Tạp chí Cơ học Journal of Mechanics, NCNST of Vietnam T. XVII, 1995, No 1 (1 - 8)

TRẠNG THÁI ĐÀN DẺO CỦA TRỤ TRÒN NGẮN CHỊU TẢI PHỨC TẠP

VŨ KHẮC BẢY

Phương pháp biến thể nghiệm đàn hồi trong lý thuyết quá trình biến dạng đàn dẻo đã được đưa ra trong [1]. Xét các tính chất hội tụ, tốc độ hội tụ cũng như sự ổn định của nó bằng phương pháp số đối với lớp các bài toán phẳng với quá trình đặt tải phức tạp đã được xét trong [3, 4]. Trong bài này cũng bằng phương pháp số ta đánh giá các tính chất trên của phương pháp gần đúng này trong lớp các bài toán không gian cụ thể là xét trụ tròn ngắn chịu tải đối xứng trục phức tạp.

1. BÀI TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Trụ ngắn chiều dài $2b$, bán kính a, hai đầu và xung quanh trụ chịu tải đối xứng trục thay đổi, trụ quay với vận tốc góc Ω. Các lực tác dụng lên trụ đều thay đổi theo một tham số t.

Chọn hệ tọa độ trụ, khi đó do tính chất đối xứng trục của các lực tác dụng, trụ ngắn được xét với:

- Hai đầu trụ: chịu lực pháp (dãn, nén) và lực trượt.
- Xung quanh chịu lực pháp và lực trượt theo phương dọc trục.

Các đại lượng ứng suất, biến dạng thỏa mãn các phương trình và các điều kiện biên sau:

+ Hệ thức Côsi:

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}\ ; \qquad e_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}\ ; \qquad e_{rz} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\Big) \tag{1.1}$$

+ Điều kiện vật liệu không nén được

$$e_{rr} + e_{\theta\theta} + e_{zz} = 0 \tag{1.2}$$

+ Phương trình cân bằng

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho\Omega^2 r = 0 \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \tag{1.4}$$

+ Liên hệ ứng suất - biến dạng [2]

$$\dot S_{ij} = \frac{2}{3} A \dot e_{ij} + (P - A)\frac{S_{ij} S_{k\ell}}{\sigma_u^2}\, \dot e_{k\ell} \tag{1.5}$$

với

$$A = \frac{\sigma_u}{s}\Big[1 + \Big(\frac{Es}{\sigma_u} - 1\Big)\Big(\frac{1-\cos\varphi}{2}\Big)^{\gamma}\Big]$$

$$P = \phi'(s) - \frac{1}{\cos\varphi}\big(E - \phi'(s)\big)\Big(\frac{1-\cos\varphi}{2}\Big)^{\beta}$$

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{S_{rr}^2 + S_{\theta\theta}^2 + S_{zz}^2 + 2\tau_{rz}^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{S_{ij}\;\dot{e}_{ij}}{\sigma_u\;\dot{s}}\;;\quad \gamma \geq 1,\quad \beta > 1,\quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

+ Điều kiện biên ở hai đầu

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(r,b,t) &= f_1(r,t), & \tau_{rz}(r,b,t) &= f_3(r,t) \\ \sigma_{zz}(r,-b,t) &= f_2(r,t); & \tau_{rz}(r,-b,t) &= f_4(r,t) \\ &0 \leq r \leq a \end{aligned} \tag{1.6}$$

+ Điều kiện biên ở mặt xung quanh

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(a,z,t) &= f_5(z,t) \\ \tau_{rz}(a,z,t) &= f_6(z,t) \end{cases} \quad -b \leq z \leq b \tag{1.7}$$

Do nghiệm của bài toán (1) - (7) có thể biểu diễn dưới dạng chuỗi qua các hàm Betxen và các hàm lượng giác nên giả thiết:

Trong khoảng $0 < r < a$ các hàm

+ $f_1(r,t)$ và $f_2(r,t)$ khai triển được theo dạng

$$a_0(t) + \sum_{k=1} a_k(t) J_0(\mu_k r)$$

+ $f_3(r,t)$ và $f_4(r,t)$ khai triển được theo dạng

$$\sum_{k=1} b_k(t) J_1(\mu_k r)$$

trong đó μ_k là nghiệm của $J_1(\mu_k a) = 0$; J_0, J_1 là các hàm Betxen.

