

XÁC ĐỊNH ĐẶC TRƯNG ĐỘNG LỰC HỌC CỦA HỆ VÔ SỐ BẬC TỰ DO TỪ SỐ LIỆU ĐO ĐẶC DAO ĐỘNG

NGUYỄN TIẾN KHIÊM, ĐÀO NHU MAI;
NGUYỄN VĂN ĐẮC, NGUYỄN VIỆT KHOA

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Đồng nhất hóa các hệ cơ học là việc thiết lập mô hình toán học cho một đối tượng đang làm việc dựa trên cơ sở số liệu đo đặc phản ứng và kích động. Đây là một vấn đề rất quan trọng đối với thực tiễn ở khắp mọi nơi. Tuy vậy, đây cũng là một bài toán rất phức tạp. Lý thuyết đồng nhất hóa các hệ động lực nói chung đã được phát triển ở mức độ cao và được viết trong nhiều sách, ví dụ [1, 2]. Nhưng ứng dụng những thành tựu toán học này vào thực tế, nhất là với cơ học còn gặp nhiều khó khăn. Những cố gắng bước đầu theo hướng này đã được trình bày trong [3]. Ở đây tác giả cũng chỉ dừng lại ở việc phát triển phương pháp luận và cũng chỉ quan tâm đến hệ hữu hạn bậc tự do. Bài báo này sẽ góp phần xây dựng một phương pháp thực dụng để đồng nhất hóa hệ vô số bậc tự do, bắt đầu từ mô hình đơn giản nhất - dầm đàn hồi. Bài toán đặt ra là xác định tần số riêng, dạng dao động riêng và hệ số cản kết cấu của dầm đàn hồi khi bị uốn thuần túy. Đặc điểm của phương pháp là đơn giản, thuận tiện, và chỉ sử dụng rất ít thông tin về số liệu đo đặc (phổ phản ứng).

2. DAO ĐỘNG CỦA DẦM ĐÀN HỒI - NHỮNG ĐẶC TRƯNG ĐỘNG LỰC HỌC

Xét hệ vô số bậc tự do, dao động của nó được mô tả bằng phương trình:

$$A\ddot{u}(x, t) + B\dot{u}(x, t) + Cu(x, t) = q(x, t), \quad (2.1)$$

$u(x, t)$ là dịch chuyển của hệ tại x trong thời điểm t , $x \in [0, 1]$, $t \in (0, \infty)$, $q(x, t)$ là tải trọng phân bố, A, B, C - lần lượt là các toán tử khối lượng, cản, độ cứng tác dụng theo biến x , dấu chấm trên đầu $u(x, t)$ là đạo hàm riêng theo t .

Cùng với (2.1) có điều kiện đầu:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \dot{u}(x, 0) = \dot{u}_0(x). \quad (2.2)$$

và điều kiện biên:

$$D_{j0}u(x, t)|_{x=0} = D_{j\ell}u(x, t)|_{x=\ell} = 0, \quad (2.3)$$

$j = 1, 2$, D_{j0} , $D_{j\ell}$ là các toán tử theo x , ví dụ:

$$u(0, t) = \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u(\ell, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u(\ell, t)}{\partial x^3} = 0. \quad (2.4)$$

a) Bài toán trị riêng
Lời giải bài toán trị riêng

$$(-A\omega^2 + C)\Phi = 0 \quad (2.5)$$

với các điều kiện biên (2.3) và dạng cụ thể của A, C đã được viết ở nhiều sách [4]. Ở đây chỉ liệt kê vài tính chất và kết quả.

Trong (2.5), ω tần số riêng và $\Phi(x)$ là dạng dao động riêng của hệ. Mỗi một dạng riêng $\Phi_j(x)$ ứng với một tần số riêng ω_j và số lượng dạng riêng là vô cùng. Chúng có tính chất:

$$\begin{aligned} (\Phi_j A \Phi_k) &= \int_0^l \Phi_j(x) A \Phi_k(x) dx = \begin{cases} m_j, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases} \\ (\Phi_j C \Phi_k) &= \begin{cases} C_j, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases} \end{aligned}$$

$\Phi_j(x)$ chứa hằng số bất kỳ E_j , có thể chọn từ điều kiện chuẩn hóa tùy ý. Đối với trường hợp (2.4) và $A = \rho F, C = EJ \partial^4 / \partial x^4$ ta có:

$$\omega_j = k_j^2 a, \quad \Phi_j = E_j [K_3(\ell) K_2(x) - K_1(\ell) K_4(x)]$$

k_j là nghiệm phương trình: $\cos k\ell \operatorname{ch} k\ell = -1$

$$\begin{aligned} K_1(x) &= \frac{1}{2}(\cos k_j x + \operatorname{ch} k_j x), & K_2(x) &= \frac{1}{2}(\cos k_j x - \operatorname{ch} k_j x) \\ K_3(x) &= \frac{1}{2}(\sin k_j x + \operatorname{sh} k_j x), & K_4(x) &= \frac{1}{2}(\sin k_j x - \operatorname{sh} k_j x) \end{aligned}$$

$a = \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}$, E - modul đàn hồi, F - diện tích tiết diện ngang, J - mômen quán tính của F , ρ - khối lượng riêng.

