Tạp chí Cơ học  Journal of Mechanics, NCNST of Vietnam T. XVII, 1995, No 2 (34 - 39)

# CHUYỂN ĐỘNG ĐỐI LƯU NHIỆT TỰ DO TRONG KÊNH TRỤ THẲNG ĐỨNG CỦA CHẤT LỎNG QUY LUẬT MŨ

NGUYỄN VĂN QUẾ

## 1. MỞ ĐẦU

Trong [1] đã xét bài toán chuyển động đối lưu nhiệt tự do của chất lỏng quy luật mũ trong kênh phẳng thẳng đứng có chiều cao hữu hạn với nhiệt độ 2 thành cho trước. Trong bài này chúng tôi xét bài toán trên cho trường hợp kênh trụ (xem hình 1). Bài toán được giải số trên máy tính. Trong trường hợp chiều cao kênh lớn hơn nhiều lần đường kính kết quả được phân tích vàso sánh với nghiệm tiệm cận trong trường hợp kênh trụ dài vô hạn.

## 2. THIẾT LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Xét kênh trụ thẳng đứng có chiều cao hữu hạn, hở 2 đầu, đặt trong khối chất lỏng quy luật mũ vô hạn (xem h.1). Nhiệt độ ở thành $T_w$ được duy trì không đổi, cho trước và lớn hơn nhiệt độ chất lỏng ở vô cực: $T_w > T_\infty$. Xét chuyển động đối lưu nhiệt tự do, dừng tạo ra ở trong kênh do có chênh lệch nhiệt độ. Bỏ qua ảnh hưởng nhiễu động ở bên ngoài kênh đối với dòng trong kênh.

Áp dụng lý thuyết lớp biên và xấp xỉ Buxinhesc, trong hệ tọa độ trụ bài toán được mô tả bởi hệ phương trình (xem [2]):

- Phương trình liên tục

$$\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial(rV_z)}{\partial z} = 0$$

- Phương trình chuyển động

$$V_r\frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z\frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial z} + g\beta(T - T_\infty) + \frac{\nu_k}{r}\ \frac{\partial\left(\eta r\dfrac{\partial V_z}{\partial r}\right)}{\partial r}$$
$$\frac{\partial p'}{\partial r} = 0$$

- Phương trình năng lượng

$$C_p\left(V_r\frac{\partial T}{\partial r} + V_z\frac{\partial T}{\partial z}\right) = \frac{\lambda}{r}\ \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

ở đây $V_r$, $V_z$ - thành phần vận tốc theo phương $r$ và $z$; $p' = p(z) + g\rho z - p(0)$ - độ lệch áp suất so với áp suất cân bằng; $g$ - gia tốc trọng trường; $\beta$ - hệ số nở nhiệt; $T$ và $T_\infty$ - nhiệt độ chất lỏng ở trong kênh và ở vô cực; $\rho$ - mật độ; $C_p$ - nhiệt dung riêng; $\lambda$ - hệ số dẫn nhiệt của chất lỏng.

Ký hiệu

$$U^* = \nu_k^{\frac{1}{2-n}} D^{\frac{1-2n}{2-n}} H^{\frac{n-1}{2-n}}\ ; \quad \overline{z} = \frac{z}{H}\ ; \quad \overline{r} = \frac{r}{D}\ ;$$

$$\overline{V}_z = \frac{V_z D}{HU^*}\ ; \quad \overline{V}_r = \frac{V_r}{U^*}\ ; \quad \overline{T} = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}\ ; \quad \overline{p}' = \frac{p' D^2}{\rho U^{*2} H}$$

$$P_{rg} = C_p \rho U^* D \lambda^{-1}; \quad G_{rg} = g\beta(T_w - T_\infty) U^{*-2} H^{-1} D^2; \quad \eta = \left|\frac{\partial \overline{V}_z}{\partial \overline{r}}\right|^{n-2}$$