Trong khoảng $-b < z < b$ các hàm

+ $f_5(x,t)$ khai triển được theo dạng

$$C_0(t) + \sum_{k=1} C_k(t) \cos(\lambda_k z)$$

+ $f_6(z,t)$ khai triển được theo dạng

$$\sum_{k=1} d_k(t) \sin(\lambda_k z)$$

trong đó $\lambda_k = k\pi/b$.

Để giải bài toán này ta dùng phương pháp biến thể nghiệm đàn hồi [1, 2]: Chia quá trình đặt tải từ giai đoạn đầu đến thời điểm đang xét thành n giai đoạn. Tại lần lặp thứ k ở thời điểm thứ n các thành phần ứng suất, biến dạng cần thỏa mãn các phương trình và các điều kiện biên sau

$$\begin{aligned} e_{rr}^{(n,k)} &= \frac{\partial u_r^{(n,k)}}{\partial r}\;; \quad e_{\theta\theta}^{(n,k)} = \frac{u_r^{(n,k)}}{r}\,, \\ e_{r,z}^{(n,k)} &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_r^{(n,k)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(n,k)}}{\partial r}\Big) \end{aligned} \tag{1.1a}$$

$$e_{rr}^{(n,k)} + e_{\theta\theta}^{(n,k)} + e_{zz}^{(n,k)} = 0 \tag{1.2a}$$

$$\frac{\partial\sigma_{rr}^{(n,k)}}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rz}^{(n,k)}}{\partial z}+\frac{\sigma_{rr}^{(n,k)}-\sigma_{\theta\theta}^{(n,k)}}{r}+\left[\Omega^{(n)}\right]^2\rho r=0 \tag{1.3a}$$

$$\frac{\partial\tau_{rz}^{(n,k)}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{zz}^{(n,k)}}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}^{(n,k)}}{r}=0 \tag{1.4a}$$

$$S_{ij}^{(n,k)}=2Ge_{ij}^{(n,k)}+\sum_{m=1}^{n-1}\Delta_m e_{ij}+\Delta_n^{(k)}e_{ij} \tag{1.5a}$$

$$\begin{gathered}\sigma_{zz}^{(n,k)}(r,b,t_n)=f_1(r,t_n);\quad \tau_{rz}^{(n,k)}(r,b,t_n)=f_3(r,t_n)\\ \sigma_{zz}^{(n,k)}(r,-b,t_n)=f_2(r,t_n);\quad \tau_{rz}^{(n,k)}(r,-b,t_n)=f_4(r,t_n)\\ \text{với}\ \ 0\le r\le a\end{gathered} \tag{1.6a}$$

$$\begin{cases}\sigma_{rr}^{(n,k)}(a,z,t_n) &= f_5(z,t_n)\\ \tau_{rz}^{(n,k)}(a,z,t_n) &= f_6(z,t_n)\end{cases}\qquad \text{với}\ -b\le z\le b \tag{1.7a}$$

trong đó

$$\Delta_n^{(k)}e_{ij}=\frac{1}{2}\left[R_{ijk\ell}^{(n-1)}+R_{ijk\ell}^{(n,k-1)}\right]\left[e_{k\ell}^{(n,k-1)}-e_{k\ell}^{(n-1)}\right]$$

với

$$R_{ijk\ell}^{(n,k-1)}=-2Gw_1^{(n,k-1)}\ \delta_{ik}\delta_{j\ell}+3G\left[w_1^{(n,k-1)}-w_2^{(n,k-1)}\right]\ \frac{S_{ij}^{(n,k-1)}\ S_{k\ell}^{(n,k-1)}}{\left[\sigma_u^{(n,k-1)}\right]^2}$$

và $w_1=1-\dfrac{A}{3G}$; $w_2=1-\dfrac{P}{3G}$

Ở gần đúng thứ $k=0$ lấy

$$\Delta_n^{(0)}e_{ij}=0$$

Đặt

$$\sum_{m=1}^{n-1}\Delta_m e_{rr}+\Delta_n^{(k)}e_{rr}=R^{(n,k)};\quad \sum_{m=1}^{n-1}\Delta_m e_{\theta\theta}+\Delta_n^{(k)}e_{\theta\theta}=B^{(n,k)};\quad \sum_{m=1}^{n-1}\Delta_m e_{rz}+\Delta_n^{(k)}e_{rz}=F^{(n,k)}$$

