ell - h_k)$ ,  $A_j(\ell)$ ,  $B_j(\ell)$  và cuối cùng là giá trị  $F_k(\ell)$ . Sơ đồ khối thể hiện quá trình tính toán và lập trình được cho trên sơ đồ 1.

Cần chú ý rằng sau khi tính toán và vẽ đồ thị, để xác định chính xác hơn giao điểm của đồ thị với trục hoành ta dùng chương trình chia đôi khoảng cách giữa hai điểm nhận giá trị trái dấu của hàm số  $F(\ell)$ .

Tiêu chuẩn:

$$A_j^2 + B_j^2 < \epsilon \quad (3.4)$$

với  $\epsilon$  nhỏ tùy ý cho trước, dùng để lấy một số hữu hạn các thành phần của các tổng trong công thức (2.20), được lý giải trong [7].

Để minh họa cho phương pháp đã trình bày, ta xét ví dụ sau:

### Ví dụ 1

Một ống trụ bằng thép thẳng đứng, một đầu ngàm, một đầu tự do với bán kính ngoài  $R = 0,1 \text{ m}$ , bán kính trong  $r = 0,09 \text{ m}$ , chịu tải trọng phân bố đều ( $h = \ell$ ) có dạng (2.13) với:  $Q_1 = 9810 \text{ N/m}$ ;  $Q_2 = 2Q_1$ ;  $\omega = 11 \text{ rad/s}$ ;  $\alpha = 0,5$ .

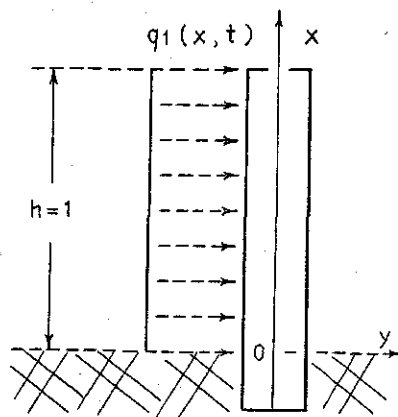
Ngoài ra, các tham số khác của ống trụ là:  $\rho = 7,8 \cdot 10^4 \text{ N/m}^3$ ;  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ .

Mô men quán tính  $J$  và khối lượng  $m$  được tính theo công thức:

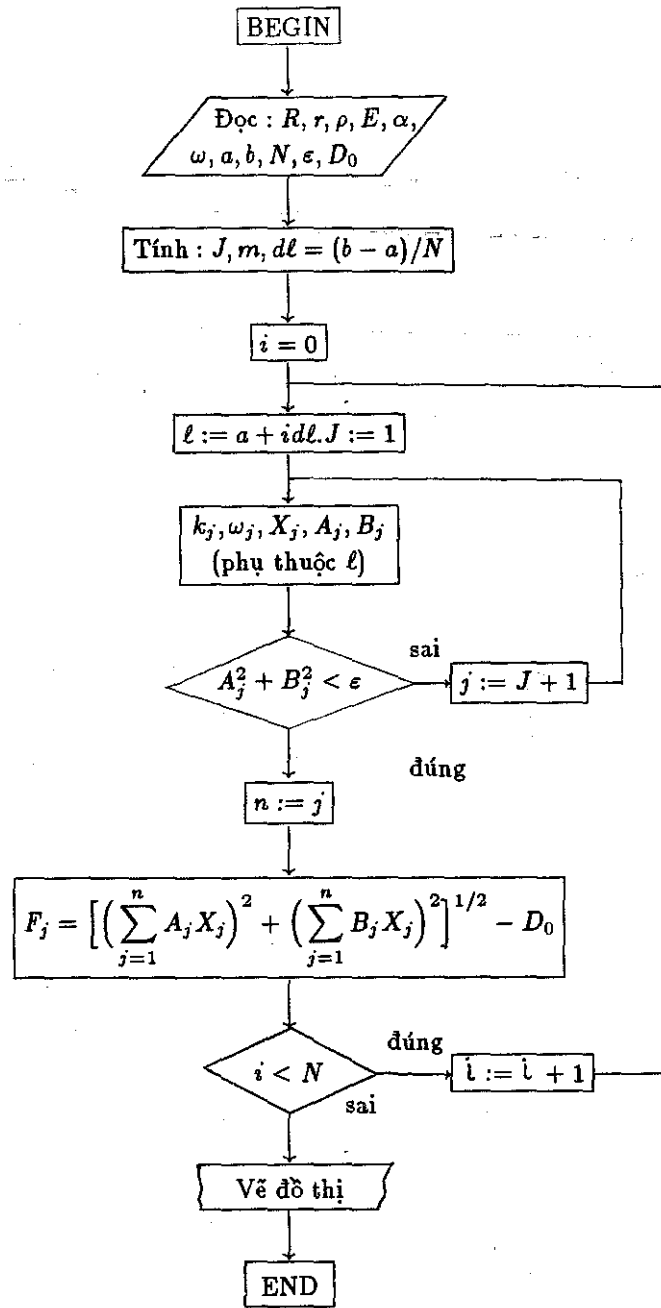
$$J = \pi(R^4 - r^4)/4; \quad m = \rho\pi(R^2 - r^2). \quad (\text{xem hình 2}).$$