ở đây $\nu_k$ - hệ số nhớt; $D = 2R$ - đường kính ống trụ, $H$ - chiều cao ống trụ, $T_w$ - nhiệt độ thành ống; $P_{rg}$ và $G_{rg}$ - số Prantl và Grashof suy rộng. Ta được hệ không thứ nguyên (bỏ dấu $-$)

$$\frac{\partial r V_r}{\partial r} + \frac{\partial r V_z}{\partial z} = 0 \tag{2.1}$$

$$V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{dp'}{dz} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\eta \frac{\partial V_z}{\partial r}\right) + T.G_{rg} \tag{2.2}$$

$$V_r \frac{\partial T}{\partial r} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r}\right) \cdot P_{rg}^{-1} \tag{2.3}$$

Điều kiện biên

$$\begin{aligned} & V_r\left(\frac{1}{2}, z\right) = V_z\left(\frac{1}{2}, z\right) = 0; \quad T\left(\frac{1}{2}, z\right) = 1; \\ & V_r(0,z) = \frac{\partial V_z}{\partial r}(0,z) = \frac{\partial T}{\partial r}(0,z) = 0; \\ & p'(0) = V_r(r,0) = T(r,0) = 0; \\ & V_z(r,0) = V_{z_0}; \quad p'(1) = 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

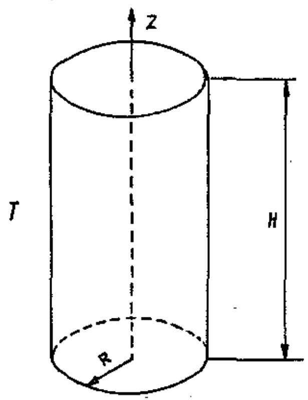
ở đây $V_{z_0}$ là đại lượng cần xác định, sao cho $p'(1) = 0$; Ngoài ra từ phương trình liên tục [1] ta suy ra:

$$\int_0^{1/2} V_z r dr = \text{const} \quad (0 \le z \le 1) \quad \text{Hay} \quad \int_0^{1/2} V_z r dr = \frac{1}{8} V_{z_0} \tag{2.5}$$

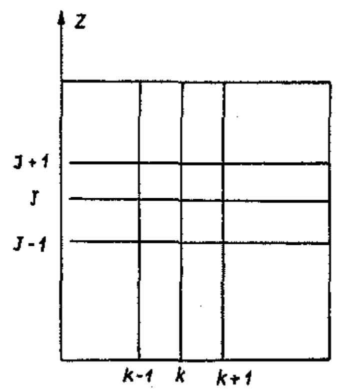
Hệ (2.1)-(2.5) là hệ đóng kín đối với $V_r$, $V_z$, $T$, $p'$, $V_{z_0}$. (Nếu có (2.5) thì điều kiện $V_r\left(\frac{1}{2}, z\right) = 0$ tự động được thỏa mãn). Hai đại lượng được quan tâm nhất là vận tốc trung bình $V_{z_0}$ và dòng nhiệt truyền qua thành $Q$, đặc trưng bởi số Nusselt trung bình $\overline{Nu_D}$

## 3. GIẢI SỐ

Ta giải bằng phương pháp sai phân hữu hạn. Sơ đồ sai phân (xem hình 2)




