

# CALCULE NUMERIQUE DES ACTIONS HYDRODYNAMIQUES SUR UNE SPHERE EN TRANSLATION ET ROTATION

BUI DINH TRI  
*Institute of Mechanics, NCNST*

**Résumé.** On propose une résolution numérique des équations de Navier - Stokes au moyen d'une méthode de correction de pression appliquée à un maillage non uniforme construit sur des coordonnées sphériques. Le but de cette résolution est contribuer à compléter les connaissances actuelles concernant l'influence du nombre de Reynolds  $Re$  et du vitesse et sur les actions hydrodynamiques, dans la gamme  $Re \leq 40$  et  $\gamma \leq 10$ .

## 1. INTRODUCTION

Les recherches sur les écoulements de suspensions gaz - solide appartient au domaine de la mécanique des suspensions, qui trouve des applications dans les nombreux domaines industriels. Parmi les méthodes utilisées, les approches par simulation Lagrangienne constituent actuellement un sujet d'étude privilégié. Cette technique consiste à traiter un écoulement de suspension par calcul d'un grand nombre de trajectoires de particules solides.

La synthèse bibliographique montre que le domaine des nombres de Reynolds intermédiaires est pratiquement inexploré: Les seuls résultats connus à ce jour sont dûs à une étude expérimentale (Méthode de Trajectographique Stroboscopique) ont été publiés par Bui Dinh 1992 [1]. Dans cet article le but que nous nous sommes consacrés à une étude numérique de l'écoulement autour d'une sphère animé d'un mouvement de translation et de rotation simultanées, afin de pouvoir en déduire les composantes de force ainsi que le couple exercés par le fluide sur la sphère.

On sait bien que les actions hydrodynamiques exercées par le fluide sur l'obstacle sont caractérisées par les coefficients adimensionnels de Trainée  $C_D$  de portance  $C_L$ , et de couple  $C_m$ . Ces coefficients dépendent de deux nombres sans dimensions, qui sont:

Le nombre de Reynolds:

$$Re = \rho \frac{V_R d}{\mu} = \frac{2a V_R}{\nu} \quad \text{où } d = 2a \quad (1.1)$$

et le taux de rotation réduit:

$$\gamma = \frac{\omega d}{V_R} \quad (1.2)$$

représentatif du rapport de la vitesse périphériques à la vitesse de déplacement relative.

Jusqu'à présent, les diverses théories et présenté les résultats numériques ou expérimentaux concernant l'écoulement autour de la sphère en translation, en rotation, ou en translation et rotation simultanées.

Théories de Stokes (1951) et d'Oseen (1910, 1913) aux très petits nombre de Reynolds ( $Re \leq 1$ ). Théorie de Rubinow & Keller 1961 [2], les travaux les plus anciens aux ouvrage de Lamb 1932 [3] ou de Batchelor 1967 [4].

Plus récemment, Benabbas 1987 [5] a apporté une contribution à l'étude de l'écoulement stationnaire ou non, d'une fluide newtonien autour d'une sphère en milieu infini par une méthode hermitienne performante. Pour la sphère en rotation dans un fluide au repos, on a les résultats numériques de Dennis et al 1980 [6].

A présent, grâce à l'informatique, la résolution pratique des équations complète de Navier - Stokes a été débarrassée des calculs fastidieux. De nombreuses méthodes de résolution numérique et l'emploi de techniques numérique ont été développées. Par exemple: Pour les problèmes bidimensionnels, méthodes utilisées sont méthode explicite instationnaire, méthode ADI (Alternate Direction Implicit), méthode MEHRSTELLEN OCI (Operator Compact Implicit) etc...

Dans le cas de problème tridimensionnels, il n'est pas possible d'introduire une fonction de courant. Il est donc nécessaire de travailler "Variable primitive" qui sont les trois composants de vitesse et la pression. Aux méthodes multigrilles, qui ont donné lieu à quelque applications aux équations Navier - Stokes. Dans notre cas, nous nous limiterons des caractéristique essentielles d'un des méthodes basées sur les différences finies, l'autre dire: les techniques bassées sur "Algorithme de correction pression". L'application à des géométries quelconques traitées par un maillage curviligne "en quincone" conduit à l'expression plus générale de "volume finis". Figure 1 montré la disposition du maillage en quincone, mettant en évidence les cellules de discrétisation:

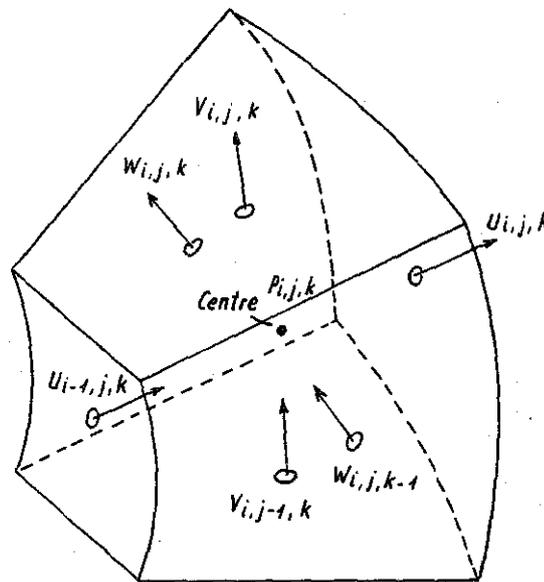


Figure 1

## 2. ALGORITHME DE CORRECTION DE PRESSION ET SA APPLICATION A L'ÉCOULEMENT AUTOUR D'UNE SPHERE EN TRANSLATION ET ROTATION

### 2.1. Algorithme de correction de pression

La méthode MAC (Marker And Cells) utilisant un maillage en quincone a été appliquée pour des écoulements à surface libre (ce type de maillage a été premier introduit par Harlow & Welch 1965). Un tel maillage en quincone offre d'importants avantages par rapport aux autres maillage classique. En particulier, dans l'étude d'écoulements permanant, également mis en évidence dans l'étude d'écoulements non permanants. Ce type de maillage composé de cellules élémentaire (ou volume finis) sur lesquelles peuvent facilement être intégrées les équations de conversation est

parfaitement adapté aux méthode basé sur une procédure de correction de pression. Dans cette procédure (distinguer quatre étapes fondamental) introduite par Patakar 1981 [7], on rappel le type "SIMPLE", puis appliqué par Chew 1984 [8] et qui donnée lieu à plusieurs variantes. Parmi celles-ci, on peut citer l'approche "SIMPLEC" et "SIMPLEX" ont développé, utilisée par Van Doormal & Raithby 1984, 1985 [9, 10]. La succession de ces quatre étapes constitue un "cycle". Avant d'entamer un nouveaux cycle, on compare les différentes grandeurs avec celles issues du cycle précédent. Si les différences obtenues sont suffisamment petites, on stoppe le calcul. Dans le cas contraire, on retour à la première en donnant nouvelles valeurs à l'ensemble des variables les valeurs finales du cycle précédent. Ce type d'algorithme est très largement utilisé dans la plupart des code de calcul industriels d'écoulements, turbulents ou non, isothermes ou non.

## 2.2. Sa application à l'écoulement autour d'une sphère en translation et rotation

Nous appliquerons une méthode de correction de pression en utilisant un maillage en quinconce de type "volume finis", et la technique de discrétisation des équations de Navier - Stokes à trois dimensions, en coordonnées sphériques, en vue de la résolution numérique du problème de l'écoulement permanent d'une fluide newtonien incompressible autour d'une sphère en translation et rotation simultanées.

En nous plaçant dans un repère lié à la sphère, de centre  $O$ , nous désignerons par  $\vec{v}_\infty$  la vitesse du fluide à l'infini, supposée uniforme, et dirigée par l'axe  $Oz$  (vecteur unitaire  $\vec{k}$ ) soit:  $\vec{v}_\infty = v_\infty \vec{k}$ .

Pour ce qui concerne la rotation, on se limitera au cas d'une sphère tournant autour d'un axe perpendiculaire à la direction de translation. Le vecteur taux de rotation  $\vec{\Omega}$  sera par exemple supposé porté par l'axe  $Oy$  et on posera:  $\vec{\Omega} = \Omega \vec{j}$ . Toutes les grandeurs intervenant dans les équations qui suivent sont rendues adimensionnelles en posant:

$$r = \frac{r_1}{a}, \quad u = \frac{v_r}{v_\infty}, \quad v = \frac{v_\theta}{v_\infty}, \quad w = \frac{v_\phi}{v_\infty}, \quad p = \frac{p_1}{\rho v_\infty^2} \quad (2.1)$$