Giả sử ta đo được biên độ dao động ở đầu cọc là  $0,016874 \text{ m}$ . Ta hãy xác định độ dài của cọc kể từ thiết diện bị ngàm đến nút tự do.

Đưa các tham số của ví dụ 1 vào chương trình trên và vẽ đồ thị hàm  $F_0 = F_0(\ell)$  ta nhận được đường cong trên hình 3 (độ chính xác  $\epsilon = 10^{-6}$ ).



Hình 2



Sơ đồ 1

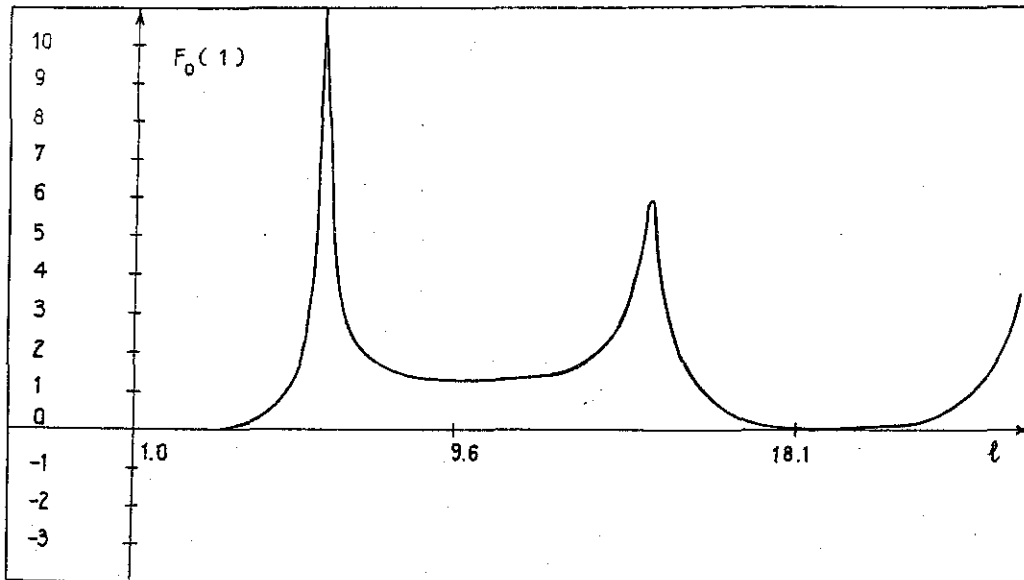
Hình 3 cho ta dáng điệu tổng thể của đường cong  $F_0 = F_0(l)$ . Tuy nhiên, để nhận biết rõ những giao điểm với trục hoành, ta phóng đại đường cong này lên nhiều lần và được hình 4.

Từ hình vẽ thấy rằng, ta nhận được nhiều giao điểm của đường cong với trục hoành và ta ký hiệu lần lượt là:  $l_{01}, l_{02}, l_{03}, \dots$