*Hình 1*




*Hình 2*

$$\frac{\left(r\overset{s+1}{V}_r\right)_{k+1}^{J+1}-\left(r\overset{s+1}{V}_r\right)_k^{J+1}}{\Delta r}+\frac{\left(r\overset{s+1}{V}_z\right)_{k+1}^{J+1}+\left(r\overset{s+1}{V}_z\right)_k^{J+1}-\left(rV_z\right)_{k+1}^{J}-\left(rV_z\right)_k^{J}}{2\Delta z}=0 \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}\left(\overset{s}{V}_z\right)_k^{J+1}\frac{\left(\overset{s+1}{V}_z\right)_k^{J+1}-\left(V_z\right)_k^{J}}{\Delta z}+\left(\overset{s}{V}_r\right)_k^{J+1}\frac{\left(\overset{s+1}{V}_z\right)_{k+1}^{J+1}-\left(\overset{s+1}{V}_z\right)_{k-1}^{J+1}}{2\Delta r}&=-\frac{\overset{s+1}{p}{}'^{\,J+1}-p'^{\,J}}{\Delta z}+\\+G_{rg}\cdot\overset{s+1}{T}{}_k^{J+1}+n\overset{s}{\eta}{}_k^{J+1}\frac{\left(\overset{s+1}{V}_z\right)_{k+1}^{J+1}-2\left(\overset{s+1}{V}_z\right)_k^{J+1}+\left(\overset{s+1}{V}_z\right)_{k-1}^{J+1}}{(\Delta r)^2}&.\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\left(\overset{s}{V}_z\right)_k^{J+1}\frac{\overset{s+1}{T}{}_k^{J+1}-\overset{s+1}{T}{}_k^{J}}{\Delta z}+\left(\overset{s}{V}_z\right)_k^{J+1}\frac{\overset{s+1}{T}{}_{k+1}^{J+1}-\overset{s+1}{T}{}_{k-1}^{J+1}}{2\Delta r}=P_{rg}^{-1}\frac{\overset{s+1}{T}{}_{k+1}^{J+1}-2\overset{s+1}{T}{}_k^{J+1}+\overset{s+1}{T}{}_{k-1}^{J+1}}{(\Delta r)^2} \tag{3.3}$$

Đây là hệ phi tuyến. Có thể chứng minh được sơ đồ xấp xỉ bậc nhất theo $\Delta z$ và bậc 2 theo $\Delta r$. Điều kiện hội tụ Neuman luôn thỏa mãn với $\Delta r$, $\Delta z$ tùy ý. Khác với [1], ở đây là sơ đồ ẩn hoàn toàn, điều đó làm tăng tính ổn định của sơ đồ.

Ta giải hệ truy hồi theo chỉ số $s$. Giả sử ta đã biết các giá trị tại $J$ và các giá trị mang chỉ số $s$ tại $J+1$. Từ phương trình (3.3) dùng phương pháp đuổi ta tính được $\overset{s+1}{T}{}^{J+1}$. Thay vào (3.2) ta được hệ dạng : (để cho gọn ta bỏ chỉ số $s+1$ và $J+1$ ở $V$ và $p'$)

$$\begin{aligned}&A_k\left(V_z\right)_{k-1}+B_k\left(V_z\right)_k+C_k\left(V_z\right)_{k+1}+p'=D_k, \quad k=\overline{2,N-1}\\&(V_z)_1=(V_z)_2;\ \left(\text{suy từ điều kiện } \frac{\partial V_z}{\partial r}(0,z)=0\right)\\&(V_z)_N=0;\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\int_0^{1/2} rV_z\,dr=\frac{1}{8}V_{z_0} \tag{3.5}$$

Đây là hệ tuyến tính đóng kín đối với $p'$, $V_{z_1},\dots,V_{z_N}$. Ta giải hệ này như sau:

Ứng với $p_1$, $p_2$; $p_1\neq p_2$ bất kỳ, dùng phương pháp đuổi ta tìm được 2 nghiệm $V_z^{(1)}$, $V_z^{(2)}$ của hệ (3.4). Do tính tuyến tính $\alpha p_1+(1-\alpha)p_2$; $\alpha V_z^{(1)}+(1-\alpha)V_z^{(2)}$ cũng là nghiệm của (3.4). Để thỏa mãn (3.5) ta tìm được

$$\alpha=\frac{(1/8)V_{z_0}-\int_0^{1/2} rV_z^{(2)}dr}{\int_0^{1/2} r\left(V_z^{(1)}-V_z^{(2)}\right)dr}.$$

Thực tế tính toán theo phương pháp trên giảm tối đa khối lượng tính toán và cho kết quả tốt.