Về lực cản nói chung giả thiết B có tính chất:

$$(\Phi_j B \Phi_k) = \begin{cases} b_j, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

và $h_j = \frac{b_j}{2\sqrt{m_j c_j}}$ là hệ số cản kết cấu ứng với dạng dao động thứ j , để tồn tại dao động theo dạng j thì $0 < h_j < 1$.

Dạng riêng $\Phi_j(x)$ có tính chất sau: Hàm $\Phi_j(x)$ sẽ bằng không tại $j-1$ điểm x_{jm} nằm trong $(0, 1)$, các điểm x_{jm} này gọi là điểm nút của dạng Φ_j , hiển nhiên là điểm nút có thể xác định từ phương trình:

$$\Phi_j(x) = 0, \quad x \in (0, 1).$$

Rõ ràng là dạng dao động thứ j sẽ đổi dấu $j-1$ lần trong đoạn $(0, 1)$

b) Dao động riêng (khi $q(x, t) = 0$)

Nếu tìm nghiệm của (2.1) ở dạng

$$u(x, t) = \sum_{j=1} \Phi_j(x) \xi_j(t)$$

thì $\xi_j(t)$ thỏa mãn phương trình:

$$\ddot{\xi}_j(t) + 2h_j\omega_j\dot{\xi}_j(t) + \omega_j^2\xi_j(t) = 0$$

và có dạng

$$\begin{aligned}\xi_j(t) &= e^{-h_j\omega_j t} (A_j \cos \omega_j^* t + B_j \sin \omega_j^* t) \\ A_j &= \xi_j^0, \quad B_j = \frac{1}{\omega_j^*} (\dot{\xi}_j^0 + h_j\omega_j \xi_j^0), \quad \omega_j^* = \omega_j \sqrt{1 - h_j^2}, \\ \xi_j^0 &= \frac{1}{\|\Phi_j\|} \int_0^\ell u_0(x) \Phi_j(x) dx, \quad \dot{\xi}_j^0 = \frac{1}{\|\Phi_j\|} \int_0^\ell \dot{u}_0(x) \Phi_j(x) dx, \\ \|\Phi_j\| &= \int_0^\ell \Phi_j^2(x) dx.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Khi đó

$$u(x, t) = \sum_{j=1} \Phi_j(x) e^{-h_j\omega_j t} [A_j \cos \omega_j^* t + B_j \sin \omega_j^* t].\tag{2.7}$$

Biến đổi Fourier hai vế (2.7) theo t , ta được:

$$U(x, \omega) = \sum_{j=1} \Phi_j(x) \frac{P_j(\omega)}{D_j(\omega)},$$

trong đó

$$\begin{aligned}D_j(\omega) &= (\omega_j^2 - \omega^2)^2 + 4h_j^2\omega_j^2\omega^2, \\ P_j(\omega) &= RP_j + iP_j \\ &= [A_j h_j \omega_j (\omega_j^2 + \omega^2) + B_j \omega_j^* (\omega_j^2 - \omega^2)] + i\omega [A_j (\omega_j^2 - \omega^2 - 2h_j\omega_j^2) - B_j \omega_j^* 2h_j\omega_j].\end{aligned}$$

Ta gọi hàm:

$$S_u(x, \omega) = |U(x, \omega)|^2\tag{2.8}$$

là phổ biên độ tần số của chuyển vị $u(x, t)$ (hay gọi tắt là phổ biên độ),

Theo (2.8) phổ biên độ có dạng

$$\begin{aligned}S_u(x, \omega) &= \sum_{j,k} H_{jk}(\omega) \Phi_j(x) \Phi_k(x) \\ H_{jk}(\omega) &= \frac{RP_j(\omega)RP_k(\omega) + IP_j(\omega)IP_k(\omega)}{D_j(\omega)D_k(\omega)}\end{aligned}\tag{2.9}$$

Đây là một hàm xác định dương của hai biến x và ω . Với mỗi giá trị của x , $S_u(x, \omega)$ cho ta phổ biên độ chuyển vị tại vị trí x . Tại mỗi giá trị ω , ta được hàm của x , là bình phương biên độ ứng với tần số ω . Trong trường hợp này $S_u(x, \omega)$ gắn liền với các dạng riêng.

Thật vậy, nếu x trùng với một điểm nút x_m của dạng Φ_m , tức $\Phi_m(x) = 0$ thì

$$S_u(x_m, \omega) = \sum_{\substack{j \neq m \\ k \neq m}} H_{jk}(\omega) \Phi_j(x) \Phi_k(x)$$

lúc đó $S_u(x_m, \omega)$ sẽ không phụ thuộc vào ω_m , h_m nữa, và do đó không thể xác định được chúng. Nhưng cũng tại x_m , thì dạng Φ_m sẽ không ảnh hưởng đến phổ biên độ. Dựa trên kết luận này có thể khử được ảnh hưởng qua lại giữa các dạng lên tần số cộng hưởng.

