Tạp chí Cơ học Journal of Mechanics, NCNST of Vietnam T. XVII, 1995, No 3 (20 - 26)

MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ VẤN ĐỀ ĐỒNG NHẤT HÓA DẦM ĐÀN HỒI BẰNG CÁC ĐẶC TRƯNG ĐỘNG LỰC HỌC

NGUYỄN TIẾN KHIÊM

MỞ ĐẦU

Đồng nhất hóa là một bài toán có nhiều ý nghĩa trong thực tế và đang được quan tâm một cách đặc biệt. Nội dung của nó là thiết lập mô hình của đối tượng đang tồn tại dựa trên những số liệu có thể đo đạc được về chính nó tại thời điểm đang xét. Thực tế đây là dạng bài toán ngược, mà các phương pháp giải vẫn còn đang trong thời kỳ phát triển. Trong bài báo này tác giả đặt ra và tìm phương pháp giải một số bài toán đồng nhất hóa dầm đàn hồi bằng các đặc trưng dao động. Kết cấu dạng này mô tả nhiều đối tượng thực tế đang được sử dụng như các móng cọc, tháp cao v.v...

1. MÔ HÌNH VÀ CÁC ĐẶC TRƯNG ĐỘNG LỰC HỌC

Xét dầm đàn hồi lý tưởng có:

$$m = \rho F = \text{const}; \quad k_0 = EJ = \text{const}.$$

Khi đó phương trình dao động uốn có dạng:

$$k_0 \frac{\partial^4 W(\overline{x}, t)}{\partial \overline{x}^4} + L^4 m \frac{\partial^2 W(\overline{x}, t)}{\partial t^2} = 0, \qquad 0 \leq \overline{x} \leq 1. \tag{1.1}$$

Từ (1.1) ta có thể tìm được các đặc trưng của dầm bao gồm:
- Tần số riêng:

$$\omega = \left(\frac{\lambda}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}} = \lambda^2 \sqrt{\frac{k_0}{L^4 m}} = \frac{\lambda^2}{L^2} a, \tag{1.2}$$

trong đó λ là tham số xác định từ điều kiện biên.

Dạng riêng:

$$\phi(\overline{x}) = C_1 \sin \lambda \overline{x} + C_2 \cos \lambda \overline{x} + C_3 \text{sh} \lambda \overline{x} + C_4 \text{ch} \lambda \overline{x} \tag{1.3}$$

với C_j là các hằng số tích phân, xác định từ điều kiện biên và chuẩn hóa.

Như vậy các đặc trưng động lực học của dầm phụ thuộc vào các thông số: E, ρ, J, F, L, λ. Ta gọi tập hợp các thông số này là các tham số mô hình, chúng có thể chia thành các nhóm:

+ Tham số kết cấu:
- Tham số vật lý: E, ρ.
- Tham số hình học: J, F, L.
+ Tham số biên: λ.

Từ (1.2) và (1.3) ta thấy ngay các tính chất sau:

Tính chất 1: Dạng riêng ít phụ thuộc vào các tham số kết cấu.

Tính chất 2: Tần số riêng là một đặc trưng phụ thuộc vào tất cả các tham số của hệ.

Những tính chất này cho thấy, dạng riêng chỉ đặc trưng cho điều kiện biên, vì vậy nó không chứa đựng thông tin về kết cấu (dĩ nhiên là trong trường hợp lý tưởng đang xét) và do đó sẽ có ít vai trò trong bài toán đồng nhất hóa. Trong khi đó, tần số riêng sẽ đóng vai trò chủ yếu, vì nó phụ thuộc vào tất cả các tham số của cơ hệ.

2. BÀI TOÁN TỔNG QUÁT VỀ ĐỒNG NHẤT HÓA

Bài toán đồng nhất hóa được thành lập trên cơ sở các dữ kiện:

A. Các đặc trưng đo đạc; B. Mô hình có thể chọn; C. Các tham số mô hình.

Như vậy đối với dầm đàn hồi ta có các dữ kiện:

A. Tần số và dạng riêng; B. Mô hình dầm chịu uốn thuần túy; C. Các tham số (S, b).

Bài toán tổng quát: Từ các số liệu đo của các đặc trưng động lực học (ω, ϕ), xác định các tham số mô hình (S, b).

