Tạp chí Cơ học Journal of Mechanics, NCNST of Vietnam T. XVII, 1995, No 1 (15 - 21)

ỔN ĐỊNH CỦA BẢN MỎNG THEO LÝ THUYẾT QUÁ TRÌNH BIẾN DẠNG ĐÀN DẺO VỚI VẬT LIỆU NÉN ĐƯỢC

ĐÀO VĂN DŨNG

Vấn đề ổn định của bản đàn dẻo chịu quá trình tải phức tạp đối với vật liệu không nén được đã được nghiên cứu trong [2, 4]. Bài này nhằm xây dựng hệ các phương trình cho bài toán ổn định đàn dẻo của bản mỏng chịu quá trình tải phức tạp, đối với vật liệu nén được, đồng thời xét ví dụ bản bị nén theo một phương. Từ hệ thức chung đã cho có thể nhận lại các kết quả đối với bản đàn dẻo với vật liệu không nén được [2, 4], hoặc bản đàn dẻo nén được khi đặt tải đơn giản [3], hoặc bản đàn hồi nén được [3].

1. BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH

Xét bản mỏng chữ nhật cạnh a, b, chiều dày h. Vật liệu là nén được. Đưa vào hệ tọa độ Đề các vuông góc ox_1x_2z sao cho trục ox_1, ox_2 nằm trong mặt phẳng trung bình của bản, trục oz vuông góc với mặt phẳng này. Giả sử kết cấu chịu tác dụng của các lực ngoài p_{ij} thay đổi tùy ý theo một tham số tải t nào đấy. Vấn đề đặt ra là xác định giá trị tới hạn t_* và tương ứng là các lực tới hạn p^*_{ij} sao cho khi vượt quá các giá trị này thì kết cấu bị mất ổn định.

Để giải bài toán ổn định, sẽ sử dụng liên hệ ứng suất - biến dạng theo lý thuyết quá trình biến dạng đàn dẻo [1].

$$\dot{S}_{ij} = A\frac{S_{k\ell}\dot{e}_{k\ell}}{\sigma_u^2}S_{ij} + B\dot{e}_{ij} \tag{1.1}$$

trong đó $A = \phi' - N$; $B = \frac{2}{3}N$; $N = \frac{\sigma_u}{s}$

Để thuận lợi cho việc giải bài toán ổn định đối với vật liệu nén được ta tìm cách chuyển hệ thức (1.1) về dạng khác như sau. Trước hết từ giả thiết tồn tại trạng thái ứng suất màng trong bản ta có

$$\sigma_{11} \neq 0; \quad \sigma_{22} \neq 0; \quad \sigma_{12} \neq 0; \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0 \tag{1.2}$$

Vậy

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22}); \quad \sigma_u = \left(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2\right)^{1/2} \tag{1.3}$$

Hơn nữa có liên hệ

$$\dot{S}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \dot{\sigma}\delta_{ij}; \quad \dot{e}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}\delta_{ij}; \quad \dot{\sigma} = 3K\dot{\varepsilon} \tag{1.4}$$

Khi đó (1.1) được viết dưới dạng

$$\begin{aligned}
\frac{2\dot{\sigma}_{11} - \dot{\sigma}_{22}}{3} &= A\frac{S_{k\ell}\dot{e}_{k\ell}}{\sigma_u^2}\Big(\frac{2\sigma_{11} - \sigma_{22}}{3}\Big) + B\dot{\varepsilon}_{11} - B\frac{\dot{\sigma}_{11} + \dot{\sigma}_{22}}{9K} \\
\frac{2\dot{\sigma}_{22} - \dot{\sigma}_{11}}{3} &= A\frac{S_{k\ell}\dot{e}_{k\ell}}{\sigma_u^2}\Big(\frac{2\sigma_{22} - \sigma_{11}}{3}\Big) + B\dot{\varepsilon}_{22} - B\frac{\dot{\sigma}_{11} + \dot{\sigma}_{22}}{9K} \\
\dot{\sigma}_{12} &= A\frac{S_{k\ell}\dot{e}_{k\ell}}{\sigma_u^2}\sigma_{12} + B\dot{\varepsilon}_{12}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Mặt khác

$$S_{k\ell}\dot{e}_{k\ell} = (\sigma_{k\ell} - \sigma\delta_{k\ell})\,(\dot{\varepsilon}_{k\ell} - \dot{\varepsilon}\delta_{k\ell}) = \sigma_{k\ell}\dot{\varepsilon}_{k\ell} - 3\sigma\dot{\varepsilon} = \sigma_{k\ell}\dot{\varepsilon}_{k\ell} - \frac{\sigma}{3K}(\dot{\sigma}_{11} + \dot{\sigma}_{22})$$