Để mừng trọng dáng điệu của $S_u(x, \omega)$ theo ω , ta xét trường hợp cụ thể $u_0(x) = 0$, lúc đó $A_j = \xi_j^0$, $B_j \omega_j^* = h_j \omega_j \xi_j^0$ và

$$H_{jk}(\omega) = \xi_j^0 \xi_k^0 \frac{4h_j h_k \omega_j^3 \omega_k^3 + (\omega_j^2 - \omega^2 - 4h_j^2 \omega_j^2)(\omega_k^2 - \omega^2 - 4h_k^2 \omega_k^2) \omega^2}{[(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + 4h_j^2 \omega_j^2 \omega^2][(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + 4h_k^2 \omega_k^2 \omega^2]}$$

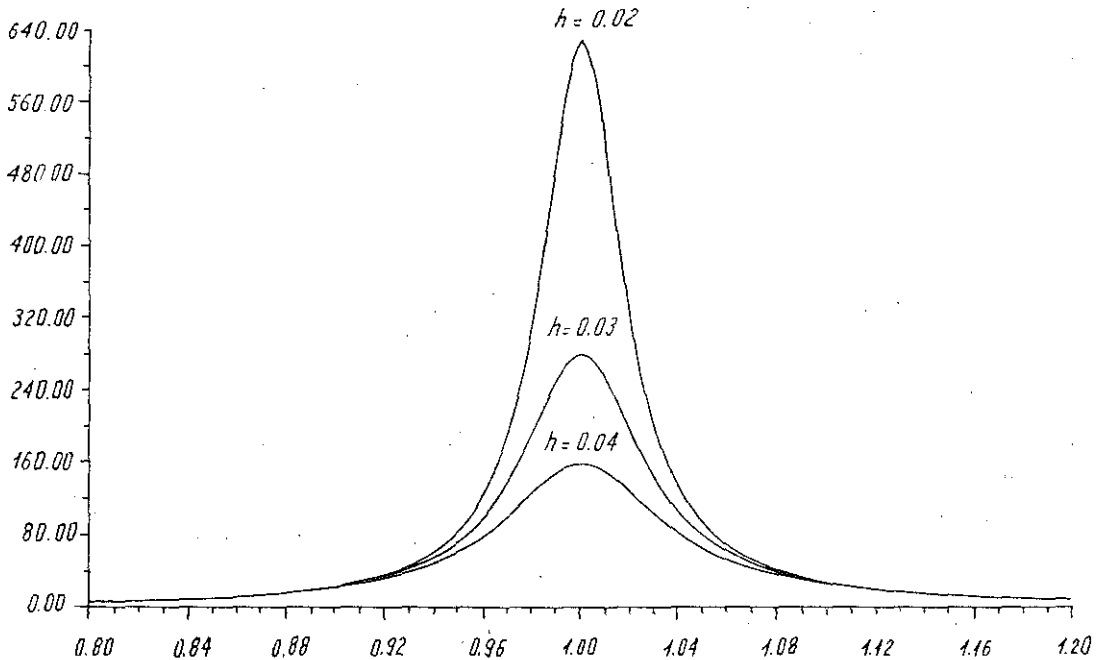
vì hàm dạng xác định không duy nhất, tỷ lệ với hằng số tùy ý, ta ký hiệu luôn $\bar{\Phi}_j(x) = \xi_j^0 \Phi_j(x)$, khi đó, phổ biên độ vẫn giữ nguyên dạng (2.9) và $\Phi_j(x)$ được thay bằng $\bar{\Phi}_j(x)$ và $H_{jk}(\omega)$ sẽ bằng

$$H_{jk}(\omega) = \frac{4h_j h_k \omega_j^3 \omega_k^3 + (\omega_j^2 - \omega^2 - 4h_j^2 \omega_j^2)(\omega_k^2 - \omega^2 - 4h_k^2 \omega_k^2) \omega^2}{[(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + 4h_j^2 \omega_j^2 \omega^2][(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + 4h_k^2 \omega_k^2 \omega^2]}, \quad (2.10)$$

ký hiệu: $\gamma_j = \omega/\omega_j$, ta có thể viết (2.10) ở dạng:

$$H_{jk}(\omega) = \frac{1}{\omega_k \omega_j} \frac{4h_j h_k + \gamma_j \gamma_k (1 - \gamma_j^2 - 4h_j^2)(1 - \gamma_k^2 - 4h_k^2)}{[(1 - \gamma_j^2)^2 + 4h_j^2 \gamma_j^2][(1 - \gamma_k^2)^2 + 4h_k^2 \gamma_k^2]}$$

Đặt $H_j(\gamma_j) = \frac{4h_j^2 + \gamma_j^2(1 - \gamma_j^2 - 4h_j^2)^2}{[(1 - \gamma_j^2)^2 + 4h_j^2 \gamma_j^2]^2}$, ta có $H_{jj} = \frac{1}{\omega_j^2} H_j(\gamma_j)$, đồ thị các hàm $H_j(\gamma_j)$ với các chỉ số j khác nhau (ứng với các h_j khác nhau) cho trên hình 1.