Đây là một bài toán ngược trong cơ học dao động. Việc giải bài toán này còn rất nhiều khó khăn, cho đến nay chưa có được đường lối chung nào hữu hiệu để giải. Tuy vậy có thể khẳng định một vài tính chất cơ bản của bài toán này:

- Bài toán rất có thể không có lời giải. Trong trường hợp này phải xem xét lại hai yếu tố: 1. Mô hình toán học đã sát với thực tế chưa? và 2. Số liệu đo đạc đã đủ tin cậy chưa? Nếu hai yếu tố này đã thỏa mãn thì bài toán bao giờ cũng có lời giải bởi vì cụ thể đối tượng đang tồn tại.
- Khi có lời giải thì rất ít khi nó là duy nhất. Điều này được khẳng định ngay bằng toán học vì số lượng ẩn là rất lớn, trong khi đó số phương trình (số liệu đo đạc) rất hạn chế. Vì vậy để tiến tới lời giải có ý nghĩa thực tế cần phải có những chỉ tiêu nào đó để chọn nghiệm.

3. BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH ĐỘ DÀI CỦA CỌC

Bỏ qua những yếu tố phức tạp, giả thiết có một cọc đàn hồi với những tham số là hằng đã biết E, ρ, F, J và điều kiện biên sao cho xác định được dãy tham số λ_j, $j = 1, 2, \dots$ Trong trường hợp này có thể đo được các tần số riêng, lần lượt là $\omega_1, \omega_2, \dots$ Vấn đề là xác định chiều dài cọc (L). Ở đây theo tính chất 1, không cần phải đo đạc dạng riêng, vì nó không phụ thuộc vào L.

Theo (1.2) thì ứng với mỗi tần số đo được ω_j ta có một giá trị lý thuyết tính được của tham số biên λ_j. Bài toán đặt ra là tìm L sao cho:

$$\sigma(L) = \sum_j \left[\lambda_j - L\sqrt{\frac{\omega_j}{a}}\right]^2 \to \min = 0. \tag{3.1}$$

Trong trường hợp lý tưởng thì $\sigma(L) = 0$ sẽ cho nghiệm L và nghiệm này là duy nhất. Nhưng với số liệu đo đạc và mô hình có những sai số nào đó $\sigma(L) > 0$, khi đó L chỉ có thể tìm từ điều kiện $\sigma(L) \to \min$. Dưới đây ta chứng minh định lý để giải bài toán này.

Định lý 1. Bài toán có nghiệm duy nhất là:

$$L = \sqrt{\frac{\sum_j a\lambda_j^2}{\sum_j \omega_j}} \tag{3.2}$$

khi và chỉ khi thỏa mãn điều kiện:

$$\sum_j \lambda_j\sqrt{\omega_j} = \Big(\sum_j \lambda_j^2 \sum_j \omega_j\Big)^{1/2}. \tag{3.3}$$

Thật vậy, ký hiệu $\sqrt{\omega_j/a} = \overline{\omega}_j$ và vectơ $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, $\overline{\omega} = (\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \dots)$ khi đó

$$|\overline{\lambda}|^2 = \sum_j \lambda_j^2, \qquad |\overline{\omega}|^2 = \sum_j \overline{\omega}_j^2$$

và tích vô hướng của hai vectơ λ và ω bằng:

$$(\overline{\lambda}, \overline{\omega}) = \sum_j \lambda_j \overline{\omega}_j = \sum_j \lambda_j \sqrt{\frac{\omega_j}{a}}\,.$$

Với những ký hiệu này ta có:

$$\sigma(L) = |\overline{\lambda} - L\overline{\omega}|^2 = |\overline{\lambda}|^2 - 2|\overline{\lambda}\,\overline{\omega}|L + L^2|\overline{\omega}|^2.$$

Phương trình $\sigma(L) = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi:

$$(\overline{\lambda}, \overline{\omega})^2 - |\overline{\lambda}|^2|\overline{\omega}|^2 \geq 0 \quad \text{hay} \quad (\lambda, \overline{\omega}) \geq |\overline{\lambda}|\,|\overline{\omega}|.$$