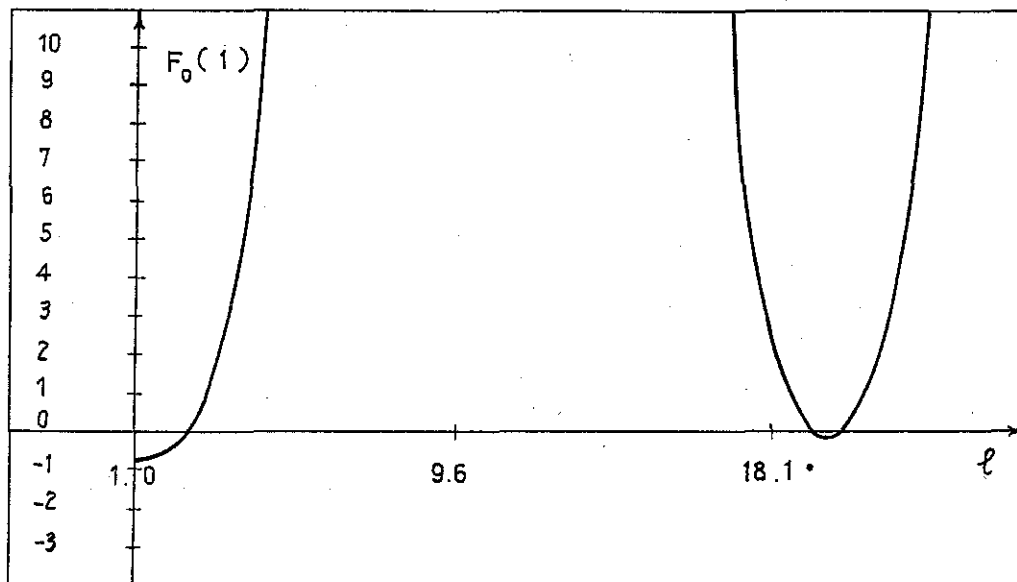
Trong thực tế, chỉ có một giá trị của  $l_{0i}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) là chấp nhận được.

Để tìm giá trị ấy và loại trừ các giá trị khác, ta giải bài toán trên với các giá trị đo được của biên độ dao động tại các điểm khác trên dầm. Chẳng hạn, ta lấy  $h_1 = 1 \text{ m}$ ,  $h_2 = 2 \text{ m}$ , ta đo được các biên độ dao động tương ứng là:  $D_1 = 0,117564 \text{ m}$ ;  $D_2 = 0,245461 \text{ m}$ .

Vẽ đồ thị các hàm  $F_1 = F_1(l)$ ,  $F_2 = F_2(l)$  ta được hai đồ thị khác của hàm  $F_k(l)$ .



Hình 3



Hình 4

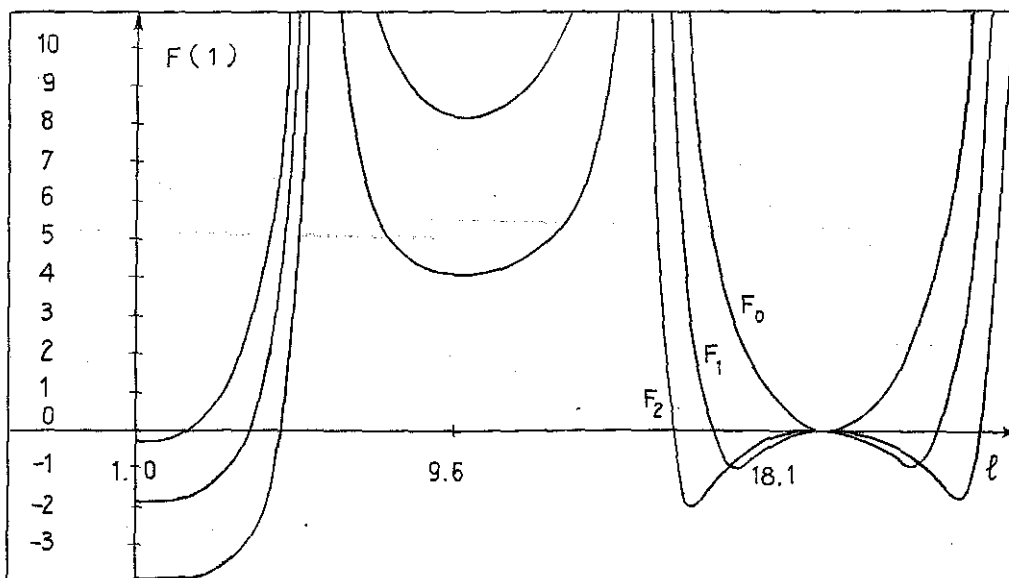
Vẽ ba đồ thị trên mặt phẳng  $(l, F_k)$  ứng với  $k = 0, 1, 2$ . Ta nhận thấy rằng, trên đoạn  $[1; 25]$  có một giao điểm với trục hoành hầu như cả 3 đường cong đều đi qua (xem hình 5).