où  $v_r, v_\theta, v_\phi$  sont les trois composantes du vecteur vitesse en coordonnées sphériques,  $r_1$ : rayon polaire réel,  $p_1$ : pression réelle. Le nombre de Reynolds (indiqué ci-dessus) apparaissant ainsi dans les équations du mouvement est basé sur la longueur de référence  $a$ . En utilisant la vitesse de référence  $v_\infty$  et la longueur de référence  $a$  on est conduit à la vitesse de rotation adimensionnelle suivant:

$$\omega^+ = \frac{a\Omega y}{v} = \frac{\gamma}{2} \quad (2.2)$$

## 2.3. Equation du mouvement et de continué

En remplaçant toutes les grandeurs définies ci-dessus dans équations de Navier - Stokes et de continué, écrites en coordonnées sphériques on aboutit aux mouvement

- Equation du mouvement:

+ En projection radiale:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} + \frac{w}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{w^2}{r} \\ & = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{2}{Re} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \sin \theta \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{2}{r^2} \left( u + \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{v}{\tan \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \phi} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

+ En projection selon  $\theta$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} + \frac{w}{r \sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \phi} - \frac{w^2}{r \tan \theta} \\ & = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{2}{Re} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} \sin \theta \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta \tan \theta} \frac{\partial w}{\partial \phi} \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

+ En projection selon  $\phi$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{w}{r \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \phi} + \frac{vw}{r \tan \theta} + \frac{uw}{r} \\ & = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{2}{Re} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \sin \theta \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{w}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{2}{r^2 \sin \theta \tan \theta} \frac{\partial v}{\partial \phi} \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

- Equation de continuité:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \phi} = 0 \quad (2.6)$$

#### 2.4. Condition aux limites

L'écoulement est supposé uniforme à l'infini, où la pression constante, sera prise comme référence, ce qui correspond aux conditions suivantes pour les inconnues  $u, v, w, p$ :

$$\left\{ u \rightarrow \cos \theta, v \rightarrow -\sin \theta, w \text{ et } p \rightarrow 0 \right\} \text{ lorsque } r \rightarrow \infty \quad (2.7)$$

Par ailleurs, sur la surface de la sphère, la condition d'adhérence entraîne:

$$\begin{cases} u = 0, & v = \omega^+ \cos \phi = \frac{\gamma}{2} \cos \phi, \\ w = -\omega^+ \cos \theta \sin \phi = -\frac{\gamma}{2} \cos \theta \sin \phi \end{cases} \text{ pour } r = 1 \quad (2.8)$$

L'intégration des équations (2.3)-(2.5) sur les volumes de contrôle est facilité par leur mise préalable sous forme conservative, c'est - à - dire, en régime stationnaire:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (G \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial H}{\partial \phi} = J \quad (2.9)$$

où  $F, G, H$  sont les vecteurs - flux,  $J$  est le vecteur-source.

En examinant successivement les trois équations du mouvement pour en déduire les composantes des vecteurs  $F, G, H, J$  en fonction des inconnues  $u, v, w, p$ , on obtient:

Projection radiale:

$$\begin{aligned} F_1 &= u^2 - \frac{2}{Re} \frac{\partial u}{\partial r} + p \\ G_1 &= uv - \frac{2}{Re r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{4v}{Re r} \\ H_1 &= uw - \frac{2}{Re r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{4w}{Re r} \\ J_1 &= \frac{v^2 + w^2}{r} + \frac{2p}{r} - \frac{4u}{Re r^2} \end{aligned}$$

Projection selon  $\theta$ :

$$\begin{aligned} F_2 &= uv - \frac{2}{re} \frac{\partial v}{\partial r} \\ G_2 &= v^2 + p - \frac{2}{Re r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{4u}{Re r} \\ H_2 &= vw - \frac{2}{Re r \sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{4w}{Re r \tan \theta} \\ J_2 &= \frac{w^2}{r \tan \theta} - \frac{uv}{r} + \frac{p}{r \tan \theta} - \frac{2}{Re r^2} \left[ \frac{v}{\sin^2 \theta} + \frac{2u}{\tan \theta} \right] \end{aligned}$$

Projection selon  $\phi$ :

$$F_3 = uw - \frac{2}{Re} \frac{\partial w}{\partial r}$$

$$G_3 = vw - \frac{2}{Re r} \frac{\partial w}{\partial \theta}$$

$$H_3 = w^2 + p - \frac{2}{Re r \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \phi} - \frac{4}{Re} \left[ \frac{u}{r} + \frac{v}{r \operatorname{tg} \theta} \right]$$

$$J_3 = -\frac{vw}{r \operatorname{tg} \theta} - \frac{uw}{r} - \frac{2w}{Re r^2 \sin^2 \theta}$$

### 3. RESULTATS OBTENUS

Nous présentons dans cette partie les nouveaux résultats obtenus concernant les coefficients hydrodynamiques de la sphère en translation et rotation simultanées ( $Re \leq 40$ ).