Hình 1

Từ hình 1 ta thấy $H_j(\gamma_j)$ đạt cực đại duy nhất tại $\gamma_j = 1$ và $H_j(1) = 1 + \frac{1}{4h_j^2} \approx \frac{1}{4h_j^2}$ khi $h_j \ll 1$. Ngoài ra, nếu $\gamma_j < 0,8$ và $\gamma_j > 1,2$ thì $H_j(\gamma_j)$ đã xấp xỉ không (rất nhỏ). Điều này cho thấy nếu $|\omega - \omega_j| > 1/5\omega_j$, $H(\gamma_j)$ coi như bằng không. Xét giới hạn tiệm cận của các hàm $H_{jj}(\omega)$ và $H_{jk}(\omega)$, đối với j, k khi $|\omega_j - \omega_k|$ lớn. Xét tỷ số

$$\frac{H_{kk}(\omega)}{H_{jj}(\omega)} = \frac{\omega_j^2 H_k(\gamma_k)}{\omega_k^2 H_j(\gamma_j)} = \frac{1}{H_j(\gamma_j)} \frac{\omega_j^2}{\omega_k^2} H_k\left(\gamma_j \frac{\omega_j}{\omega_k}\right)$$

trong lân cận của ω_j tức khi $\gamma_j \approx 1$. Lúc đó

$$\frac{H_{kk}(\omega)}{H_{jj}(\omega)} = \frac{1}{H_j(1)} \frac{\omega_j^2}{\omega_k^2} H_k\left(\frac{\omega_j}{\omega_k}\right)$$

Nếu $\frac{\omega_j}{\omega_k} \gg 1$, khi đó $\frac{\omega_j^2}{\omega_k^2} H_k\left(\frac{\omega_j}{\omega_k}\right) \approx 1$. Nếu $\frac{\omega_j}{\omega_k} \ll 1$ thì $\frac{\omega_j^2}{\omega_k^2} H_k\left(\frac{\omega_j}{\omega_k}\right) \approx \frac{h_k^2 \omega_j^2}{\omega_k^2} = h_k^2 \varepsilon_{jk}^2$ vì $H_j(1) \approx \frac{1}{h_j^2}$ khi $h_j \ll 1$, gộp lại ta được

$$\frac{H_{kk}(\omega)}{H_{jj}(\omega)} = \begin{cases} h_j^2 \varepsilon_{jk}^2 h_k^2 & \text{khi } \varepsilon_{jk} = \omega_j/\omega_k \ll 1 \\ h_j^2 & \text{khi } \omega_j/\omega_k \gg 1 \end{cases} \quad (2.11)$$

Kết luận 1. Trong lân cận của ω_j hàm $H_{jj}(\omega)$ lớn hơn rất nhiều so với các $H_{kk}(\omega)$ với k sao cho ω_k không nằm trong lân cận của ω_j và với $\omega_k > \omega_j$ thì H_{kk} còn nhỏ hơn nữa.

Mặt khác, ta có $H_{jk}(\omega) \leq \sqrt{H_{jj}(\omega)H_{kk}(\omega)}$. Thay (2.11) vào bất đẳng thức cuối ta được

$$\frac{H_{jk}(\omega)}{H_{jj}(\omega)} \leq \begin{cases} h_j \varepsilon_{jk} h_k & \text{khi } \varepsilon_{jk} = \omega_j/\omega_k \ll 1 \\ h_j & \text{khi } \omega_j/\omega_k \gg 1 \end{cases} \quad (2.12)$$

Kết luận 2. Ảnh hưởng của các dạng dao động với tần số không gần với tần số ω_j lên dao động trong lân cận của ω_j là rất nhỏ. Đặc biệt, những dao động với tần số cao hơn ω_j ảnh hưởng còn nhỏ hơn nhiều ảnh hưởng của các dao động với tần số bé hơn ω_j .

Tất cả những nhận xét này là cơ sở cho một phương pháp đánh giá các đặc trưng dao động từ số liệu đo đạc của phổ biên độ, được trình bày trong phần tiếp theo.

3. MỘT PHƯƠNG PHÁP XÁC ĐỊNH CÁC THAM SỐ ĐỘNG LỰC HỌC (ω_j, h_j, Φ_j)

Phương pháp được xây dựng dưới đây chỉ áp dụng với các hệ có tính chất

a) Cản nhỏ $h_j \ll 1$, $\forall j$ và b) Tần số riêng không gần nhau và xuất phát từ 3 tiên đề sau đây:

1. Phổ biên độ đạt cực đại địa phương trong lân cận của các tần số riêng. Nếu gọi tần số mà phổ đạt cực đại (đỉnh) là tần số cộng hưởng thì coi tần số cộng hưởng là gần đúng của tần số riêng (Tính lọc cao).

2. Hệ số cản ứng với tần số riêng nào đó chính là dải tần cho qua của tần số đó và mô tả độ nhọn của đỉnh cộng hưởng tương ứng.

3. Ảnh hưởng của các dạng có tần số cao hơn tần số nào đó đến biên độ dao động tại tần số này nhỏ hơn ảnh hưởng của các tần số thấp hơn nó và chúng có thể bỏ qua.