Chúng ta sẽ lấy hiện tượng này làm căn cứ để chọn giá trị  $l$  tồn tại trong thực tế. Kết quả trên đồ thị được cho trong bảng 1, trong đó liệt kê các giao điểm của từng đường cong với trục hoành.

Từ đồ thị trên hình 5 và bảng 1, ta tìm được độ dài của cọc kể từ thiết diện bị ngầm đến nút tự do bằng 20 m.

Trong trường hợp tần số kích động thay đổi cho bởi  $\omega_i = \omega + i\Delta\omega$  với  $i = 0, 1, 2, \dots$  ta đo được biên độ dao động của đầu cọc là  $G_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) và do đó hàm  $F_i(l)$  có dạng:

$$F_i = Y(l, \omega + i\Delta\omega) - G_i = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$



Hình 5

Bảng 1

Vị trí đo	Biên độ đo	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$l_4$	$l_5$	$l_6$
$l$	0,015018	2,3182			19,1422	20,0000	
$l-1$	0,117564		4,0431	16,5147	19,1456	20,0000	22,6732
$l-2$	0,245461		4,8638	15,4509	19,1852	20,0000	23,7743

(với độ chính xác  $|A_j^2 + B_j^2| < 10^{-6}$ )

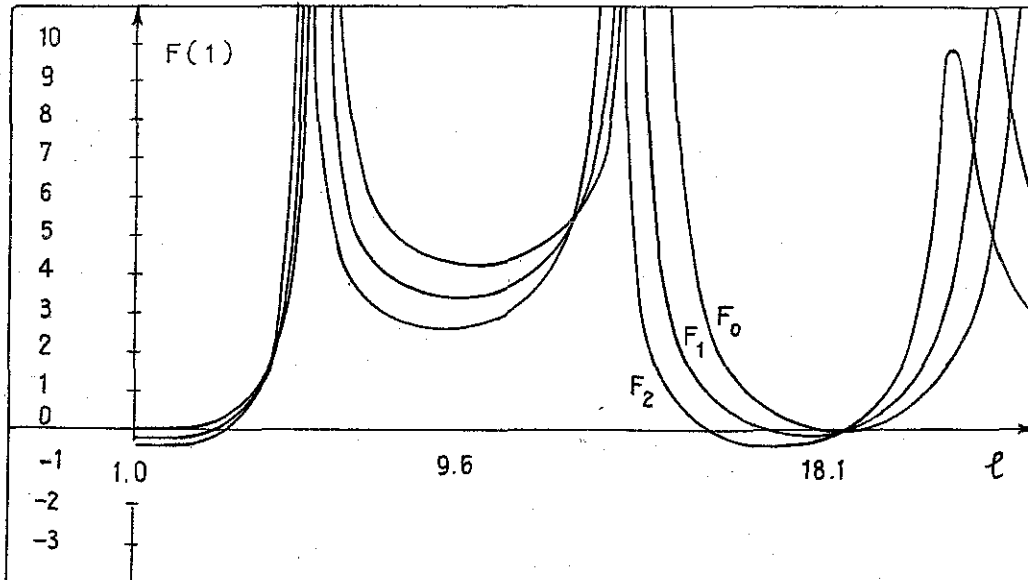
Vẽ đồ thị  $F_i = F_i(l)$  ta sẽ được các đường cong. Giao điểm của các đường cong này với trục hoành cho ta đánh giá được giá trị của  $l$  tại một giao điểm chung của các đường cong.

Để thấy rõ điều này, ta hãy đo dao động tại đầu cọc ứng với các tần số kích động ngoài thay đổi  $\omega_i = \omega + i\Delta\omega$  ( $\omega = 11$  rad/s;  $\Delta\omega = 1$  rad/s;  $i = 0, 1, 2$ ) và các tham số như ví dụ 1, vẽ đồ thị ba hàm này trên hình 6 và lập bảng 2 giống như trên.