Avant d'examiner les valeurs des coefficients hydrodynamiques, on peut observer quelque images obtenus sur l'évolution du champs des vitesses, en fonction à la fois du nombre de Reynolds et du taux de rotation réduit (voir Fig. 2, 3, 4).

L'observation des figures, qui correspondent toutes les trois à  $\gamma$  (ou  $\omega^+ = 2$ ), mais des nombres de Reynolds différents, semble indiquer que la position de ce lieu des points de vitesse nulle ne dépend que très peu du nombre de Reynolds, du moins sur la partie supérieure amont de la sphère (ligne tiretée). Aux nombres de Reynolds de 30 et 40, pour lesquels le tourbillon attaché avait clairement été mis en évidence dans le cas de la translation pure, un agrandissement de la partie aval de l'écoulement peut nous permettre d'étudier l'évolution de ce tourbillon lorsque la sphère est en rotation. En fait, dans ce cas les points d'arrêt à la paroi n'existent plus puisque la condition d'adhérence impose une vitesse non nulle sur cette paroi.

#### Résultats sur les coefficients hydrodynamiques

- Les résultats obtenus ont montré que le coefficient de traînée  $C_D$  n'est pas influencé par la rotation tant que le taux de rotation réduit  $\gamma$  rest inférieur à environ 4 et  $Re < 10$ . Aux nombres de Reynolds  $Re > 10$ , tout d'abord une légère augmentation de  $C_D$ , qui atteint une valeur maximale pour  $\gamma \cong 4$ , avant de chuter rapidement pour atteindre des valeurs très faibles.