Xuất phát từ những tiên đề (giả thiết) này ta có thể xác định tần số riêng ω_j , hệ số cản h_j và dạng riêng Φ_j bằng cách sau.

A. Tần số riêng

Trên đồ thị của phổ đo được $\bar{S}_m(\omega, x)$ như là hàm của ω đối với một điểm đo nào đó x , hoành độ của các đỉnh lần lượt từ trái sang phải là các tần số riêng tăng dần. Số lượng đỉnh, độ cao của đỉnh và ngay cả hoành độ của đỉnh có thể phụ thuộc rất nhiều vào điểm đo. Điều này có thể giải thích như sau: Về mặt toán học phổ biên độ là hàm của hai biến ω và x vì vậy các tham số của cực trị địa phương theo ω hiển nhiên là sẽ phụ thuộc vào x . Tuy vậy tìm biểu thức toán học của sự phụ thuộc này là việc hết sức khó khăn và cũng chưa được nghiên cứu. Chúng tôi sẽ đề cập đến vấn đề này trong bài báo khác.

Về phương diện cơ học rõ ràng là dao động đo được phụ thuộc rất nhiều vào điểm đo, ví dụ nếu điểm đo đặt vào nút của dạng nào đó thì tần số tương ứng sẽ không xuất hiện. Đây là một đặc điểm quan trọng của hệ phân bố mà chúng ta có thể sử dụng để lựa chọn các đỉnh gần đúng nhất theo kết quả phép đo ở các vị trí khác nhau. Cụ thể là: tần số ω đo được sẽ chính xác nhất

tại điểm đo mà ở đó theo lý thuyết dạng riêng thứ j đạt cực đại và các dạng khác đạt cực tiểu. Tiêu chuẩn này về mặt lý thuyết là rất khó thỏa mãn, nhưng trong thực tế ta có thể chỉ cần thỏa mãn một trong hai điều kiện và xem xét những dạng với $\omega_k < \omega_j$ hoặc những tần số gần ω_j nhất. Bởi vì theo phân tích ở trên ảnh hưởng qua lại giữa các dạng càng nhỏ nếu chúng càng xa nhau hoặc khi tần số càng lớn. Thực hiện việc lựa chọn này sẽ được tiến hành trong thực nghiệm cụ thể. Tóm lại, là từ đồ thị của phổ biên độ đo được ta có thể xác định một cách gần đúng tần số riêng.

B. Hệ số cản

Theo tiên đề 2, hệ số cản kết cấu ứng với một dạng dao động nào đó được biểu thị qua độ nhọn của đỉnh tương ứng. Việc tính toán độ nhọn của một đỉnh nào đó trên đồ thị cho trước có thể được thực hiện theo nhiều cách khác nhau, ở đây đưa ra hai phương pháp:

1. Giả sử hàm số $S(\omega)$ đạt cực đại địa phương tại ω_0 tức

$$S(\omega_0) = \max S(\omega) = S_0$$

lúc đó $S(\omega)$ sẽ đạt cực tiểu tại ω_1 và ω_2 , $\omega_1 < \omega_0$, $\omega_2 > \omega_0$. Ta tính đại lượng

$$\Delta = \frac{1}{S_0} \int_{\omega_1}^{\omega_2} S(\omega) d\omega \quad (3.1)$$

Δ - đặc trưng cho độ nhọn của đỉnh S_0 , và hệ số cản sẽ được tính bằng công thức

$$h_0 = \frac{\Delta}{2\omega_0} \quad (3.2)$$

2. Trên đồ thị hàm $S(\omega)$, kẻ đường thẳng song song với trục hoành cắt trục tung tại điểm $(1/2)S_0$, nó sẽ cắt đồ thị tại hai điểm ω_1^* và ω_2^* . Hiển nhiên $\omega_1^* < \omega_0$ và $\omega_2^* > \omega_0$ lúc đó

$$h_0 = \frac{\omega_2^* - \omega_1^*}{2\omega_0} \quad (3.3)$$

Cả hai phương pháp này đều dựa trên nguyên lý năng lượng. Việc tính toán năng lượng theo phương pháp 1 chính xác hơn nhưng lại phải tính tích phân số nên cũng không thể tránh được sai số. Phương pháp thứ 2 cách tính năng lượng không chính xác, nhưng lại đơn giản không bị sai số tính tích phân. Để so sánh chúng ta xem kết quả tính toán theo hai cách đối với hệ một bậc tự do cho trước. Xem bảng 1.