Thay vào hệ thức (1.5), đồng thời từ hai hệ thức đầu xác định được $\dot{\sigma}_{11}$, $\dot{\sigma}_{22}$, sau đó từ hệ thức thứ ba tìm được $\dot{\sigma}_{12}$. Sau một loạt tính toán nhận được liên hệ tường minh giữa tốc độ ứng suất và tốc độ biến dạng

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_{11} &= (D_{11}\sigma_{11} - D_{12}\sigma_{22})\frac{\sigma_{k\ell}\dot{\varepsilon}_{k\ell}}{\sigma_u^2} + D_{13}(2\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22}) - D_{14}(\dot{\varepsilon}_{11} + 2\dot{\varepsilon}_{22}) \\
\dot{\sigma}_{22} &= (-D_{21}\sigma_{11} + D_{22}\sigma_{22})\frac{\sigma_{k\ell}\dot{\varepsilon}_{k\ell}}{\sigma_u^2} - D_{23}(2\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22}) + D_{24}(\dot{\varepsilon}_{11} + 2\dot{\varepsilon}_{22}) \\
\dot{\sigma}_{12} &= D_{31}\sigma_{12}\frac{\sigma_{k\ell}\dot{\varepsilon}_{k\ell}}{\sigma_u^2} - D_{32}(2\dot{\varepsilon}_{11} - \dot{\varepsilon}_{22}) - D_{33}(\dot{\varepsilon}_{11} + 2\dot{\varepsilon}_{22}) + D_{34}\dot{\varepsilon}_{12} \\
&\qquad (k, \ell = 1, 2)
\end{aligned} \tag{1.6}$$

ở đây

$$\begin{aligned}
D_{11} &= \frac{A}{C}\Big(1 + \frac{B}{3K} + A\frac{\sigma\sigma_{22}}{3K\sigma_u^2}\Big)\;; \quad D_{12} = \frac{A}{C}\Big(\frac{B}{3K} + A\frac{\sigma\sigma_{11}}{3K\sigma_u^2}\Big)\;; \\
D_{13} &= \frac{B}{C}\Big(1 + \frac{B}{3K} + A\frac{\sigma\sigma_{22}}{3K\sigma_u^2}\Big)\;; \quad D_{14} = \frac{B}{C}\Big(\frac{B}{3K} + A\frac{\sigma\sigma_{11}}{3K\sigma_u^2}\Big)\;; \\
D_{21} &= \frac{A}{C}\Big(\frac{B}{3K} + A\frac{\sigma\sigma_{22}}{3K\sigma_u^2}\Big)\;; \quad D_{22} = \frac{A}{C}\Big(1 + \frac{B}{3K} + A\frac{\sigma\sigma_{11}}{3K\sigma_u^2}\Big)\;; \\
D_{23} &= \frac{B}{C}\Big(\frac{B}{3K} + A\frac{\sigma\sigma_{22}}{3K\sigma_u^2}\Big)\;; \quad D_{24} = \frac{B}{C}\Big(1 + \frac{B}{3K} + A\frac{\sigma\sigma_{11}}{3K\sigma_u^2}\Big)\;; \\
D_{31} &= A - \Big(\frac{A^2}{C}\Big)\frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22})\sigma}{3K\sigma_u^2}\;; \quad D_{32} = \frac{B}{C}A\frac{\sigma\sigma_{12}}{3K\sigma_u^2}\;; \\
D_{33} &= \frac{B}{C}A\frac{\sigma\sigma_{12}}{3K\sigma_u^2}\;; \quad D_{34} = B\;; \\
C &= \Big(1 + 2\frac{B}{3K} + A\frac{\sigma\sigma_{11}}{3K\sigma_u^2} + A\frac{\sigma\sigma_{22}}{3K\sigma_u^2}\Big)\;;
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Tiếp theo sử dụng liên hệ (1.6) để xây dựng hệ các phương trình ổn định của bản đàn dẻo làm bằng vật liệu nén được.