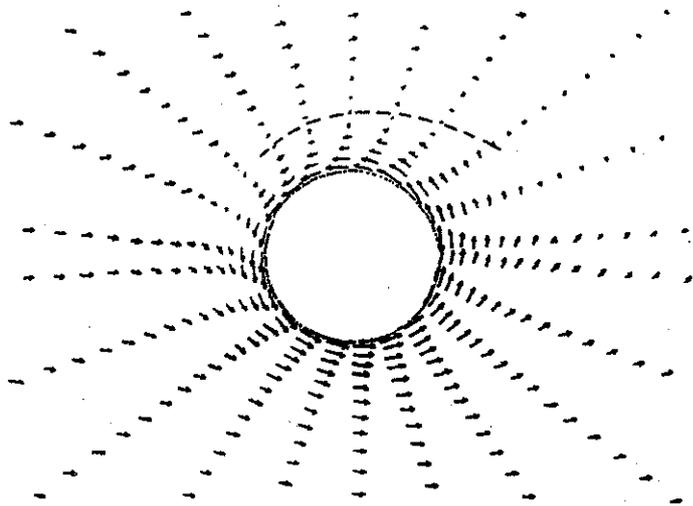


Figure 2. Champs des vitesses calculées pour  $Re = 10$  et  $\gamma = 1$

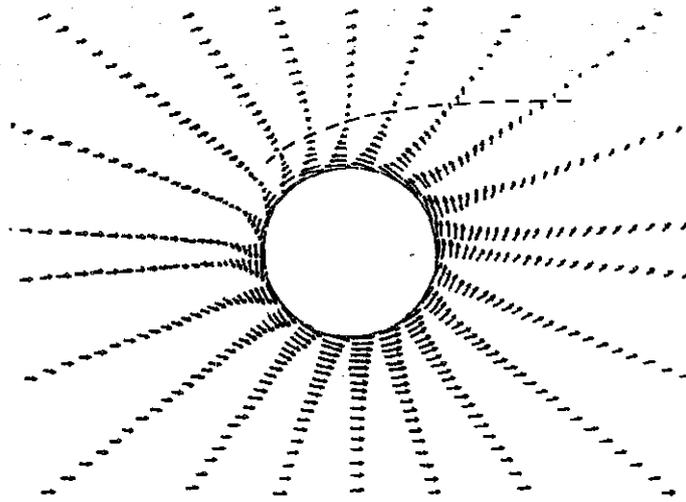


Figure 3. Champs des vitesses calculées pour  $Re = 30$  et  $\gamma = 4$

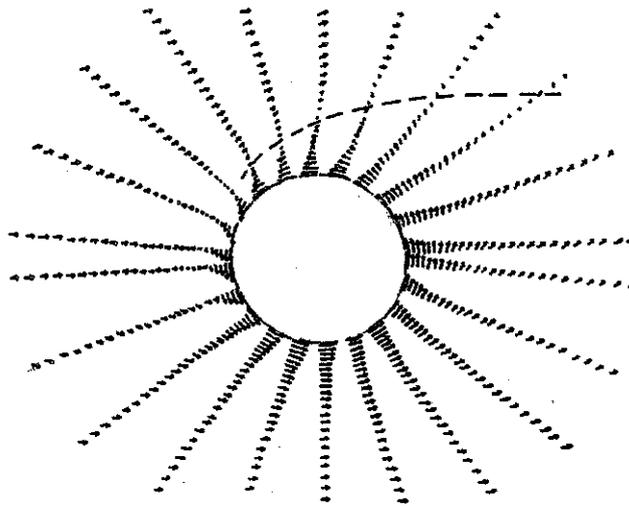


Figure 4. Champs des vitesses calculées pour  $Re = 40$  et  $\gamma = 4$

- Pour le coefficient de portance  $C_L$ : le coefficient de portance décroît très nettement lorsque  $Re$  augmente. Cette décroissance est particulièrement marqué aux nombres de Reynolds  $Re < 10$ . Le coefficient de portance peut être considéré comme pratiquement proportionnel à  $\gamma$ .

- Pour le coefficient de couple  $C_{m\omega}$  est une fonction décroissante du nombre de Taylor  $Re_\omega$ , fonction qui est très bien approchée par la formule proposée par Dennis et al 1980.

Enfin, la comparaison des résultats numériques avec l'expérience sur le coefficient de portance (réalisées récemment au LUMEN par Bui Dinh - 1992) voir Fig. 5, 6.

Une vision plus synthétique sur la variation du rapport  $C_L/\gamma$  en fonction du nombre de Reynolds:

Sur Fig.7 nous avons tracé la droite représentant la corrélation empirique des résultats expérimentaux, ainsi que l'asymptote  $C_L/\gamma = 1$  correspondant à la théorie de Rubinow & Keller 1961. aux très petits nombres de Reynolds. On observe que nos résultats numériques font bien la transition entre les meilleures accord avec la corrélation proposée par Bui Dinh correspond à la gamme des taux de rotation supérieur à 2, qui est justement celle qui a été explorée par expérimental.

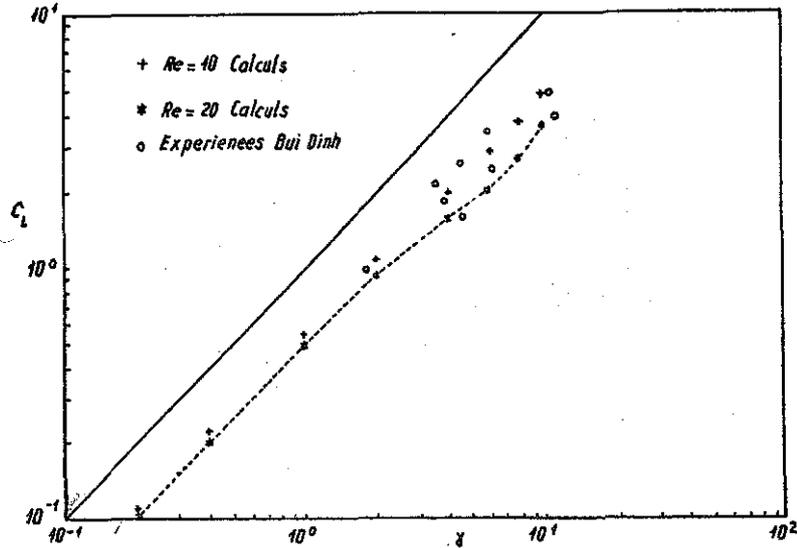


Figure 5

Comparaison des coefficients de portance calculés avec les mesures  $10 \leq Re \leq 25$