Bảng 1

h Hệ số cản cho trước	$\bar{\omega}$ (tần số riêng = 1) tần số cộng hưởng		Hệ số cản tính toán theo	
	lý thuyết	đo đạc	phương pháp 1	phương pháp 2
0,01	0,9999	1,0	0,01	0,01
0,05	0,9975	0,997	0,04983	0,05
0,10	0,98995	0,990	0,09882	0,101
0,15	0,97724	0,977	0,14623	0,154
0,20	0,95917	0,959	0,19131	0,209

Từ bảng 1 ta thấy sai số của hai phương pháp tương tự như nhau. Chỉ có điều phương pháp 1 cho ta kết quả nhỏ hơn, phương pháp 2 - lớn hơn giá trị thực. Hệ số càng nhỏ, độ chính xác càng lớn. Do tính đơn giản ta chọn phương pháp 2 để áp dụng thực tế. Ở đây cũng cần phải lưu ý là hệ số cần tính cho một tần số nào đó cũng phụ thuộc vào điểm đo (x). Tuy nhiên vì bản thân hệ số cần rất nhỏ, nên ảnh hưởng rất nhỏ và ta có thể chọn giá trị trung bình cho các điểm đo khác nhau.

C. Dạng riêng ($\Phi_j(x)$, $j = 1, 2, \dots$)

Giả sử ta đã có ω_j , h_j và phổ biên độ $\bar{S}_m(\omega, x)$. Để tìm dạng riêng $\Phi_j(x)$ ta sử dụng công thức lý thuyết của phổ biên độ (2.9). Ký hiệu hàm dạng là $\varphi_j(x)$, $j = 1, 2, \dots$. Vì chúng xác định không duy nhất với độ chính xác đến hằng số tùy ý α_j , nên ta sẽ được hàm cần tìm là $\Phi_j(x) = \alpha_j \varphi_j(x)$, các hằng số α_j sẽ xác định để $\Phi_j(x)$ thỏa mãn với điều kiện đặt ra. Ở đây ta sử dụng tiên đề 3, tức bỏ qua ảnh hưởng của các dạng có tần số cao hơn tần số đang xét.

Biểu diễn hàm phổ ở dạng:

$$S_u(x, \omega) = \sum_{j,k} H_{jk}(\omega) \varphi_j(x) \varphi_k(x) = \sum_{n=1} S_n(x, \omega), \quad (3.4)$$

trong đó

$$\begin{aligned} S_n(x, \omega) &= H_{nn}(\omega) \varphi_n^2(x) + 2 \left(\sum_{k=1}^{n-1} H_{kn}(\omega) \varphi_k(x) \right) \varphi_n(x) \\ &= H_{nn}(\omega) \varphi_n^2(x) + 2K_{nn}(\omega, x) \varphi_n(x). \end{aligned}$$

Giả sử ta đã tìm được $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}(x)$ thì $\varphi_n(x)$ sẽ tìm được từ phương trình

$$H_{nn}(\omega_n) \varphi_n^2(x) + 2K_{nn}(\omega_n, x) \varphi_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} S_k(\omega_n, x) = \bar{S}_m(\omega_n, x) \quad (3.5)$$

Đây là phương trình bậc hai đối với $\varphi_n(x)$. Theo những đánh giá ở phần 2, trong vế trái của (3.5) số hạng đầu tiên là trội hơn cả, vì vậy hàm $\bar{S}_m(\omega_n, x)$ sẽ mang dấu hiệu của $H_{nn}(\omega_n) \varphi_n^2(x)$. Theo lý thuyết thì hàm $\varphi_n(x)$ có $n-1$ điểm nút là $(x_{n,1}, \dots, x_{n,n-1})$, tại đó $\varphi_n(x_{n,j}) = 0$, $j = 1, \dots, n-1$. Vì vậy có thể khẳng định rằng phổ biên độ đo được $\bar{S}_m(\omega_n, x)$ phải có $n-1$ cực tiểu địa phương tại $x_{n,j}$, $j = 1, \dots, n-1$. Như vậy ta có thể xác định $x_{n,j}$ từ điều kiện

$$x_{n,j} = \left\{ x, \min_n \bar{S}_m(\omega_n, x) \right\}, \quad j = 1, \dots, n-1$$

Tại các điểm nút này phải thỏa mãn đẳng thức:

$$E(\omega_n, x_{n,j}) = \bar{S}_m(\omega_n, x_{n,j}) - \sum S_k(\omega_n, x_{n,j}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3.6)$$

$n-1$ phương trình này sẽ được thỏa mãn bằng cách chọn các hằng số tùy ý $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ của $n-1$ dạng riêng đã được xác định từ trước đó.

Cuối cùng từ (3.5) ta có:

$$\varphi_n(x) = \frac{-K_{nn}(\omega_n, x) \pm \sqrt{K_{nn}^2(\omega_n, x) + H_{nn}(\omega_n) E(\omega_n, x)}}{H_{nn}(\omega_n)}, \quad (3.7)$$

$\varphi_n(x_{n,j}) = 0$, $j = 1, \dots, n-1$. Dấu cộng và dấu trừ ta sẽ chọn lần lượt thay đổi nhau trong n đoạn $(x_{n,j-1}, x_{n,j})$, $j = 1, \dots, n$, $x_{n,0} = 0$, $x_{n,n} = 1$.