Nhưng theo tích vô hướng của hai vectơ $\overline{\lambda}$, $\overline{\omega}$: $(\overline{\lambda}, \overline{\omega}) \leq |\lambda|\,|\overline{\omega}|$, điều kiện có nghiệm trở thành:

$$(\overline{\lambda}, \overline{\omega}) = |\overline{\lambda}|\,|\overline{\omega}|. \tag{3.4}$$

Khi đó nghiệm duy nhất của phương trình $\sigma(L) = 0$ sẽ bằng: $L = |\overline{\lambda}|/|\overline{\omega}|$. Mặt khác từ điều kiện $\sigma(L) \to \min$ ta có $2L|\overline{\omega}|^2 - 2(\overline{\lambda}, \overline{\omega}) = 0$. Cùng với (3.4) ta có ngay $L = |\overline{\lambda}|/|\overline{\omega}|$. Định lý đã được chứng minh.

Hệ quả 1. Định lý cho ta thuật toán tìm nghiệm đúng duy nhất của bài toán như sau:

Bước 1. Kiểm tra điều kiện (3.4). Nếu không thỏa mãn bài toán vô nghiệm. Nếu thỏa mãn ta thực hiện:

Bước 2. Nghiệm $L = |\overline{\lambda}|/|\overline{\omega}|$ là duy nhất.

Hệ quả 2. Nghiệm gần đúng có thể tìm theo công thức:

$$L = \frac{(\overline{\lambda}, \overline{\omega})}{|\overline{\omega}|^2} = \frac{\sum_j \lambda_j \sqrt{\omega_j a}}{\sum_j \omega_j} \tag{3.5}$$

Hệ quả 3. Bài toán có thể tổng quát hóa như sau: Giả sử có thể đo được các tần số riêng $\omega_1, \omega_2, \dots$ và tính được các tham số biên $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ phụ thuộc vào các đặc trưng điều kiện biên là $b_1, b_2, \dots, b_m$. Khi đó các tham số $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ tính từ phương trình

$$\sum_j \lambda_j(b)\sqrt{\omega_j} = \Big(\sum_j \lambda_j^2(b) \sum_j \omega_j\Big)^{1/2} \tag{3.6}$$

và độ dài của cọc sẽ được tính theo công thức:

$$L = \sqrt{\frac{a\sum_j \lambda_j^2(b)}{\sum_j \omega_j}}\,. \tag{3.7}$$

Riêng các tham số b sẽ được xét đến trong bài toán của phần tiếp theo.

Ví dụ thực tế.

Trong phòng thí nghiệm [3] đã tiến hành đo tần số riêng của một dầm (hình 1) ở 10 điểm khác nhau được 10 giá trị khác nhau của hai tần số đầu. Kiểm tra điều kiện (3.4) cho các giá trị đo này ta thấy cặp: $\omega_1 = 13,184\pi$, $\omega_2 = 82,024\pi$ thỏa mãn với sai số nhỏ nhất $9 \cdot 10^{-6}$. Lấy các giá trị này tính L theo công thức (3.2) ta được $L = 1,0006\,m$. Trong trường hợp này giả thiết đầu dưới bị ngàm tuyệt đối với $\lambda_1 = 1,875$, $\lambda_2 = 4,694$ [1].

4. BÀI TOÁN ĐÁNH GIÁ LIÊN KẾT BIÊN

Mục đích của bài toán này là từ số liệu đo đạc tần số riêng và dạng riêng đánh giá bản chất của liên kết tại biên. Muốn vậy ta phải mô hình hóa biên bằng các tham số đặc trưng cho các liên kết. Những liên kết lý tưởng đã biết gồm: gối tựa, ngàm cứng, tự do,... Ta coi đây là các trường hợp tới hạn của liên kết dạng tổng quát như hình 2, trong đó:

k_1, k_2 - Độ cứng lò xo tịnh tiến

ν_1, ν_2 - Độ cứng lò xo xoắn

Các tham số này biến đổi trong khoảng $(0, \infty)$. Các trường hợp tới hạn bao gồm:

1. Gối tựa: $k = \infty$, $\nu = 0$
2. Ngàm cứng: $k = \infty$, $\nu = \infty$
3. Tự do: $k = 0$, $\nu = 0$
4. Gối trượt: $\nu = \infty$, $k = 0$

Trong thực tế giá trị vô cùng của các tham số được coi là đạt được ở giá trị đủ lớn nào đó [2].

