Tạp chí Cơ học Journal of Mechanics, NCNST of Vietnam T. XVII, 1995, No 2 (1 - 6)

VA CHẠM DỌC CỦA HAI THANH ĐÀN HỒI VỚI LỰC CẢN NHỚT Ở MẶT BÊN CỦA THANH THỨ HAI BÁN VÔ HẠN

NGUYỄN THÚC AN, PHÓ ĐỨC ANH,
NGUYỄN ĐĂNG TỘ, NGUYỄN HÙNG SƠN

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Sử dụng nghiệm Đa lăm be một số tác giả [1] và [2] đã nghiên cứu sự va chạm dọc của hai thanh tự do, hay đầu kia của thanh thứ hai chịu lực cản nhớt. Trong bài báo này tác giả đã dùng phép biến đổi Laplace để xét bài toán về va chạm dọc của hai thanh đàn hồi có kể lực cản nhớt ở mặt bên của thanh thứ hai bán vô hạn mà nghiệm Đa lăm be không còn hiệu nghiệm khi giải bài toán này.

2. THIẾT LẬP BÀI TOÁN

Giả sử thanh thứ nhất chuyển động tịnh tiến với vận tốc V_{10} va chạm dọc vào thanh thứ hai bán vô hạn đứng yên với lực cản nhớt của môi trường tác dụng lên mặt bên của nó. Chọn trục tọa độ Ox có gốc trùng với đầu tự do của thanh thứ nhất khi va chạm và hướng từ thanh thứ nhất đến thanh thứ hai.

Phương trình chuyển động của thanh thứ nhất là:

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} \tag{2.1}$$

với $a_1 = \sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}}$ - vận tốc truyền sóng; $0 \leq x \leq \ell_1$ và $t > 0$.

Phương trình chuyển động của thanh thứ hai

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} + \lambda \frac{\partial U_2}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} \tag{2.2}$$

với $x \geq \ell_1$, $t > 0$ và λ - hệ số nhớt của lực cản được coi là hằng số.

Điều kiện đầu của bài toán khi $t = 0$ thì

$$\begin{aligned} U_1 &= 0, \quad \dot{U}_1 = V_{10} \\ U_2 &= 0, \quad \dot{U}_2 = 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Điều kiện biên của bài toán

$$\begin{aligned} &\frac{\partial U_1}{\partial x} = 0 \qquad \text{khi } x = 0 \\ &E_1 F_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} = E_2 F_2 \frac{\partial U_2}{\partial x} \quad \text{và } U_1 = U_2 \text{ khi } x = \ell_1 \end{aligned} \tag{2.4}$$

3. CÁCH GIẢI BÀI TOÁN

Để giải bài toán biên này ta đưa về giải hai bài toán sau:

Bài toán 1

Phương trình chuyển động của thanh

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} \quad \text{với} \quad 0 \le x \le \ell_1 \quad \text{và} \quad t > 0$$

Điều kiện đầu $U_1 = 0$, $\dot{U}_1 = V_{10}$ khi $t = 0$

Điều kiện biên $\frac{\partial U_1}{\partial x} = 0$ khi $x = 0$

$$E_1 F_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} = -Q(t) \quad \text{khi} \quad x = \ell_1 \tag{3.1}$$

Áp dụng phép biến đổi Laplace $U_1(t,x) \div U_1^{(0)}(p,x)$ và $Q(t) \div Q_0(p)$. Từ (2.1), (2.3) và (3.1) ta có:

$$\frac{d^2 U_1^{(0)}}{dx^2} - \frac{p^2}{a_1^2} U_1^{(0)} = -\frac{V_{10}}{a_1^2} \tag{3.2}$$

$$\frac{dU_1^{(0)}}{dx} = 0 \qquad \text{khi} \quad x = 0 \tag{3.3}$$

$$\frac{dU_1^{(0)}}{dx} = -\frac{Q_0(p)}{E_1 F_1} \quad \text{khi } x = \ell_1 \tag{3.4}$$