2. CÁC PHƯƠNG TRÌNH ỔN ĐỊNH

1. Các hệ thức tìm trạng thái trước khi mất ổn định

Để tìm trạng thái này cần sử dụng liên hệ vật lý (1.6), phương trình độ dài cung của quỹ đạo biến dạng

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{2}}{3}\left[(\dot{\varepsilon}_{11} - \dot{\varepsilon}_{22})^2 + (\dot{\varepsilon}_{22} - \dot{\varepsilon}_{33})^2 + (\dot{\varepsilon}_{33} - \dot{\varepsilon}_{11})^2 + 6\dot{\varepsilon}_{12}^2\right]^{1/2} \tag{2.1}$$

và các phương trình cân bằng

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \tag{2.2}$$

Cùng với các điều kiện biên

$$\sigma_{ij}n_j = P_i \tag{2.3}$$

Hệ đầy đủ các phương trình trên cho phép tìm được trạng thái ứng suất biến dạng trước tới hạn. Bây giờ ta xây dựng hệ các phương trình ổn định theo tiêu chuẩn rẽ nhánh trạng thái cân bằng của bản.

2. Các phương trình ổn định

Sử dụng giả thiết của A. A. Iliusin xem rằng $\delta N_{ij} = 0$ đồng thời không xét đến sự xuất hiện miền cất tải, khi đó phương trình ổn định của bản mỏng có dạng

$$\frac{\partial^2 \delta M_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} + N_{ij}\delta\chi_{ij} = 0 \tag{2.4}$$

Sử dụng liên hệ

$$\delta\varepsilon_{ij} = \delta\varepsilon_{ij}^* - Z\delta\chi_{ij}; \qquad \delta\chi_{ij} = \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x_i \partial x_j} \tag{2.5}$$

trong đó $\delta\varepsilon_{ij}^*$ là gia số biến dạng vô cùng nhỏ của mặt giữa, δw là gia số độ võng.

Tương ứng với gia số biến dạng là các gia số ứng suất được xác định từ hệ thức (1.6)

$$\begin{aligned}
\delta\sigma_{11} &= (D_{11}\sigma_{11} - D_{12}\sigma_{22})\frac{\sigma_{k\ell}\delta\varepsilon_{k\ell}}{\sigma_u^2} + D_{13}(2\delta\varepsilon_{11} + \delta\varepsilon_{22}) - D_{14}(\delta\varepsilon_{11} + 2\delta\varepsilon_{22});\\
\delta\sigma_{22} &= (-D_{12}\sigma_{11} + D_{22}\sigma_{22})\frac{\sigma_{k\ell}\delta\varepsilon_{k\ell}}{\sigma_u^2} - D_{23}(2\delta\varepsilon_{11} + \delta\varepsilon_{22}) + D_{24}(\delta\varepsilon_{11} + 2\delta\varepsilon_{22})\ ;\\
\delta\sigma_{12} &= D_{13}\sigma_{12}\frac{\sigma_{k\ell}\delta\varepsilon_{k\ell}}{\sigma_u^2} - D_{32}(2\delta\varepsilon_{11} + \delta\varepsilon_{22}) - D_{33}(\delta\varepsilon_{11} + 2\delta\varepsilon_{22}) + D_{34}\delta\varepsilon_{12}\ ;
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Các thành phần gia số mô men được tính bởi

$$\begin{aligned}
\delta M_{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} Z\delta\sigma_{11}dZ = -\frac{h^3}{12}\Big[(D_{11}\sigma_{11} - D_{12}\sigma_{22})\frac{\sigma_{k\ell}\delta w_{,k\ell}}{\sigma_u^2} +\\
&\quad + D_{13}(2\delta w_{,11} + \delta w_{,22}) - D_{14}(\delta w_{,11} + 2\delta w_{,22})\Big];\\
\delta M_{22} &= \int_{-h/2}^{h/2} Z\delta\sigma_{22}dZ = -\frac{h^3}{12}\Big[(-D_{21}\sigma_{11} + D_{22}\sigma_{22})\frac{\sigma_{k\ell}\delta w_{,k\ell}}{\sigma_u^2} -\\
&\quad - D_{23}(2\delta w_{,11} + \delta w_{,22}) + D_{24}(\delta w_{,11} + 2\delta w_{,22})\Big];\\
\delta M_{12} &= \int_{-h/2}^{h/2} Z\delta\sigma_{12}dZ = -\frac{h^3}{12}\Big[D_{31}\sigma_{12}\frac{\sigma_{k\ell}\delta w_{,k\ell}}{\sigma_u^2} - D_{32}(2\delta w_{,11} +\\
&\quad + \delta w_{,22}) - D_{33}(\delta w_{,11} + 2\delta w_{,22}) + D_{34}\delta w_{,12}\Big];
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Thay (2.7) vào (2.4) và chú ý $N_{ij} = -hP_{ij}$, sau một số tính toán nhận được phương trình ổn định đối với bản mỏng đàn dẻo với vật liệu nén được.