Đem thay (1.5a) vào (1.3a) và (1.4a) ta được

$$\frac{\partial\sigma^{(n,k)}}{\partial r}+\frac{2G}{r}\ \frac{\partial(rw^{(n,k)})}{\partial z}=\phi_1^{(n,k)}(r,z) \tag{1.3b}$$

$$\frac{\partial\sigma^{(n,k)}}{\partial z}-\frac{2G}{r}\ \frac{\partial(rw^{(n,k)})}{\partial r}=\phi_2^{(n,k)}(r,z) \tag{1.4b}$$

trong đó

$$3\sigma^{(n,k)}=\sigma_{rr}^{(n,k)}+\sigma_{\theta\theta}^{(n,k)}+\sigma_{zz}^{(n,k)};\quad w^{(n,k)}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_r^{(n,k)}}{\partial z}-\frac{\partial u_z^{(n,k)}}{\partial r}\right]$$

và

$$\begin{aligned}\phi_1^{(n,k)}(r,z)&=-\frac{\partial R^{(n,k)}}{\partial r}-\frac{\partial F^{(n,k)}}{\partial z}+\frac{B^{(n,k)}-R^{(n,k)}}{r}\\ \phi_2^{(n,k)}(r,z)&=-\frac{\partial F^{(n,k)}}{\partial r}+\frac{\partial(B^{(n,k)}+R^{(n,k)})}{\partial z}-\frac{F^{(n,k)}}{r}\end{aligned}$$

Từ (1.3b), (1.4b) ta được

$$\frac{\partial^2 w^{(n,k)}}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{R}\ \frac{\partial(rw^{(n,k)})}{\partial r}\right]=\frac{1}{2G}\left[\frac{\partial\phi_1^{(n,k)}}{\partial z}-\frac{\partial\phi_2^{(n,k)}}{\partial r}\right] \tag{1.8}$$

Vì các đại lượng đều tính toán ở lần lặp thứ k, giai đoạn thứ n, nên từ đây để cho tiện ta thôi không ký hiệu chỉ số trên (n,k) nữa

Khai triển các hàm sau thành các dạng

$$\frac{R}{r} = \sum_{\alpha=0,\ k=1} A_{\alpha k}\cos(pz)J_0(\mu_k r) + \sum_{\alpha=0} A_{\alpha 0}\cos(pz)$$
$$\frac{B}{r} = \sum_{\alpha=0,\ k=1} B_{\alpha k}\cos(pz)J_0(\mu_k r) + \sum_{\alpha=0} B_{\alpha 0}\cos(pz)$$
$$\frac{F}{r} = \sum_{\alpha=1,k=1} C_{\alpha k}\sin(pz)J_0(\mu_k r) + \sum_{\alpha=1} C_{\alpha 0}\sin(pz)$$

với $p = \dfrac{\alpha\pi}{b}$

Đặt

$$\overline{\psi}_1 = 3J_0(\mu_k r) - 2\mu_k r J_1(\mu_k r)$$
$$\overline{\psi}_2 = \mu_k r J_1(\mu_k r)$$
$$\overline{\psi}_3 = (p^2 - \mu_k^2) r a J_0(\mu_k r) - 2\mu_k a J_1(\mu_k r)$$