Bảng 2

Tần số lực kích động	Biên độ đo	Các nghiệm thu được		
		$l_1$	$l_2$	$l_3$
11	0,015018	2,3182	19,1422	20,0000
12	0,043444	2,9794	17,4852	20,0000
13	0,092560	3,4992	16,0412	20,0000

(với độ chính xác  $|A_j^2 + B_j^2| < 10^{-6}$ )



Hình 6

Từ hình 6 và bảng 2 ta cũng được kết quả  $l = 20 \text{ m}$  là độ dài của cọc kể từ thiết diện bị ngầm đến đầu mút tự do như trên.

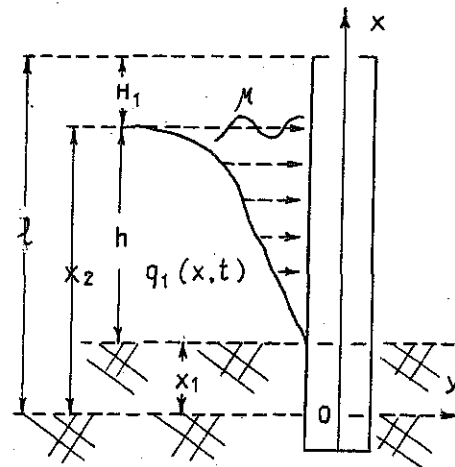
Để kiểm tra lại kết quả đã nhận được, chúng tôi đã giải bài toán thuận để tìm lại biên độ dao động tại những điểm đã đo. Lời giải tìm được xác nhận kết quả trên là đúng.

### Ví dụ 2

Một chiếc cọc thẳng đứng hình ống trụ bằng thép (kích thước thiết diện và vật liệu như trong ví dụ 1) có một đầu mút cắm sâu vào đáy biển, độ sâu của nước biển lúc nước yên tĩnh là  $h$ , cọc có phần nằm trên mặt nước  $H_1$ . Dưới tác dụng của sóng biển, cọc chịu lực cường độ bức phân bố theo chiều sâu  $[x_1, x_2]$  (hình 7). Hãy tìm độ dài  $l$  của cọc kể từ thiết diện được coi là ngầm đến đầu tự do của cọc ( $l \geq H_1 + h$ ).

Để giải quyết vấn đề này, trước hết ta xác định lực tác dụng của sóng lên cọc. Giả sử trong điều kiện của bài toán có thể coi sóng biển là sóng Airy.

Chọn trục  $Oy$  hướng theo phương truyền sóng, trục  $Ox$  trùng với trục của cọc và hướng từ dưới lên trên.



Hình 7

Theo [6] người ta đã thiết lập được các mối quan hệ sau đây:

$\mu = (H/2) \cos(ky - \omega t)$  là phương trình mặt sóng;  $k = 2\pi/\lambda$  là số sóng,  $\lambda$  là bước sóng;  $\omega = 2\pi/T$  là tần số sóng,  $T$  là chu kỳ sóng;

$$\omega^2 = gkth(kh) \quad (3.5)$$

với  $g$  là gia tốc trọng trường;

Trên hình 7:  $x_1$  là khoảng cách từ thiết diện bị ngầm đến đáy biển.

Vận tốc của hạt nước theo hai phương  $x$  và  $y$  là



$$\begin{aligned} V_y &= 0,5\omega H \operatorname{ch} kx \cos(ky - \omega t) / \operatorname{sh} kh, \\ V_x &= 0,5\omega H \operatorname{sh} kx \sin(ky - \omega t) / \operatorname{sh} kh. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Gia tốc của hạt nước theo hai phương  $x$  và  $y$  là

$$\begin{aligned} a_y &= 0,5\omega^2 H \operatorname{ch} kx \sin(ky - \omega t) / \operatorname{sh} kh, \\ a_x &= 0,5\omega^2 H \operatorname{sh} kx \cos(ky - \omega t) / \operatorname{sh} kh. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Từ [6] người ta tính được lực của sóng tác động lên cọc theo công thức Morison:

$$q_1 = C_I a_y + C_D V_y |V_y| \quad (3.8)$$

trong đó:

$$C_I = C_i \rho_1 \pi D^2 / 4 \quad (3.9)$$

là hệ số quán tính;  $\rho_1$  là mật độ của nước;  $D$  là đường kính vật cản.

$$C_D = 0,5 C_{d\rho_1} D \quad (3.10)$$

là hệ số cản vận tốc (xem [5]).