Để minh họa, ta viết lần lượt các nghiệm, bắt đầu từ $n = 1, 2, \dots$

$n = 1$ $\bar{S}_m(\omega_1, x) = H_{11}(\omega_1)\varphi_1^2(x) \Rightarrow \varphi_1(x) = \pm \sqrt{\frac{\bar{S}_m(\omega_1, x)}{H_{11}(\omega_1)}}$. Hoặc dấu + hoặc dấu -. Ta chọn dấu +

$$\varphi_1(x) = \sqrt{\frac{\bar{S}_m(\omega_1, x)}{H_{11}(\omega_1)}} \quad (3.8)$$

$n = 2$: Phương trình (3.6) có dạng

$$\bar{S}_m(\omega_2, x_{21}) = H_{11}(\omega_2)\alpha_1^2\varphi_1^2(x_{21}) \Rightarrow \alpha_1 = \left\{ \frac{\bar{S}_m(\omega_2, x_{21})}{H_{11}(\omega_2)} \frac{H_{11}(\omega_1)}{\bar{S}_m(\omega_1, x_{21})} \right\}^{1/2}$$

và do đó $\Phi_1(x) = \alpha_1\varphi_1(x)$. Thay $\Phi_1(x)$ này vào (3.5), ta được:

$$\varphi_2(x) = \frac{-H_{12}(\omega_2)\Phi_1(x) + \sqrt{H_{12}^2(\omega_2)\Phi_1^2(x) + H_{22}(\omega_2)[\bar{S}_m(\omega_2, x) - H_{11}(\omega_2)\Phi_1^2(x)]}}{H_{22}(\omega_2)}, \quad 0 \leq x \leq x_{21}$$

$$\varphi_2(x) = 0, \quad x = x_{21} \quad (3.9)$$

$$\varphi_2(x) = \frac{-H_{12}(\omega_2)\Phi_1(x) - \sqrt{H_{12}^2(\omega_2)\Phi_1^2(x) + H_{22}(\omega_2)[\bar{S}_m(\omega_2, x) - H_{11}(\omega_2)\Phi_1^2(x)]}}{H_{22}(\omega_2)}, \quad x_{21} \leq x \leq 1$$

Tiếp tục ta sẽ có $\varphi_3, \varphi_4 \dots$

Trong [5] các tác giả đưa ngay công thức

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{\bar{S}_m(\omega_n, x)}{H_{nn}(\omega_n)}} \quad (3.10)$$

là trường hợp riêng của (3.7) khi bỏ qua $K_{nn}(\omega_n, x)$, $\sum_{k=1}^{n-1} S_k(\omega_n, x)$. Việc tính toán theo (3.10) trong trường hợp tương tác giữa các dạng rất nhỏ cũng cho kết quả chấp nhận được và không khác nhiều so với (3.7).

4. THỰC NGHIỆM TRÊN MÔ HÌNH

Chúng tôi đã tiến hành đo đạc và tính toán cho một mô hình thực nghiệm là dầm thép thẳng đứng ngàm đầu dưới và đầu trên tự do. Số liệu của dầm như sau:

$l = 1 \text{ m}$, $a = 8,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $b = 26,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $F = ab = 2,08 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, $\rho = 7,85 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m}^3$, $E = 2,058 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $J = ab^3/12 = 11,0933 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4$.

Với những số liệu trên việc tính toán giải tích cho ta các tần số riêng

Bảng 2

$f = \omega/2\pi$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9
	6,602	41,38	115,8	227,0	375,3	560,7	783,1	1042,6	1339,2

và dạng riêng thứ nhất và thứ hai trong hình 2.

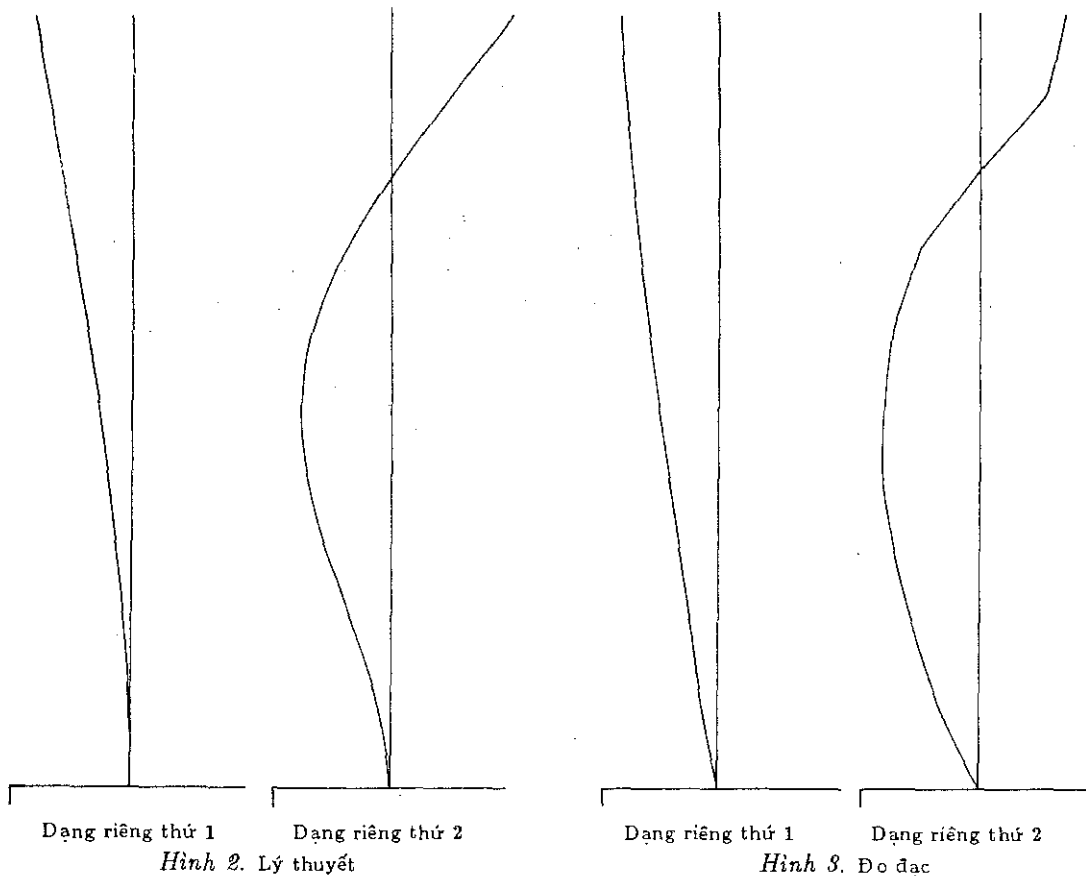
Đo đạc phổ dao động riêng của dầm ở 10 điểm từ dưới lên cách nhau 0,1 m. Dao động được kích bằng cách kéo đầu tự do sang ngang một đoạn bằng 0,04 m và thả ra cho bắt đầu dao động