Khi đó

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial z} - \frac{\partial\phi_2}{\partial r} = \sum_{\alpha=1}\left\{\sin(pz)\sum_{k=1}\left[\left(pA_{\alpha k}\overline{\psi}_1 - pB_{\alpha k}\overline{\psi}_2 + \frac{C_{\alpha k}}{a}\overline{\psi}_3\right) + 3A_{\alpha 0}p + p^2 C_{\alpha 0} r\right]\right\}$$

và đặt bằng $\sum\limits_{\alpha=1}\sin(pz)\psi(\alpha,r)$

Khai triển

$$\psi(\alpha,r) = \sum_{k=1} H_{\alpha k}\,\frac{1}{a^2}J_1(\mu_k\cdot r)$$

Thay vào (1.8) được

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rw)}{\partial r}\right) = \sum_{\alpha=1,k=1}\frac{H_{\alpha k}}{2G}\,\frac{1}{a^2}\sin(pz)J_1(\mu_k r) \tag{1.9}$$

Nghiệm của (1.9) sẽ là

$$w = \sum_{k=1} I_1(\lambda_k r)E_k\sin(\lambda_k z) + \sum_{k=1} D_k J_1(\mu_k r)\mathrm{sh}(\mu_k z) +$$
$$+ \sum_{\substack{\alpha=1\\k=1}}\frac{\overline{H}_{\alpha k}}{2G}\sin(pz)J_1(\mu_k r) + Cr$$

với $\overline{H}_{\alpha k} = \dfrac{H_{\alpha k}}{(p^2+\mu_k^2)a^2}$; E_k, D_k, C - các hằng số

Thay w vào phương trình

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial(ru_r)}{\partial r}\right) = 2\frac{\partial w}{\partial z}$$

ta tính được

$$u_r = \sum_{k=1} \left[\overline{E}_k I_1(\lambda_k r) + E_k r I_0(\lambda_k r)\right] \cos(\lambda_k z) +$$
$$+ \sum_{k=1} \left[\overline{D}_k \operatorname{ch}(\mu_k z) + D_k z \operatorname{sh}(\mu_k z)\right] J_1(\mu_k r) +$$
$$+ \sum_{\substack{\alpha=1\\k=1}} \frac{H^0_{\alpha k}}{G} \cos(pz) J_1(\mu_k r) + B_1 r$$

với $H^0_{\alpha k} = \dfrac{-p\overline{H}_{\alpha k}}{p^2 + \mu_k^2}$; $\overline{E}_k$, $\overline{D}_k$, B_1 - hằng số

Do $\dfrac{\partial \sigma}{\partial r} = -2G\dfrac{\partial w}{\partial z} + \phi_1$, thay các biểu thức của w và ϕ_1 vào ta tính được

$$\sigma = -2G \sum_{k=1} E_k I_0(\lambda_k r) \cos(\lambda_k z) + 2G \sum_{k=1} D_k \operatorname{ch}(\mu_k z) J_0(\mu_k r) +$$
$$+ \sum_{\substack{\alpha=1\\k=1}} \frac{p}{\mu_k} \overline{H}_{\alpha k} \cos(pz) J_0(\mu_k r) - R + \int_0^r \frac{B - R}{r} dr -$$
$$- \sum_{\substack{\alpha=1\\k=1}} C_{\alpha k} \frac{p}{\mu_k} r \cos(pz) J_1(\mu_k r) - \sum_{\alpha=1} C_{\alpha 0} \frac{pr^2}{2} \cos(pz) - Q\frac{r^2}{2} + f$$

trong đó f là hằng số, $Q = \rho\, \Omega^2$

Bây giờ xác định các thành phần biến dạng:

Thành phần biến dạng e_{rr}

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} = \sum_{k=1} \left\{ \lambda_k \overline{E}_k \left[I_0(\lambda_k r) - \frac{I_1(\lambda_k r)}{\lambda_k r} \right] + E_k \left[I_0(\lambda_k r) + \lambda_k r I_1(\lambda_k r) \right] \right\} \cos(\lambda_k z) +$$
$$+ \sum_{k=1} \left\{ \left[\mu_k \overline{D}_k \operatorname{ch}(\mu_k z) + D_k \mu_k z \operatorname{sh}(\mu_k z)\right] \left[J_0(\mu_k r) - \frac{J_1(\mu_k r)}{\mu_k r} \right] \right\} +$$
$$+ \sum_{\substack{\alpha=1\\k=1}} \left\{ \frac{H^0_{\alpha k}}{G} \mu_k \left[J_0(\mu_k r) - \frac{J_1(\mu_k r)}{\mu_k r} \right] \cos(pz) \right\} + B_1$$