Sau khi tính được $\overset{s+1}{V}{}_z^{J+1}$ thay vào (3.1) ta tính được $\overset{s+1}{V}{}_r^{J+1}$. Cứ như thế cho đến khi sai số tương đối giữa các đại lượng $s+1$ và $s$ bé hơn $\varepsilon$ cho trước. Giá trị ban đầu của vòng lặp lấy bằng giá trị tại $J$.

## 4. PHÂN TÍCH KẾT QUẢ

a) Nghiệm tiệm cận : Khi $(H/D)\to\infty$ ta trở về trường hợp kênh trụ cao vô hạn, bài toán trở thành một chiều và có dạng:

$$V_r = 0; \quad V_z = V_z(r); \quad T = T(r)$$
$$-\frac{dp'}{dz} + \frac{d}{dr}\left(\eta \frac{dV_z}{dr}\right) + T.G_{rg} = 0$$
$$\frac{d^2T}{dr^2} = 0$$

Điều kiện biên:

$$V_z(1/2) = 0; \quad T(1/2) = 1$$
$$\frac{dV_z}{dr}(0) = \frac{dT}{dr}(0) = 0$$
$$\int_0^{1/2} V_z r dr = \frac{1}{8} V_{z_0}$$

Giải hệ này được

$$T = 1$$
$$V_z = \frac{n}{n+1} G_{rg}^{1/2} \left[(1/2)^{1+(1/n)} - r^{1+(1/n)}\right]$$

Suy ra:

$$V_{z_0} = \frac{n}{3n+1} G_{rg}^{1/n} (1/2)^{1+(1/n)} \tag{4.1}$$

Nếu gọi $h$ là hệ số truyền nhiệt trung bình (lượng nhiệt trung bình truyền qua 1 đơn vị diện tích thành kênh trong 1 đơn vị thời gian khi độ chênh nhiệt độ $(T_w - T_\infty)$ bằng 1) thì

$$h = \frac{\lambda}{D} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{n}{3n+1} \cdot P_{rg} \cdot G_{rg}^{1/n} \cdot (1/2)^{1+(1/n)} \text{ và}$$
$$\overline{Nu_D} = \frac{hD}{\lambda} = \frac{1}{4} \frac{n}{3n+1} \cdot P_{rg} \cdot G_{rg}^{1/n} \cdot (1/2)^{1+(1/n)} \tag{4.2}$$

Để so sánh ta lấy $P_{rg} = 100$; $G_{rg} = 4,795.10^{-2}$; $n = 0,66$; $(Ra_g = P_{rg}.G_{rg}^{1/n} = 1)$ thì (4.1) cho $V_{z_0} = 3,87.10^{-4}$; (4.2) cho $\overline{Nu_D} = 9,68.10^{-3}$.

Giải số cho $V_{z_0} = 3,72.10^{-4}$; $\overline{Nu_D} = 9,53.10^{-3}$; Sai khác không quá 3%.

b) Ví dụ số:

Bài toán được giải với các số liệu sau:

| | |
|---|---|
| $T_w = 25°C$ | $T_\infty = 15°C$ |
| $D = 2\,cm$ | $H = 20\,cm$ |
| $\rho = 1000\ kg/cm^3$ | $C_p = 4,18.10^3 J/kg.K$ |
| $\lambda = 0,597\ W/mK$ | $\nu_k = 7,35.10^{-5} m^2/s^{2-n}$ |
| $\beta = 1,8.10^{-4}\ 1/K$ | $n = 0,66$ |

**Kết quả:**

$V_{z_0} = 0,0337$ (ở dạng thứ nguyên $V_{z_0} = 0,106\,cm/s$)