Nghiệm tổng quát của (3.2) là:

$$U_1^{(0)}(p,x) = C_1 e^{\frac{p}{a_1}x} + C_2 e^{-\frac{p}{a_1}x} + \frac{V_{10}}{p^2} \tag{3.5}$$

Từ điều kiện (3.3) ta có $C_1 = C_2$; đặt $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}C$ thì (3.5) được viết:

$$U_1^{(0)}(p,x) = C\,\mathrm{ch}\left(\frac{px}{a_1}\right) + \frac{V_{10}}{p^2} \tag{3.6}$$

Từ điều kiện (3.4) ta nhận được:

$$C = -\frac{a_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{Q_0(p)}{p \cdot \mathrm{sh}\left(\frac{p}{a_1}\ell_1\right)}$$

Hàm ảnh $U_1^{(0)}(p,x)$ có dạng:

$$U_1^{(0)}(p,x) = -\frac{a_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{Q_0(p)}{p} \cdot \frac{\mathrm{ch}\left(\frac{p}{a_1}x\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{p}{a_1}\ell_1\right)} + \frac{V_{10}}{p^2} \tag{3.7}$$

Xét hàm

$$g_0(p,x) = \frac{\mathrm{ch}\left(\frac{p}{a_1}x\right)}{p\,\mathrm{sh}\left(\frac{p}{a_1}\ell_1\right)}$$

Hay

$$g_0(p,x) = \sum_0^\infty \left[\frac{1}{p}e^{-[(2n+1)\ell_1 - x]\frac{p}{a_1}} + \frac{1}{p}e^{-[(2n+1)\ell_1 + x]\frac{p}{a_1}}\right]$$

Vậy

$$g_0(p,x) \div \sum_{n=0}^\infty \left\{\eta\left[t - \frac{(2n+1)\ell_1 - x}{a_1}\right] + \eta\left[t - \frac{(2n+1)\ell_1 + x}{a_1}\right]\right\}.$$

Sử dụng định lý hàm nhân cho (3.7) ta có:

$$U_1(t,x) = -\frac{a_1}{E_1F_1}\int_0^t Q(t-\tau)\cdot g(x,\tau)d\tau + V_{10}t = -\frac{a_1}{E_1F_1}\Big\{\sum_{n=0}^\infty \Big[\eta\big[t - \frac{(2n+1)\ell_1 - x}{a_1}\big]\times$$

$$\times \int_{\frac{(2n+1)\ell_1 - x}{a_1}}^t Q(t-\tau)d\tau + \eta\big[t - \frac{(2n+1)\ell_1 + x}{a_1}\big]\int_{\frac{(2n+1)\ell_1 + x}{a_1}}^t Q(t-\tau)d\tau\Big]\Big\} + V_{10}t$$

Đặt $n_1 = \left\|\frac{a_1 t - \ell_1 + x}{2\ell_1}\right\|$; $n_2 = \left\|\frac{a_1 t - \ell_1 - x}{2\ell_1}\right\|$ thì $U_1(t,x)$ có thể viết dưới dạng:

$$U_1(t,x) = V_{10}t + \frac{a_1}{E_1F_1}\Big[\sum_{n=0}^{n_1}\int_0^{t - \frac{(2n+1)\ell_1 - x}{a_1}} Q(\xi)d\xi + \sum_{n=0}^{n_2}\int_0^{t - \frac{(2n+1)\ell_1 + x}{a_1}} Q(\xi)d\xi\Big] \qquad (3.8)$$

Bài toán 2

Phương trình chuyển động của thangh thứ hai

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} + \lambda\frac{\partial U_2}{\partial t} = a_2^2\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} \quad \text{với} \quad x \geq \ell_1, \quad t > 0$$

Điều kiện đầu khi $t = 0$, thì $U_2 = 0$, $\dot{U}_2 = 0$
Điều kiện biên tại $x = \ell_1$, thì

$$E_2F_2\frac{\partial U_2}{\partial x} = -Q(t) \qquad (3.9)$$

Từ [3] ta có hàm ảnh

$$U_2^{(0)}(x,p) = \frac{a_2}{E_2F_2}Q_0(p)\cdot\frac{e^{-\sqrt{p^2+\lambda p}\left(\frac{x-\ell_1}{a_2}\right)}}{\sqrt{p^2+\lambda p}} \qquad (3.10)$$