Với những giả thiết dầm đàn hồi lý tưởng chịu uốn thuần túy (các tham số kết cấu là hằng số) phương trình dao động có dạng (1.1). Khi đó tần số riêng và dạng riêng vẫn có dạng (1.2) và (1.3). Trong đó λ và C_j, $j = 1,4$ xác định từ hệ phương trình [1].

$$[A(\lambda, k, \nu)]C = 0, \tag{4.1}$$

$$k = (k_1, k_2), \quad \nu = (\nu_1, \nu_2), \quad C = (C_1, C_2, C_3, C_4),$$

A là ma trận:

$$\begin{vmatrix} \lambda^3 k_0 & -k_1 & -\lambda^3 k_0 & -k_1 \\ -\nu_1 & -\lambda k_0 & -\nu_1 & \lambda k_0 \\ -(k_0\lambda^3 \cos\lambda + k_2 \sin\lambda) & k_0\lambda^3 \sin\lambda - k_2 \cos\lambda & k_0\lambda^3 \mathrm{ch}\lambda - k_2 \mathrm{sh}\lambda & k_0\lambda^3 \mathrm{sh}\lambda - k_2 \mathrm{ch}\lambda \\ -k_0\lambda \sin\lambda + \nu_2 \cos\lambda & -k_0\lambda \cos\lambda - \nu_2 \sin\lambda & k_0\lambda \mathrm{sh}\lambda + \nu_2 \mathrm{ch}\lambda & k_0\lambda \mathrm{ch}\lambda + \nu_2 \mathrm{sh}\lambda \end{vmatrix}.$$

Như vậy λ là tham số biên xác định từ phương trình:

$$D(\lambda, k, \nu) = \det A(\lambda, k, \nu) = 0 \tag{4.2}$$

và sẽ phụ thuộc vào các tham số k_1, k_2, ν_1, ν_2, nhưng biểu thức hiển $\lambda = \lambda(k, \nu)$ không thể xác định được từ (4.2).

Bài toán đặt ra là từ số liệu đo của tần số riêng $\omega_1, \omega_2, \ldots$ Đánh giá các tham số k_1, k_2, ν_1, ν_2 với những tham số mô hình E, ρ, F, J, L cho trước.

Ký hiệu:

$$a_1 = \sqrt{k_0/mL^4}\,.$$

Với những giá trị đo được của $\omega_1, \omega_2, \ldots$ ta tính được $\lambda_j = \sqrt{\omega_j/a_1}$.

Khi đó các tham số k, ν sẽ là lời giải của bài toán:

$$\sigma(k, \nu) = \sum_j \left(D(\lambda_j, k, \nu)\right)^2 \to \min = 0. \tag{4.3}$$

Nghiệm đúng của bài toán có thể tìm được từ phương trình:

$$\sigma(k_1, k_2, \nu_1, \nu_2) = 0. \tag{4.4}$$

Đây là một phương trình bậc hai có bốn ẩn số, nói chung không có lời giải duy nhất và rất khó giải. Việc nghiên cứu lý thuyết cần phải tiến hành. Thông thường, việc đo đạc và mô hình hóa có sai số nên phương trình (4.4) nói chung khó thỏa mãn. Do đó, có thể tìm nghiệm gần đúng từ bài toán cực trị:

$$\sigma(k_1, k_2, \nu_1, \nu_2) \to \min \tag{4.5}$$

hay

$$\frac{\partial\sigma}{\partial k_1} = 0, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial k_2} = 0, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial \nu_1} = 0, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial \nu_2} = 0. \tag{4.6}$$