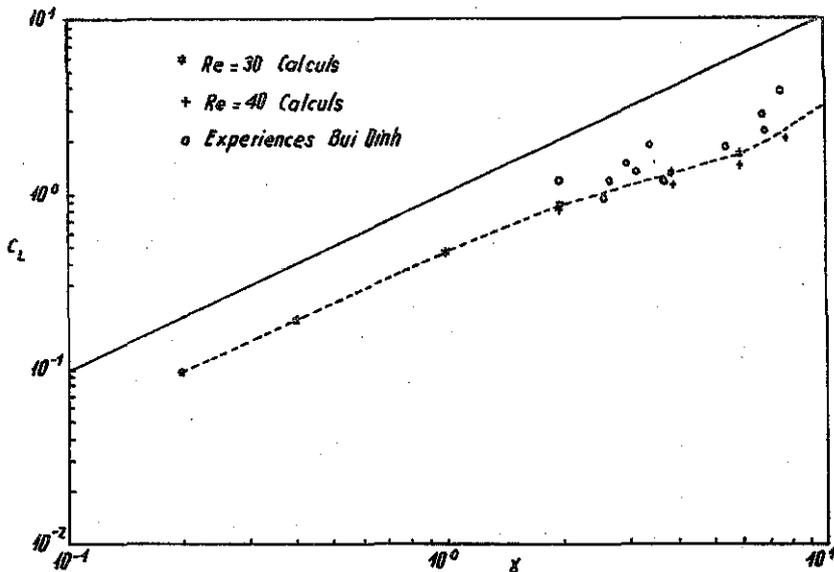


Figure 6

Comparaison des coefficients de portance calculés avec les mesures  $25 \leq Re \leq 40$

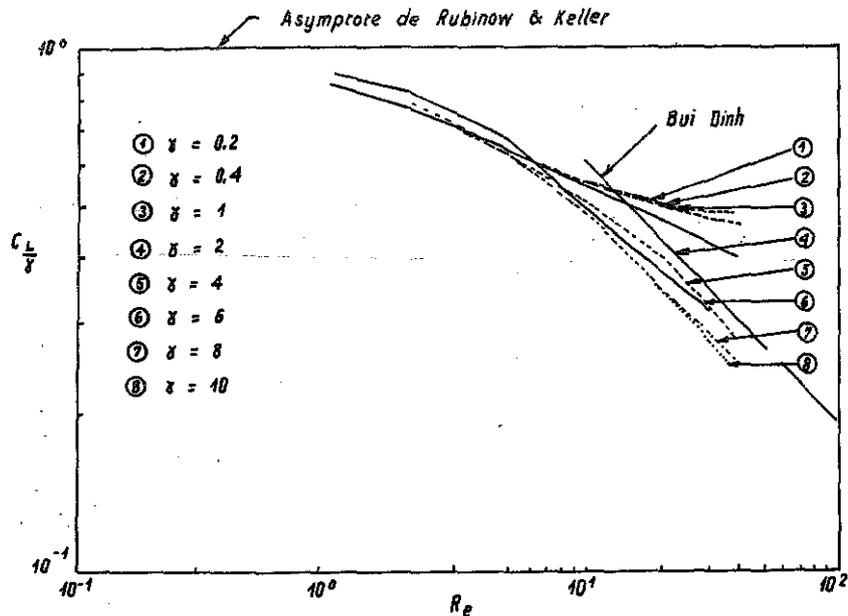


Figure 7. Evolution du rapport  $C_L/\gamma$  en fonction du nombre de Reynolds

#### 4. CONCLUSION

Nous avons présenté une résolution numérique et les résultats numériques obtenus sur une sphère en translation et rotation simultanée, d'une méthode de résolution des équations de Navier - Stokes basée sur une procédure de correction de pression appliquée à un maillage non uniforme, construit sur des coordonnées sphérique. Nous avons pu contribuer à compléter les connaissances actuelles concernant l'influence du nombre de Reynolds  $Re$  et du taux de rotation adimensionnel  $\gamma$  sur les champs de vitesse et sur les actions hydrodynamiques, dans les domaines  $Re \leq 40$  et  $\gamma \leq 10$ .