$$\begin{aligned}
&\alpha_1\frac{\partial^4 \delta w}{\partial x_1^4} + \alpha_2\frac{\partial^4 \delta w}{\partial x_1^3\partial x_2} + \alpha_3\frac{\partial^4 \delta w}{\partial x_1^2\partial x_2^2} + \alpha_4\frac{\partial^4 \delta w}{\partial x_1\partial x_2^3} + \alpha_5\frac{\partial^4 \delta w}{\partial x_2^4} +\\
&+ \frac{9}{h^2 N(s,\sigma_u)}\Big(P_{11}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x_1^2} + 2P_{12}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x_1\partial x_2} + P_{22}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x_2^2}\Big) = 0
\end{aligned} \tag{2.8}$$

trong đó

$$\alpha_1 = \frac{3}{4N}\Big[(D_{11}\sigma_{11} - D_{12}\sigma_{22})\frac{\sigma_{11}}{\sigma_u^2} + 2D_{13} - D_{14}\Big];$$

$$\alpha_2 = \frac{3}{4N}\Big[2(D_{11}\sigma_{11} - D_{12}\sigma_{22})\frac{\sigma_{12}}{\sigma_u^2} + 2D_{13}\frac{\sigma_{12}\sigma_{11}}{\sigma_u^2} - 4D_{32} - 2D_{33}\Big];$$

$$\alpha_3 = \frac{3}{4N}\Big[(D_{11}\sigma_{11} - D_{12}\sigma_{22})\frac{\sigma_{22}}{\sigma_u^2} + D_{13} - 2D_{14} + (-D_{21}\sigma_{11} + D_{22}\sigma_{22})\frac{\sigma_{11}}{\sigma_u^2} - $$

$$- 2D_{23} + D_{24} + 4D_{31}\frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_u^2} + 2D_{34}\Big];$$

$$\alpha_4 = \frac{3}{4N}\Big[2(-D_{21}\sigma_{11} + D_{22}\sigma_{22})\frac{\sigma_{12}}{\sigma_u^2} + 2D_{31}\frac{\sigma_{12}\sigma_{22}}{\sigma_u^2} - 2D_{32} - 4D_{33}\Big];$$

$$\alpha_5 = \frac{3}{4N}\Big[(-D_{21}\sigma_{11} + D_{22}\sigma_{22})\frac{\sigma_{22}}{\sigma_u^2} - D_{23} + 2D_{24}\Big]; \qquad (2.9)$$

Như vậy giải bài toán ổn định của bản đàn dẻo với vật liệu nén được quy về nghiên cứu đồng thời hệ (2.8) và (2.1) cùng với các điều kiện biên đã cho. Áp dụng phương pháp tham số tải [2] ta có thể xác định lực tới hạn của bài toán ổn định.

NHẬN XÉT

a) Nếu vật liệu là không nén được (tức là $K \to \infty$), từ (1.7) nhận được

$$C = 1; \quad D_{11} = A = \phi' - N; \quad D_{13} = B = \frac{2}{3}N; \quad D_{12} = D_{14} = 0$$

$$D_{22} = A = \phi' - N; \quad D_{24} = B = \frac{2}{3}N; \quad D_{21} = D_{23} = 0$$

$$D_{31} = A = \phi' - N; \quad D_{34} = B = \frac{2}{3}N; \quad D_{32} = D_{33} = 0$$