Nếu coi vận tốc của cọc là nhỏ so với vận tốc của nước, sau khi tuyến tính hóa công thức Morison (xem [6]), ta được:

$$q_1 = C_I a_y + C_D \bar{V}_y V_y \quad (3.11)$$

trong đó:

$$\begin{aligned} \bar{V}_y &= 8E_1 / (3\pi) = 4\omega H \operatorname{ch}(ky) / [3\pi \operatorname{sh} kh] \\ E_1 &= 0,5\omega H \operatorname{ch} ky / \operatorname{sh} kh \end{aligned} \quad (3.12)$$

Thay (3.12), (3.6), (3.7) vào (3.11) ta được:

$$\begin{aligned} q_1 &= 0,5C_I \omega^2 H \operatorname{ch} kx \sin(ky - \omega t) / \operatorname{sh} kh + \\ &+ 4C_D (\omega H)^2 \operatorname{ch}^2 kx \cos(ky - \omega t) / [3\pi \operatorname{sh}^2 kh]; \end{aligned} \quad (3.13)$$

Do chọn hệ trục tọa độ như trên nên ở vị trí  $y = 0$ , ta có:

$$\begin{aligned} q_1(x, t) &= -0,5C_I \omega^2 H \operatorname{ch} kx \sin \omega t / \operatorname{sh} kh + \\ &+ 4C_D (\omega H)^2 \operatorname{ch}^2 kx \cos \omega t / [3\pi \operatorname{sh}^2 kh]; \end{aligned} \quad (3.14)$$

Đặt:

$$A_0 = 0,5C_I \omega^2 H / \operatorname{sh} kh; \quad (3.15)$$

$$B_0 = 4C_D (\omega H)^2 / [3\pi \operatorname{sh}^2 kh]; \quad (3.16)$$

Thì:

$$q_1(x, t) = -A_0 \operatorname{ch} kx \sin \omega t + 0,5B_0 [1 + \operatorname{ch} 2kx] \cos \omega t \quad (3.17)$$

Khi đó phương trình dao động của cọc sẽ là:

$$a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\alpha \frac{\partial y}{\partial t} = -q_1(x, t) / m = q(x, t) \quad (3.18)$$

với  $a^2 = EJ/m$ .

Phương trình (3.18) có dạng giống phương trình (2.2) nhưng ở đây:

$$q(x, t) = Q_1(x) \sin \omega t + Q_2(x) \cos \omega t; \quad (3.19)$$

$$Q_1(x) = A_0 \operatorname{ch} kx/m; \quad (3.20)$$

$$Q_2(x) = -0,5B_0[1 + \operatorname{ch} 2kx]/m; \quad (3.21)$$

Ta thấy (3.19) hoàn toàn giống (2.13).

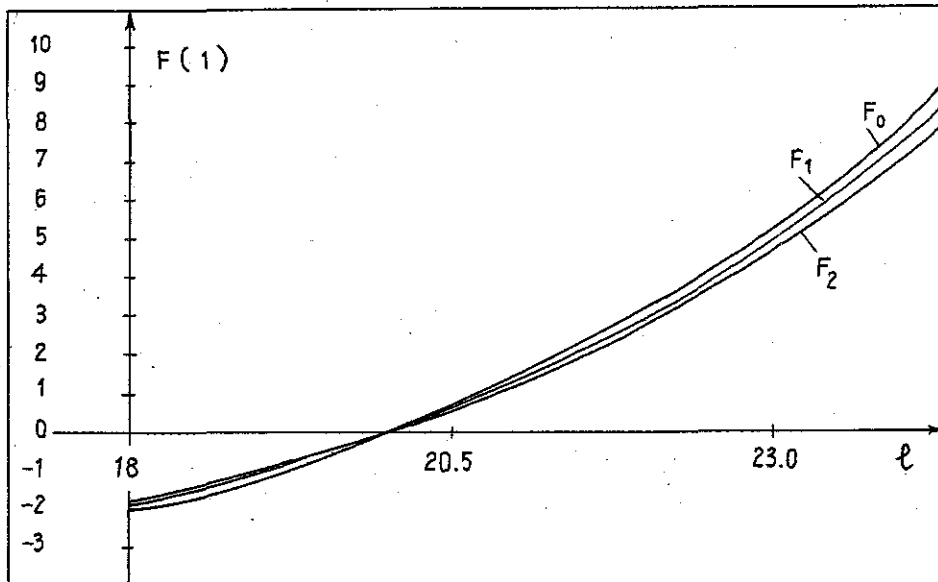
Đến đây làm giống như phần trên, ta sẽ đi đến biên độ dao động của cọc có dạng (2.20), trong đó  $A_j$  và  $B_j$  được xác định bởi (2.17) và (2.18), còn  $a_j$  và  $b_j$  xác định từ công thức sau:

$$a_j(\ell) = \frac{\int_{x_1}^{x_2} Q_1(x) X_j(x) dx}{\int_0^\ell X_j^2(x) dx}; \quad b_j(\ell) = \frac{\int_{x_1}^{x_2} Q_2(x) X_j(x) dx}{\int_0^\ell X_j^2(x) dx} \quad (3.22)$$

Giải bằng các số liệu đã cho trong ví dụ 1 và các thông số của môi trường biển như sau: độ sâu của nước  $h = 15 \text{ m}$  phần cọc trên mặt nước  $H_1 = 3 \text{ m}$ ; chu kỳ sóng Airy  $T = 6 \text{ s}$ ; độ cao sóng  $H = 1,2 \text{ m}$ ; mật độ nước  $\rho_1 = 1026 \text{ kg/m}^3$ ; các tham số khác  $C_d = 1$ ;  $C_i = 2$ ; tần số sóng tính từ  $\omega = 2\pi/T$ ; số sóng tính từ (3.5), ở đây:  $x_1 = \ell - (h + H_1)$ ;  $x_2 = \ell - H_1$ .

Đến đây, sau khi tính các tích phân (3.22), lập trình cho máy vi tính theo sơ đồ đã cho ở sơ đồ 1 và làm tương tự như trường hợp trên, ta có kết quả trên hình 8 và bảng 3.

Đồ thị trên hình 8 vẽ trên đoạn  $[18; 28]$ .



Hình 8

Bảng 3

Vị trí đo	Biên độ đo	Các nghiệm thu được
$\ell$	0,274137 m	20,003 m
$\ell - 1$	0,255271 m	20,003 m
$\ell - 2$	0,236416 m	20,003 m

(với độ chính xác  $|A_j^2 + B_j^2| < 10^{-6}$ )

Từ hình 8 và bảng 3 ta có nghiệm  $l \approx 20 m$ . Từ đó suy ra:  $x_1 = l - (h + H_1) = 2 m$ .

Trong trường hợp độ cao sóng  $H$  không đổi nhưng chu kỳ sóng thay đổi cho bởi  $T_i = T + i\Delta T$  với  $i = 0, 1, 2, \dots$  ta đo được biên độ dao động của đầu cọc là  $G_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) và do đó hàm  $F_i(l)$  có dạng:

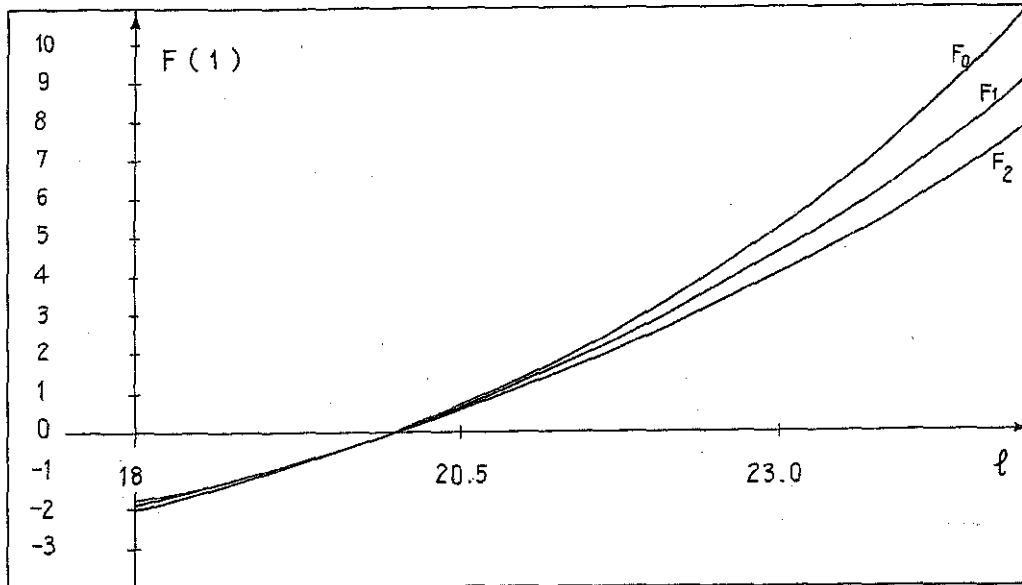
$$F_i = Y(l, T + i\Delta T) - G_i = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