#### Remerciements.

Je remercie les responsables de L'institut de Mécanique et "Le Programme de Recherche Fondamental" de m'avoir accordé le soutien financier nécessaire sans lequel cet article n'aurait pas été réalisé. Je remercie également mes collègues de l'Institut pour l'amitié qu'ils m'ont toujours témoignée.

#### REFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. Bui Dinh T. (1992): Etude experimental des actions hydrodynamiques sur une sphère en translation et rotation dans une gamme de nombre de Reynolds intermédiaires. Thèse de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy - France.
2. Rubinow S. I. & Keller J. B. (1961): The transverse force on a spinning sphere moving in a viscous fluid. *J. Fluid Mech.* 11. pp. 447-459.
3. Lamb H. (1932): *Hydrodynamics* 6<sup>ème</sup> Edition Cambridge Uni. Press.
4. Batchelor G. K. (1967): *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge Uni. Press.
5. Benabbas F. (1987): Etude numérique de l'écoulement autour d'une sphère aux grands nombres de Reynolds en régimes stationnaire et instationnaire. Thèse de 3<sup>ème</sup> Cycle, Uni. de Poitiers.
6. Dennis S. C. R., Singh S. N. & Ingham D. B. (1980): The steady flow due to a rotating sphere at low and moderate Reynolds number. *J. Fluid Mech.* 101, 2, pp. 257-279.

7. Patankar S. V. (1981): A calculation procedure for two dimensional elliptic situations. Num. Heat Transfert, 4. pp. 409-425.
8. Chew J. W. (1984): Development of a computer program for the prediction of the flow in a rotating cavity. International Journal for Numerical Method in Fluid, 4, pp. 667-683.
9. Van Doormaal J. P. & Raithby G. D. (1984): Enhancement of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flow. Num. Heat Transfert, 7, 147-163.
10. Van Doormaal J. P. & Raithby G. D. (1985): An evaluation of the segregated approach for predicting incompressible fluid flow. ASME Heat Transfert Conference, enver, August, paper 85-HT-9.

*Nhận ngày 17/2/1994*

## TÍNH TOÁN BẰNG PHƯƠNG PHÁP SỐ LỰC THỦY ĐỘNG TÁC DỤNG LÊN MỘT PHẦN TỬ CẦU CHUYỂN ĐỘNG TỊNH TIẾN VÀ QUAY

Một giải pháp số đã được đề xuất để giải phương trình Navier - Stock 3 chiều cho chất lỏng nhớt, bằng cách sử dụng phương pháp "Hiệu chỉnh áp suất" áp dụng cho 1 phân tử thể tích hữu hạn không đồng nhất (un maillage non uniform) xây dựng trên tọa độ cầu.

Mục đích của giải pháp này là bổ sung những kết quả mới đạt được trong việc nghiên cứu ảnh hưởng của số Reynolds ( $Re \leq 40$ ); tỷ số  $\gamma$  đến trường vận tốc và các lực thủy động tác dụng lên một phần tử cầu đang chuyển động tịnh tiến và quay đồng thời.

## THỬ NGHIỆM NGHIÊN CỨU SỐ TRỊ... (tiếp trang 27)

Bài này được thực hiện trong khuôn khổ đề tài nghiên cứu cơ bản "Các vấn đề cơ bản nghiên cứu môi trường nước và không khí".

Địa chỉ:

Trung tâm Cơ học Biển, Viện Cơ học

*Nhận ngày 4/1/1994*

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Phạm Văn Ninh. Mô phỏng toán học chuyển động sóng trong dòng chảy xoáy. IBW PAN, No 9, 1982 (tiếng Balan).
2. Phạm Văn Ninh, Đỗ Ngọc Quỳnh, Đinh Văn Mạnh. Nước dâng do bão ở Việt Nam. Tuyển tập công trình hội nghị Cơ học thủy khí toàn quốc lần thứ 3, 1990, Hà Nội, 1991.

### SUMMARY

#### PRIMARY NUMERICAL STUDY OF THE WAVE CURRENT INTERACTION IN RIVER MOUTH REGIONS

A hydro-numerical model based on the nonlinear shallow water equation system has been developed for calculation of the surface wave picture in river mouth regions. In the model the river flow and the sea surface wave have been given at some river cross-section and at a deep sea boundary respectively and the real topography, wind and bottom friction stresses, coriolis force also are taken into account. Calculated results for various river flows and sea waves with a simple river mouth topography show that the model can be used for studying interaction between waves and river currents in interesting areas.