Nghiệm của bài toán là:

$$U_2(t,x) = \frac{a_2}{E_2F_2}\eta\left(t - \frac{x-\ell_1}{a_2}\right)\int_{\frac{x-\ell_1}{a_2}}^t Q(t-\tau)e^{-\frac{\lambda}{2}\tau}I_0\Big[\frac{\lambda}{2}\sqrt{\tau^2 - \left(\frac{x-\ell_1}{a_2}\right)^2}\Big]d\tau \qquad (3.11)$$

Trong các biểu thức (3.8) và (3.11) thì hàm $Q(t)$ là ẩn hàm phải tìm, dựa vào (2.4) ta có $U_1(\ell_1,t) = U_2(\ell_1,t)$.

Suy ra $U_1^{(0)}(p,\ell_1) = U_2^{(0)}(p,\ell_1)$. Từ (3.7) và (3.10) ta có:

$$-\frac{a_1}{E_1F_1}\frac{Q_0(p)}{p}\,Cth\left(\frac{p}{a_1}\ell_1\right) + \frac{V_{10}}{p^2} = \frac{a_2}{E_2F_2}\,Q_0(p)\frac{1}{\sqrt{p^2+\lambda p}}.$$

Hay

$$Q_0(p)\Big[\frac{a_1}{E_1F_1}\cdot\frac{Cth\left(\frac{p\ell_1}{a_1}\right)}{p}+\frac{a_2}{E_2F_2}\frac{1}{\sqrt{p^2+\lambda p}}\Big]=\frac{V_{10}}{p^2} \tag{3.12}$$

Đặt

$$R_0(p)=\frac{a_1}{E_1F_1}\frac{Cth\left(\frac{p\ell_1}{a_1}\right)}{p}+\frac{a_2}{E_2F_2}\frac{1}{\sqrt{p^2+\lambda p}}=R_0^{(1)}(p)+R_0^{(2)}(p)$$

Ta có:

$$R_0^{(1)}(p)=\frac{a_1}{E_1F_1}\frac{Cth\left(\frac{p\ell_1}{a_1}\right)}{p}\div R^{(1)}(t)=\frac{a_1}{E_1F_1}(2n-1)\quad \text{với}\quad n-1\leq\frac{a_1t}{2\ell_1}<n$$

hay

$$R^{(1)}(t)=\frac{a_1}{E_1F_1}\left(2\left\|\frac{a_1t}{2\ell_1}\right\|+1\right) \tag{3.13}$$

$$R_0^{(2)}(p)=\frac{a_2}{E_2F_2}\frac{1}{\sqrt{p^2+\lambda p}}=\frac{a_2}{E_2F_2}\frac{1}{\sqrt{\left(p+\frac{\lambda}{2}\right)^2-\frac{\lambda^2}{4}}}$$

Vậy

$$R_0^{(2)}(p)\div R^{(2)}(t)=\frac{a_2}{E_2F_2}e^{-\frac{\lambda}{2}t}\cdot I_0\left(\frac{\lambda}{2}t\right). \tag{3.14}$$

$$\frac{V_{10}}{p^2}\div V_{10}t$$

Từ (3.12) và sử dụng định lý hàm nhân ta có:

$$\int_0^t Q(\tau)R(t-\tau)d\tau=V_{10}t \tag{3.15}$$

Ta xét trường hợp $0<\frac{a_1t}{2\ell_1}<1$, $R^{(1)}(t-\tau)=\frac{a_1}{E_1F_1}$. Thay kết quả này vào (3.15) ta có:

$$\int_0^t Q(\tau)\Big[\frac{a_1}{E_1F_1}+\frac{a_2}{E_2F_2}e^{-\frac{\lambda}{2}(t-\tau)}\cdot I_0\big[\frac{\lambda}{2}(t-\tau)\big]\Big]d\tau=V_{10}t \tag{3.16}$$