đồng thời từ (2.9) suy ra

$$\alpha_1 = \frac{3}{4N}\Big[(\phi' - N)\frac{\sigma_{11}^2}{\sigma_u^2} + \frac{4}{3}N\Big] = 1 - \frac{3}{4}\Big(1 - \frac{\phi'}{N}\Big)\frac{\sigma_{11}^2}{\sigma_u^2};$$

$$\alpha_2 = \frac{3}{4N}\Big[2(\phi' - N)\frac{\sigma_{11}\sigma_{12}}{\sigma_u^2} + 2(\phi' - N)\frac{\sigma_{11}\sigma_{12}}{\sigma_u^2}\Big] = -3\Big(1 - \frac{\phi'}{N}\Big)\frac{\sigma_{11}\sigma_{12}}{\sigma_u^2};$$

$$\alpha_3 = \frac{3}{4N}\Big[(\phi' - N)\frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{\sigma_u^2} + \frac{2}{3}N + (\phi' - N)\frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{\sigma_u^2} + \frac{2}{3}N + 4(\phi' - N)\frac{\sigma_{12}^2}{2} + \frac{4}{3}N\Big] =$$

$$= 2 - 3\Big(1 - \frac{\phi'}{N}\Big)\frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_u^2} - \frac{3}{2}\Big(1 - \frac{\phi'}{N}\Big)\frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{\sigma_u^2};$$

$$\alpha_4 = \frac{3}{4N}\Big[2(\phi' - N)\frac{\sigma_{22}\sigma_{12}}{\sigma_u^2} + 2(\phi' - N)\frac{\sigma_{12}\sigma_{22}}{\sigma_u^2}\Big] = -3\Big(1 - \frac{\phi'}{N}\Big)\frac{\sigma_{22}\sigma_{12}}{\sigma_u^2};$$

$$\alpha_5 = \frac{3}{4N}\Big[(\phi' - N)\frac{\sigma_{22}^2}{\sigma_u^2} + \frac{4}{3}N\Big] = 1 - \frac{3}{4}\Big(1 - \frac{\phi'}{N}\Big)\frac{\sigma_{22}^2}{\sigma_u^2};$$

Dễ dàng nhận thấy phương trình (2.8) trở về trường hợp bản đàn dẻo với vật liệu không nén được [2, 4].

b) Nếu bản là đàn hồi với vật liệu nén được, khi đó

$$\phi' = N = 3G = 3\mu; \quad K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

Từ đó suy ra $A = 0$, $B = 2\mu$; $D_{11} = D_{12} = D_{21} = D_{22} = D_{31} = D_{32} = D_{33} = 0$. Thay λ và μ qua E và ν bởi công thức $\mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$; $\lambda = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ vào (1.7), (2.9) nhận được

$$C = \frac{3(1-\nu)}{1+\nu}\ ; \quad D_{13} = D_{24} = \frac{E(2-\nu)}{3(1-\nu^2)}\ ; \quad D_{14} = D_{23} = \frac{E(1-2\nu)}{3(1-\nu^2)}\ ;$$
$$\alpha_1 = \frac{1}{2(1-\nu)}\ ; \quad \alpha_2 = \alpha_4 = 0; \quad \alpha_3 = \frac{1}{1-\nu}\ ; \quad \alpha_5 = \frac{1}{2(1-\nu)}\ .$$

Trường hợp này liên hệ vật lý (1.6) cũng như phương trình ổn định (2.8) trở về các hệ thức quen biết của bản đàn hồi với vật liệu nén được [3].

c) Trường hợp đặt tải đơn giản đối với bản đàn dẻo ta có $\phi' = \phi'(\varepsilon_u)$; $N = \dfrac{\sigma_u}{\varepsilon_u}$, nhận được hệ thức tương tự trong [3].

3. BẢN BỊ NÉN BỞI LỰC NGOÀI THEO MỘT PHƯƠNG

Xét bản mỏng cạnh a, b bị nén theo phương ox_1 bởi lực nén $P_{11} \equiv P(t)$. Bản tựa bản lề tại các cạnh $x_1 = 0$; a; $x_2 = 0$; b; khi đó trạng thái trước khi mất ổn định được cho bởi

$$\sigma_{11} = -P(t); \quad \sigma_{12} = \sigma_{22} = 0; \quad \sigma_u = |\sigma_{11}| = P(t); \quad \sigma = \frac{1}{3}\sigma_{11}. \tag{3.1}$$