Nói chung, do tính chất của ma trận A, (4.6) là hệ phương trình tuyến tính của bốn ẩn, việc giải nó không có gì khó khăn nhất là đối với máy tính. Tuy vậy, về mặt lý thuyết có thể đưa ra điều kiện tồn tại và duy nhất nghiệm của hệ (4.6). Ta sẽ hạn chế trong trường hợp đơn giản nhất, khi $k_2 = \nu_2 = 0$, $k_1 = \infty$ (như hình 3)

Khi đó ma trận A có dạng:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -\nu_1 & -\lambda k_0 & -\nu_1 & \lambda k_0 \\ -\lambda^3 k_0 \cos\lambda & \lambda^3 k_0 \sin\lambda & \lambda^3 k_0 \mathrm{ch}\lambda & \lambda^3 k_0 \mathrm{sh}\lambda \\ -\lambda k_0 \sin\lambda & -\lambda k_0 \cos\lambda & \lambda k_0 \mathrm{sh}\lambda & \lambda k_0 \mathrm{ch}\lambda \end{vmatrix}$$

và:

$$D(\nu_1, \lambda) = 2\lambda^4 k_0^2\big((1 + \cos\lambda \mathrm{sh}\lambda)\nu_1 + \lambda k_0(\cos\lambda \mathrm{sh}\lambda - \sin\lambda \mathrm{ch}\lambda)\big).$$

Ký hiệu:

$$a(\lambda) = 2\lambda^4 k_0(1 + \cos\lambda \mathrm{sh}\lambda), \quad b(\lambda) = -2\lambda^5 k_0^3(\cos\lambda \mathrm{sh}\lambda - \sin\lambda \mathrm{ch}\lambda)$$

và $a(\lambda_j) = a_j$, $b(\lambda_j) = b_j$, khi đó:

$$\sigma(\nu_1) = \sum_j (a_j\nu_1 - b_j)^2 = |a|^2\nu_1^2 - 2(a,b)\nu_1 + |b|^2$$

với

$$|a|^2 = \sum_j a_j^2, \quad |b|^2 = \sum_j b_j^2, \quad (a,b) = \sum_j a_j b_j.$$

Định lý 2. Nghiệm bài toán (4.3) trong trường hợp hình 2 có duy nhất nghiệm là:

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{\sum_j b^2(\lambda_j)}{\sum_j a^2(\lambda_j)}} \tag{4.7}$$

khi và chỉ khi thỏa mãn điều kiện:

$$\Big|\sum_j a(\lambda_j) b(\lambda_j)\Big| = \Big(\sum_j a^2(\lambda_j) \cdot \sum_j b^2(\lambda_j)\Big)^{1/2}. \tag{4.8}$$

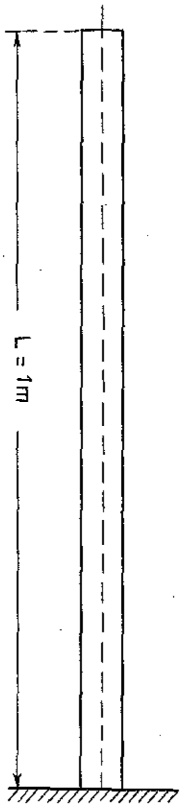
Việc chứng minh định lý này không khác gì cách chứng minh định lý 1.

Ý nghĩa vật lý của nghiệm (4.7) như sau: Nếu ω_j đo được gần với tần số riêng của dầm bị ngàm cứng đầu dưới, khi đó $a(\lambda_j) \sim 0 \ \forall j$. Khi đó theo biểu thức (4.7) thì $\nu_1 \to \infty$. Ta nhận được trường hợp ngàm cứng ($k_1 = \infty$, $\nu_1 = \infty$).