Đạo hàm hai vế của (3.16) theo t ta có:

$$Q(t)+\alpha_1\int_0^t K(t-\tau)Q(\tau)d\tau=\frac{2\alpha_1V_{10}}{\lambda} \tag{3.17}$$

Trong đó

$$\alpha_1=\frac{\lambda a_2E_1F_1}{2(E_2F_2a_1+E_1F_1a_2)}$$

$$K(t-\tau)=e^{-\frac{\lambda}{2}(t-\tau)}\cdot\Big\{I_1\big[\frac{\lambda}{2}(t-\tau)\big]-I_0\big[\frac{\lambda}{2}(t-\tau)\big]\Big\}$$

Lý luận tương tự khi $j-1 < \frac{a_1 t}{2\ell_1} < j$ với $j = 1, 2, \ldots$ ta có phương trình:

$$Q(t) + \alpha_j \int_0^t K(t-\tau)Q(\tau)d\tau = \frac{2\alpha_j V_{10}}{\lambda} \tag{3.18}$$

Trong đó

$$\alpha_j = \frac{1}{\left(2j-1\right)\dfrac{a_1}{E_1F_1} + \dfrac{a_2}{E_2F_2}} \cdot \frac{a_2}{E_2F_2}\frac{\lambda}{2}$$

Hệ phương trình (3.18) là phương trình tích phân Vonter loại 2, nghiệm có thể tìm được bằng cách lập dạng hàm $\left\{Q_n^{(j)}(t)\right\} \Rightarrow Q^{(j)}(t)$ như sau:

$$Q_0^{(j)} = \frac{2\alpha_j V_{10}}{\lambda} \tag{3.19}$$

$$Q_i^{(j)} = \frac{2\alpha_j V_{10}}{\lambda} - \alpha_j \int_0^t K(t-\tau)Q_{i-1}^{(j)}(\tau)d\tau \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Sau khi xác định được $Q(t)$ từ (3.19), thay vào (3.8) và (3.11) ta tìm dịch chuyển $U_1(t,x)$ và $U_2(t,x)$, từ đó có thể xác định được biến dạng, vận tốc tại mỗi thiết diện của thanh. Thời gian va chạm giữa hai thanh được xác định khi cho $Q(t) = 0$.

4. VÍ DỤ

Cho hai thanh kích thước $\ell_1 = 5\,m$, $F_1 = 30 \times 30\,(cm^2)$, $F_2 = 35 \times 35\,(cm^2)$, $E_1 = 2,5 \times 10^6\,kG/cm^2$ (thép), $E_2 = 3 \times 10^5\,kG/cm^2$ (bê tông): Vận tốc truyền sóng trong các thanh là $a_1 = 5 \times 10^3\,cm/s$, $a_2 = 3,5 \times 10^5\,cm/s$. Vận tốc thanh khi va chạm là $V_0 = 2,5\,m/s$. Hãy tìm thời gian va chạm của hai thanh, lực nén va chạm cực đại và dịch chuyển tại tiết diện $x = 2,5\,m$ (thuộc thanh 1) và tại thiết diện $x = 7,5\,m$ (thuộc thanh 2). Hệ số $\lambda = 0,06$.

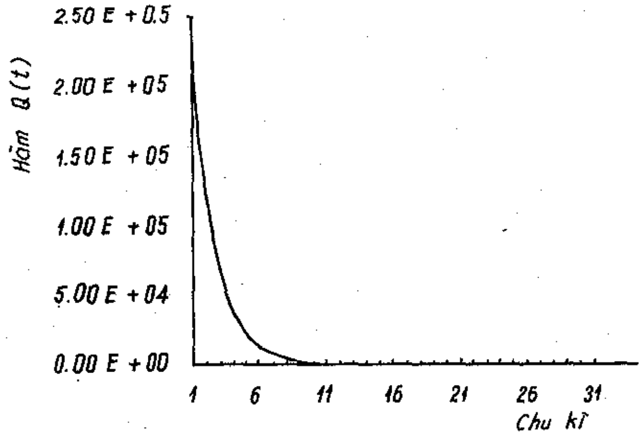
Theo các số liệu đã cho, chu kỳ $T_1 = 2\ell_1/a_1 = 0,002\,s$. Sau khi lập trình bằng ngôn ngữ Fortran 77 rồi giải trên máy vi tính, ta có kết quả $Q(t)$ như sau:

Chu kì 1	2.06E+05	Chu kì 10	1.38E+03	Chi kì 19	9	Chu kì 27	1.07E-01
Chu kì 2	1.18E+05	Chu kì 11	7.90E+02	Chu kì 20	6	Chu kì 28	6.16E-02
Chu kì 3	6.78E+04	Chu kì 12	4.63E+02	Chu kì 21	3	Chu kì 29	3.52E-02
Chu kì 4	3.89E+04	Chu kì 13	2.60E+02	Chu kì 22	2	Chu kì 30	2.02E-02
Chu kì 5	2.23E+04	Chu kì 14	1.49E+02	Chu kì 23	9.90E-01	Chu kì 31	1.16E-02
Chu kì 6	1.28E+04	Chu kì 15	85	Chu kì 24	5.69E-01	Chu kì 32	6.63E-03
Chu kì 7	7.32E+03	Chu kì 16	49	Chu kì 25	3.26E-01	Chu kì 33	3.80E-03
Chu kì 8	4.20E+03	Chu kì 17	28	Chu kì 26	1.87E-01	Chu kì 34	2.18E-03
Chu kì 9	2.41E+03	Chu kì 18	16				

Dựa trên kết quả này, ta có biểu đồ hàm $Q(t)$ ở 34 chu kỳ đầu tiên (hình 1). Như vậy, thời gian va chạm của thanh được tính bằng $14 \times T_1 = 0,028\,s$. Lực nén va chạm cực đại sẽ bằng $Q_{\max} = Q(0) = 2 \times 10^5\,kG$. Sau khi xác định được $Q(t)$, dựa vào công thức (3.7) và (3.11), ta thu được dịch chuyển tại các điểm ứng với $x = 2,5$ và $x = 7,5$, chẳng hạn:

$U_1(2,5;T_1) = 4,2 \times 10^{-3}\ m$
$U_1(2,5;2T_1) = 7,18 \times 10^{-3}\ m$
$\ldots\ldots$
$U_1(2,5;14T_1) = 21,7 \times 10^{-3}\ m$

$U_2(7,5;T_1) = 3,64 \times 10^{-3}\ m$
$U_2(7,5;2T_1) = 6,85 \times 10^{-3}\ m$
$\ldots\ldots$
$U_2(7,5;14T_1) = 2,68 \times 10^{-2}\ m$



Hình 1

Công trình hoàn thành với sự tài trợ của Chương trình nghiên cứu cơ bản trong lĩnh vực khoa học tự nhiên.

Địa chỉ:
Trường Đại học Thủy Lợi

Nhận ngày 12/5/1994

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Беляев Ю. В. Математическое исследование КПД удара "отбойных молотов" ВНИИ Стройдормаш. сб. трудов вып. XII - 1956.
2. Nguyễn Thúc An, Khổng Doãn Điền. Va chạm dọc của thanh đàn hồi có kể đến lực cản nhớt ở đầu thanh. Tạp chí Cơ học số 4, 1990.
3. Nguyễn Thúc An, Nguyễn Đăng Tộ. Va chạm dọc của vật rắn vào thanh đàn hồi bán vô hạn có kể đến lực cản nhớt ở mặt bên. Tạp chí Khoa học và Công nghệ số 9 + 10, 1990.

SUMMARY

THE LONGITUDINAL SHOCK OF TWO ELASTIC BARS WITH SIDE VISCORESISTANCE OF THE SECOND BAR WHICH IS SEMIENDLESS

In this paper authors studied the problem of longitudinal shock of two elastic bars of which the second bar is semiendless and its side resistance is caused by visco.

Where Authors determined the motions $U_1(t,x)$, $U_2(t,x)$ in the bars and shock time of the bars.