tự do. Khi đó $u_0(x) = u(0, x) = 0,04 \{1,5x^2 - 0,5x^3\}$ và $\dot{u}_0(x) = 0$. Kết quả đo đạc cho trong bảng 3.

Bảng 3

Điểm đo m	$f_1(H)$ Hz	$S_m(f_1, x)$ mm	f_2 Hz	$S_m(f_2, x)$ μm
$x = 0,1$	7,0	0,254	43,687	6,09
0,2	7,0	0,67	43,437	16,20
0,3	7,0	1,480	43,875	29,20
0,4	6,937	2,50	42,375	38,4
0,5	6,937	3,48	42,312	36,9
0,6	6,812	4,79	42,812	30,2
0,7	6,812	6,04	43,375	14,2
0,8	6,75	7,40	43,625	3,27
0,9	6,625	8,53	43,00	18,2
1,0	6,562	9,31	41,312	30,5

Tuân thủ theo quy tắc nêu trong phần trước ta chọn được: $f_1 = 6,562 \text{ Hz}$ và $f_2 = 41,312 \text{ Hz}$, hệ số cản tính được $h_1 = 0,005$, $h_2 = 0,0012$. Từ số liệu phổ biên độ đo được trên, theo thuật toán nêu ra ta tính được các dạng riêng thứ nhất và thứ hai cho trên hình 3.



Kết quả đo đạc và tính toán nói chung phù hợp với nhau. Riêng ở những điểm gần chỗ ngàm cứng có sự sai khác về góc xoay. Nguyên nhân gồm hai yếu tố: Một là liên kết của dầm và nền trên thực tế không phải là ngàm cứng tuyệt đối như trong tính toán lý thuyết; Hai là trong thực nghiệm chỉ cho phép ta đo được một số điểm rời rạc ít hơn nhiều số điểm tính toán, vì vậy đường cong vẽ ra là đường gấp khúc không đảm bảo tính trơn như trong lý thuyết. Tuy vậy kết quả đo đạc phản ánh đúng thực tế.

Công trình được sự tài trợ của chương trình nghiên cứu cơ bản trong lĩnh vực khoa học tự nhiên

Địa chỉ:
Viện Cơ học, Trung tâm KHTN & CNQG

Nhận ngày 15/9/1994

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Дейч А. И. Методы идентификации динамических объектов. М. Энергия, 1979, 240с.
2. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. Пер. с Англ./ Под ред. Я. З. Цыпкина, Наука, М. 1991, 432с.
3. Редько С. Ф., Ушкалов В. Ф., Яковлев В. П. Идентификация механических систем, Наукова Думка, Киев, 1985, 216с.
4. Вибрация в технике. Справочник в 6-ти томах. Ред. Совет: В. Н. Челомей, Машиностроение, М. 1978, Т.1, Колебания линейных систем/ Под ред. В. В. Болотина, 1978, 352с.
5. Бендат Дж, Пирсон А. Применение корреляционного и спектрального анализа. Пер. с Англ. Мир, М. 1983, 312с.

SUMMARY

IDENTIFICATION OF DYNAMICAL CHARACTERISTICS FOR DISTRIBUTED PARAMETERS SYSTEMS FROM MEASURED VIBRATION DATA

This article is devoted to determinate the dynamical characteristics (Natural Frequencies, Mode Shapes, Damping Ratio) of elastic beam from measured responce auto-spectrum. Developed here method is based on the assumptions of smallness of the damping and sparse distribution of natural frequencies. Accuracy and practical meaning of the method are confirmed by the agreement of the theory with experiments.