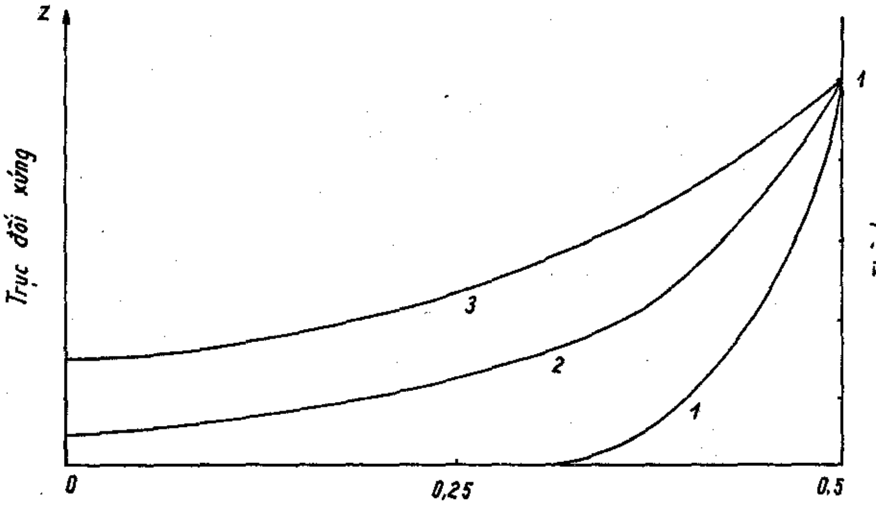
$\overline{Nu_D} = 2,157 \quad (Q = 8,09W)$.

Số liệu tương tự ở trường hợp kênh phẳng cho (xem [1])

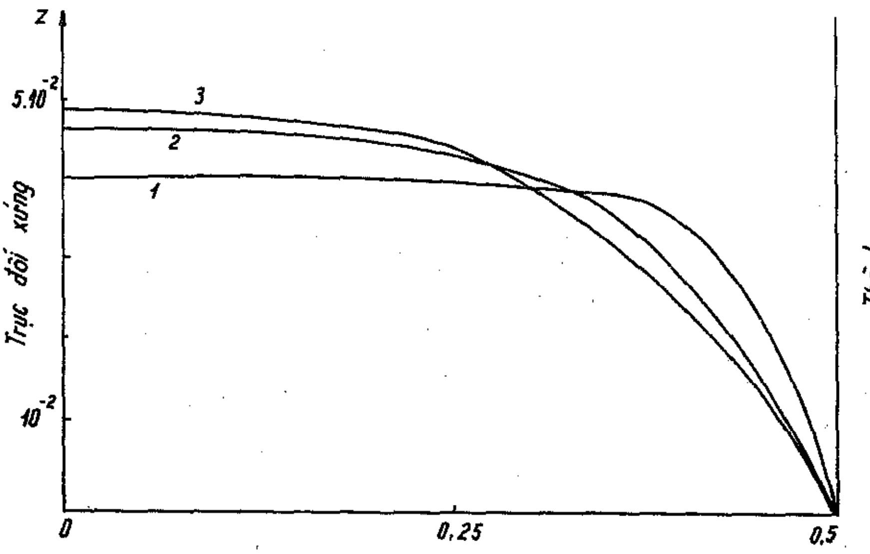
$$V_0 = 0,045; \quad \overline{Nu_D} = 4,07.$$

Ta thấy cả về mặt động học lẫn truyền nhiệt ở kênh trụ đều thấp hơn kênh phẳng có kích thước tương đương (cùng độ cao, đường kính kênh trụ bằng bề rộng kênh phẳng).