Từ liên hệ vật lý (1.6), ta tính được $\dot{\varepsilon}_{ij}$ qua σ_{11} tức là qua $P(t)$ như sau

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_{11} &= \frac{-\dot{P}(t)}{\varkappa}(-D_{23} + 2D_{24}) = -\frac{\dot{P}(t)}{\varkappa}\Big(\frac{2B}{C} + \frac{2AB}{9KC} + \frac{B^2}{3KC}\Big)\ ;\\
\dot{\varepsilon}_{22} &= \frac{\dot{P}(t)}{\varkappa}(-D_{21} - 2D_{23} + D_{24}) = \frac{\dot{P}(t)}{\varkappa}\Big(\frac{B}{C} - \frac{2AB}{9KC} - \frac{B^2}{3KC}\Big)\ ;\\
\dot{\varepsilon}_{33} &= -\frac{\dot{P}(t)}{3K} + \frac{\dot{P}(t)}{\varkappa}(D_{21} + D_{23} + D_{24}) = -\frac{\dot{P}(t)}{3K} + \frac{\dot{P}(t)}{\varkappa}\Big(\frac{B}{C} + \frac{4AB}{9KC} + \frac{2B^2}{3KC}\Big)\ ;\\
\dot{\varepsilon}_{12} &= 0;\\
\varkappa &= (D_{11} + 2D_{13} - D_{14})(-D_{23} + 2D_{24}) - (D_{13} - 2D_{14})(-D_{21} - 2D_{13} + D_{24});
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Lưu ý rằng D_{ij} là hàm của s và σ_{ij}, do vậy nó là hàm của s và t. Do đó phương trình độ dài cung của quỹ đạo biến dạng như sau

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{2}}{3}\Big[(\dot{\varepsilon}_{11} - \dot{\varepsilon}_{22})^2 + (\dot{\varepsilon}_{22} - \dot{\varepsilon}_{33})^2 + (\dot{\varepsilon}_{33} - \dot{\varepsilon}_{11})^2\Big]^{1/2}$$

Thay $\dot{\varepsilon}_{ij}$ trong (3.2) vào đây, sau khi tính toán ta có

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dt} = \frac{2}{3}\Big\{\frac{9B^2}{C^2}\Big(\frac{\dot{P}(t)}{\varkappa}\Big)^2 + \Big[\frac{\dot{P}(t)}{3K} - \frac{\dot{P}(t)}{\varkappa}\Big(\frac{2AB}{3KC} + \frac{B^2}{KC}\Big)\Big]^2 -\\
- \frac{\dot{P}(t)}{\varkappa}\frac{3B}{C}\Big[\frac{\dot{P}(t)}{3K} - \frac{\dot{P}(t)}{\varkappa}\Big(\frac{2AB}{3KC} + \frac{B^2}{KC}\Big)\Big]\Big\}^{1/2} = F(s,t)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

với

$$B = \frac{2}{3}\frac{\sigma_u}{s} = \frac{2}{3}\frac{P(t)}{s}\ , \qquad A = \phi'(s) - \frac{2}{3}\frac{P(t)}{s}$$

Phương trình ổn định (2.8) dẫn về

$$\alpha_1 \frac{\partial^4 \delta w}{\partial x_1^4} + \alpha_3 \frac{\partial^4 \delta w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \alpha_5 \frac{\partial^4 \delta w}{\partial x_2^4} + \frac{9}{h^2 N}\ P\ \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x_1^2} = 0 \tag{3.4}$$

trong đó

$$\alpha_1 = \frac{3}{4N}(D_{11} + 2D_{13} - D_{14}); \quad \alpha_5 = \frac{3}{4N}(-D_{23} + 2D_{24})$$
$$\alpha_3 = \frac{3}{4N}(D_{13} - 2D_{14} - D_{21} - 2D_{23} + D_{24} + 2D_{34});$$

Tìm nghiệm (3.4) thỏa mãn điều kiện biên tựa bản lề

$$\delta w = f_{mn} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b} \tag{3.5}$$

Thay vào (3.4) và từ điều kiện tồn tại nghiệm không tầm thường, tức là $f_{mn} \neq 0$, nhận được

$$\alpha_1\Big(\frac{m\pi}{a}\Big)^4 + \alpha_3\Big(\frac{m\pi}{a}\Big)^2\Big(\frac{n\pi}{b}\Big)^2 + \alpha_5\Big(\frac{n\pi}{b}\Big)^4 - \frac{9P}{h^2N}\Big(\frac{m\pi}{a}\Big)^2 = 0 \tag{3.6}$$