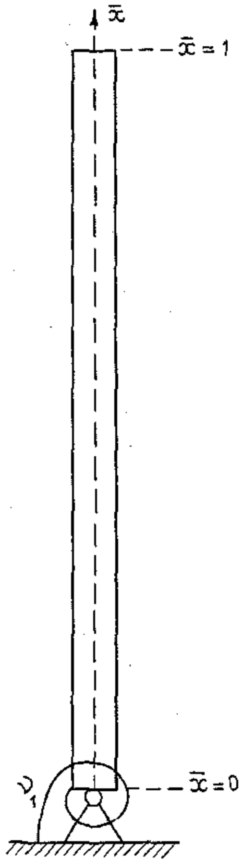
Điều kiện (4.8) có thể sử dụng như là phương trình để tìm L, trong trường hợp chưa biết L:

$$\Big(\sum_j a(L\sqrt{\omega_j/a})b(L\sqrt{\omega_j/a})\Big)^2 - \sum_j a^2(L\sqrt{\omega_j/a})\sum_j b^2(L\sqrt{\omega_j/a}) = 0. \qquad (4.9)$$

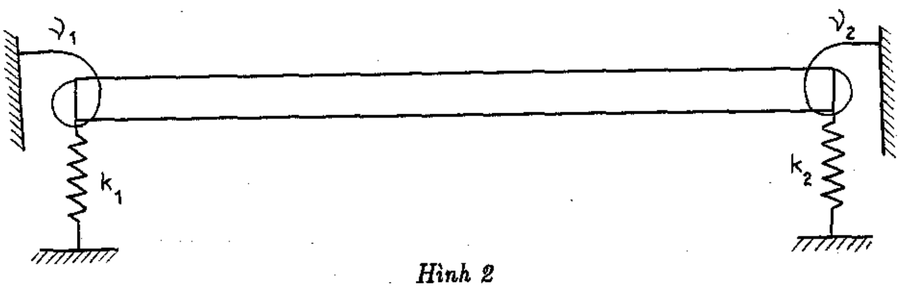
Như vậy thuật toán để giải bài toán mở rộng (tìm ν_1 và L) biết ω_j:
Bước 1. Giải phương trình (4.9) đối với L.
Bước 2. Tính $\lambda_j = L\sqrt{\omega_j/a}$ và ν_1 theo công thức (4.7).



Hình 1
($k_2 = \nu_2 = 0$, $k_1 = \nu_1 = \infty$)



Hình 3
($k_2 = \nu_2 = 0$, $k_1 = \infty$)



Hình 2

5. MỘT VÀI NHẬN XÉT

- Trong cả hai trường hợp ta tìm được điều kiện duy nhất nghiệm bài toán ngược. Những điều kiện này có thể sử dụng trong hai vai trò sau đây: Một là để tìm những tham số khác chưa biết. Hai là điều kiện để chỉnh số liệu đo và mô hình. (Số liệu đo chỉ có ý nghĩa nếu điều kiện này thỏa mãn).

- Ở đây ta đã tránh sự ảnh hưởng của số lượng tần số đo được trong phương pháp giải. Tuy vậy kết quả sẽ càng chính xác nếu số lượng đo tần số đo được càng nhiều.

- Kết quả của bài toán xác định độ dài của cọc đã được kiểm nghiệm trong phòng thí nghiệm và có độ chính xác cao. Vì vậy có thể đưa vào áp dụng thực tế.

Bài báo này được hoàn thành dưới sự tài trợ của Chương trình nghiên cứu cơ bản.

Địa chỉ:
Viện Cơ học, Trung tâm KHTN & CNQG

Nhận ngày 5/12/1994

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Timoshenko S., Young D. H., Weaver W. Vibration Problems in Engineering. John Wiley Y. Sons, New York, 1974.
2. Nguyễn Xuân Hùng, Nguyễn Minh Nam. Tính toán dao động tấm có biên đàn hồi. Tạp chí Khoa học và Công nghệ, số 5, 1993, trang 1-10.
3. Nguyễn Tiến Khiêm, Đào Như Mai, Nguyễn Văn Đắc, Nguyễn Việt Khoa. Xác định các đặc trưng động lực học của hệ vô số bậc tự do từ số liệu đo đạc dao động. Tạp chí Cơ học số 1, 1995.

SUMMARY

SOMES PROBLEMS IN THE IDENTIFICATION OF ELASTIC BEAM
BY THE DYNAMICAL CHARACTERISTICS

Two problems in the identification of Mechanical system are presented and solved by the analytical method. Firstly, the length of an elastic beam is found from measured narural frequencies. Secondly, the boundary condition of the beam was also obtained with given frequencies. In both the cases, unique solution can be found only with condition, that is given in this paper.