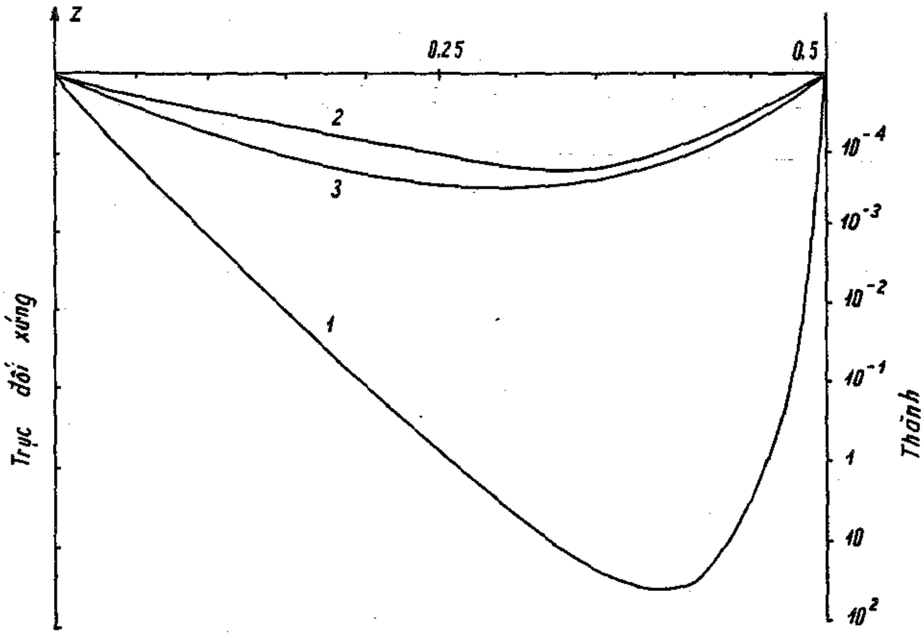
Các số liệu về $V_r$, $V_z$, $T$ cho ở đồ thị 3, 4, 5.
Đối với chất lỏng Niutơn, cụ thể là nước
$n = 1$; $\nu_k = 10^{-6}\ m^2/s$, các số liệu khác giữ nguyên thì
$\underline{V_{z_0}} = 31,1$ (ở dạng thứ nguyên $V_{z_0} = 1,55\,cm/s$)
$\overline{Nu_D} = 11,5$ $(Q = 43,16W)$
Ta thấy vận tốc trung bình ở đây lớn gấp 14 lần còn $Q$ - lớn gấp 5 lần. Điều đó cho thấy dòng đối lưu rất nhạy cảm với chỉ số phi tuyến $n$.




*Hình 3.* Phân bố nhiệt độ
1. $z = 2,5.10^{-5}H$, 2. $z = 0,5H$, 3. $z = H$




*Hình 4.* Phân bố thành phần $V_z$
1. $z = 2,5.10^{-5}H$, 2. $z = 0,5H$, 3. $z = H$




*Hình 5.* Phân bố thành phần $V_r$
1. $z = 2,5.10^{-5}H$, 2. $z = 0,5H$, 3. $z = H$

Cuối cùng, tác giả tỏ lòng biết ơn đối với GS TS Ngô Huy Cẩn, TS Vũ Duy Quang, PTS Đặng Hữu Chung đã có những đóng góp qúy báu về nội dung bài báo.

Bài báo được thực hiện với sự giúp đỡ vềmặt tài chính của Chương trình nghiên cứu cơ bản quốc gia về khoa học tự nhiên

*Địa chỉ:*
*Viện Cơ học*

*Nhận ngày 24/12/1994*

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Thomas P. Irvine, K. C. Wu; William J. Schneider. Vertical channel free convection with a power law fluid. ASME 82 - WA/HT-69.
2. Шульман З. П. и др. Тепло. и Массообмен при свободной конвекции в неньютоновских жидкостях. Изд. "Наука и Техника". Минск 1975.

## SUMMARY

### FREE CONVECTION FLOW OF POWER LAW FLUID IN A VERTICAL CYLINDER OF FINITE HEIGHT

A numerical solution has been presented for free convection flow of power law fluid in a vertical cylinder of finite height. The average velocity along the channel and the heat transfer have been calculated. Graphs of velocities and temperature are shown. The results show good agreement with analytic one in the asymptotic case.