Đặt $\alpha = \dfrac{a}{b}$; $i = \dfrac{3b}{h}$ là độ mảnh, ta viết (3.6) dưới dạng

$$i^2 = \frac{\pi^2 N}{P}\Big[\alpha_1\Big(\frac{m}{\alpha}\Big)^2 + \alpha_3 n^2 + \alpha_5 n^4 \Big(\frac{\alpha}{m}\Big)^2\Big] \tag{3.7}$$

Cực tiểu hóa i^2 bằng cách đặt $X = \Big(\dfrac{\alpha}{m}\Big)^2$ và $n = 1$ và tính $\dfrac{\partial i^2}{\partial x} = 0$, sau một số tính toán tìm được

$$i^2 = \frac{2\pi^2 N}{P}\big(\sqrt{\alpha_1\alpha_5} + \alpha_3\big) \tag{3.8}$$

Đây là phương trình phi tuyến đối với P và s. Vì vậy để tìm P_* (tức là t_*) ta phải kết hợp với hệ thức (3.3).

Nếu bản vuông thì i^2 cực tiểu khi $m = n = 1$. Vậy từ (3.7) nhận được

$$i^2 = \frac{\pi^2 N}{P}(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5) \tag{3.9}$$

NHẬN XÉT

Hệ thức (3.8) bao quát các trường hợp bản đàn hồi và đàn dẻo khi đặt tải đơn giản với vật liệu nén được và bản đàn dẻo phức tạp với vật liệu không nén được.

a) Bản đàn hồi : $2\alpha_1 = 2\alpha_5 = \alpha_3 = \dfrac{1}{1-\nu}$

Thay vào (3.8) nhận được [3]

$$P_* = \frac{\pi^2 E h^2}{3(1-\nu^2)b^2}$$

b) Bản vuông đàn dẻo không nén được, thì $K \to \infty$; $\alpha_1 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\dfrac{\phi'}{N}$; $\alpha_3 = 2$; $\alpha_5 = 1$, từ (3.9) nhận được kết quả trong [4]

$$i^2 = \frac{\pi^2 N}{P}\Big(\frac{13}{4} + \frac{3}{4}\frac{\phi'}{N}\Big)$$

c) Bản đàn dẻo chịu quá trình đặt tải đơn giản, ta có

$$\alpha_1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{\phi'(\varepsilon_u)}{\dfrac{\sigma_u}{\varepsilon_u}}, \quad \alpha_3 = 2; \quad \alpha_5 = 1$$

Hệ thức (3.8) trùng với kết quả trong [3]

KẾT LUẬN

Các hệ thức cơ bản đã được xây dựng ở trên, cho phép ta nghiên cứu bài toán ổn định đàn dẻo của bản mỏng làm bằng vật liệu nén được khi chịu quá trình tải phức tạp.

Tác giả chân thành cám ơn GS TS Đào Huy Bích đã hướng dẫn công trình này. Công trình được hoàn thành với sự tài trợ của Đề tài nghiên cứu KT.04.2.2.4

Địa chỉ:
Trường Đại học Tổng hợp Hà Nội

Nhận ngày 17/9/1994

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Дао Зуй Бик. Модификация соотношений упругопластических процессов средней кривизны. Вестник МГУ, сер. Мат и Мех № 5, 1981.
2. Đào Huy Bích. Lý thuyết quá trình đàn dẻo. Đại học Tổng hợp Hà Nội, 1993.
3. Волмир А. С. Устойчивость упругих систем. M. 1963.
4. Đào Văn Dũng. Bài toán ổn định ngoài giới hạn đàn hồi theo lý thuyết quá trình đàn dẻo. Tóm tắt luận án PTS khoa học Toán lý, Hà Nội 1993.

SUMMARY

STABILITY OF THIN PLATES WITH COMPRESSIBLE MATERIAL
IN THE THEORY OF ELASTO-PLASTIC PROCESSES

In this paper is given a system of stability equations of elasto-plastic thin plates made of compressible material. These stability equations are a generalization of ones in the theory of elasticity and the simple processe theory