Vẽ đồ thị  $F_i = F_i(l)$  sẽ được các đường cong. Giao điểm của các đường cong này với trục hoành cho ta đánh giá được giá trị của  $l$  tại giao điểm chung của các đường cong.

Để thấy rõ điều này, ta hãy đo dao động tại đầu cọc ứng với các tần số kích động ngoài thay đổi theo  $T_i$ :

$$T_i = T + i\Delta T; \quad (T = 6 s; \Delta T = 1 s; i = 0, 1, 2)$$

với các tham số như ví dụ 1 và các tham số của biển như trên, vẽ đồ thị ba hàm này trên hình 9 và lập bảng 4 giống như trên.



Hình 9

Bảng 4 (đo tại đầu cọc)

Chu kỳ sóng	Tần số sóng	Số sóng	Biên độ đo	Các nghiệm thu được
6 s	1,047198	0,118387	0,274137	20,003 m
7 s	0,897598	0,992909	0,305040	20,004 m
8 s	0,785398	0,076824	0,309556	20,003 m

(với độ chính xác  $|A_j^2 + B_j^2| < 10^{-6}$ )

Từ hình 9 và bảng 4 ta cũng có kết quả  $l \approx 20 m$  và  $x_1 = 2 m$ .

Chúng tôi đã lấy kết quả  $l \approx 20 m$  để kiểm tra bài toán thuận nhằm tìm lại biên độ dao động ở những điểm đã đo. Lời giải tìm được xác nhận các kết quả trên là đúng.

## KẾT LUẬN

Các kết quả đã trình bày ở trên cho ta thấy rằng bằng cách đo dao động tại một số điểm trên dầm một đầu ngàm và một đầu tự do dưới tác dụng của tải trọng cưỡng bức hoặc đo dao động tại một điểm với tần số cưỡng bức thay đổi ta có thể xác định được độ dài của cọc. Bài toán này được giải bằng phương pháp số. Việc chọn một giá trị trong bài toán đa trị được minh họa qua các ví dụ ứng với trường hợp tải trọng phân bố đều và tải trọng phân bố thay đổi theo độ dài cọc.

Trường hợp tải trọng cưỡng bức đa tần hoặc ngẫu nhiên sẽ được trình bày trong các bài báo sau.

Bài báo này được hoàn thành với sự tài trợ của chương trình nghiên cứu cơ bản.

Địa chỉ:  
Viện Cơ học, Trung tâm KHTN & CNQG

Nhận ngày 16/11/1994

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Льюнг. Идентификация систем. Теория для пользователя. Наука, М. 1991.
2. Редько С. Ф., Ушкалов В. Ф., Яковлев В. П. Идентификация механических систем. Наука Думка, Киев 1985.
3. Gladwell M. L. Inverse problems in Vibration 1986.
4. Phạm Khắc Hùng, Lều Thọ Trình, Đào Trọng Long, Lê Văn Quý. Ổn định và động lực học công trình. NXB Đại học và THCN 1974.
5. Brebbia C. A., Walker S. Dynamic analysis of offshore structures. Newnes - Butterworths London - Boston 1979.
6. Томас Доусон. Проектирование сооружений морских шельфа. Изд. Судостроение Ленинград 1986.
7. Сехниашвили Э. Колебания упругих систем. Изд. "Сабчота сакартвело". Тбилиси 1966.

## SUMMARY

### DETERMINATION OF BEAM CHARACTERISTICS BY ITS VIBRATION MEASUREMENT

On the basis of analysing the transverse vibration of a clamped - free beam, in this paper an inverse problem is investigated. The analytical method and computational programme have been presented for determination of the length of the beam when vibrations at some points on the beam with external distribution excitation or vibration at one point with some excited frequencies are measured. The obtained results from the illustration examples described in the paper give us the procedure for selecting one solution in multi-solution inverse problem.