Thành phần biến dạng $e_{\theta\theta}$

$$e_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} = \sum_{k=1} \left\{ \left[\lambda_k \overline{E}_k \frac{I_1(\lambda_k r)}{\lambda_k r} + E_k I_0(\lambda_k r)\right] \cos(\lambda_k z) \right\} +$$
$$+ \sum_{k=1} \left\{ \left[\mu_k \overline{D}_k \operatorname{ch}(\mu_k z) + D_k \mu_k z \operatorname{sh}(\mu_k z)\right] \frac{J_1(\mu_k r)}{\mu_k r} \right\} +$$
$$+ \sum_{\substack{\alpha=1\\k=1}} \left\{ \frac{H^0_{\alpha k}}{Ga} \mu_k a \frac{J_1(\mu_k r)}{\mu_k r} \cos(pz) \right\} + B_1$$

Thành phần biến dạng e_{zz} được xác định từ điều kiện không nén được

$$e_{zz} = -(e_{\theta\theta} + e_{rr})$$

Thay các giá trị của e_{rr}, $e_{\theta\theta}$ ta được

$$
\begin{aligned}
e_{zz} = &-\sum_{k=1}\Big\{\lambda_k\overline{D}E_kI_0(\lambda_kr) + E_k\big[2I_0(\lambda_kr) + \lambda_krI_1(\lambda_kr)\big]\Big\}\cos(\lambda_kz) - \\
&-\sum_{k=1}\Big\{\mu_k\overline{D}_k\ \mathrm{ch}(\mu_kz) + D_k\mu_kz\ \mathrm{sh}(\mu_kz)\Big\}J_0(\mu_kr) - \\
&-\sum_{\substack{\alpha=1\\k=1}}\frac{H^0_{\alpha k}}{Ga}\mu_ka\ J_0(\mu_kr)\ \cos(pz) - 2B_1
\end{aligned}
$$

Do $\quad 2e_{rz} = \dfrac{\partial u_z}{\partial r} + \dfrac{\partial u_r}{\partial z}\quad$ và $\quad 2w = \dfrac{\partial u_r}{\partial z} - \dfrac{\partial u_z}{\partial r}\quad$ nên $\quad e_{rz} = \dfrac{\partial u_r}{\partial z} - w$

ta tính được thành phần biến dạng e_{rz}:

$$
\begin{aligned}
e_{rz} = &-\sum_{k=1}\Big\{\lambda_k\overline{E}_kI_1(\lambda_kr) + E_k\big[\lambda_krI_0(\lambda_kr) + I_1(\lambda_kr)\big]\Big\}\sin(\lambda_kz) + \\
&+\sum_{k=1}\Big\{\mu_k\overline{D}_k\ \mathrm{sh}(\mu_kz) + D_k\mu_kz\ \mathrm{ch}(\mu_kz)\Big\}J_1(\mu_kr) - \\
&-\sum_{\substack{\alpha=1\\k=1}}\Big\{\Big[\frac{H^0_{\alpha k}}{Ga}\ pa + \frac{\overline{H}_{\alpha k}}{2G}\Big]\sin(pz)J_1(\mu_kr)\Big\} - Cr.
\end{aligned}
$$

Biết các thành phần biến dạng, ta xác định các thành phần của ten xơ ứng suất. Ta có

$$
\begin{aligned}
\tau_{rz} &= 2Ge_{rz} + F = \\
&= -2G\sum_{k=1}\Big\{\lambda_k\overline{E}_kI_1(\lambda_kr) + E_k\big[\lambda_krI_0(\lambda_kr) + I_1(\lambda_kr)\big]\Big\}\sin(\lambda_kz) + \\
&\quad + 2G\sum_{k=1}\Big\{\mu_k\overline{D}_k\ \mathrm{sh}(\mu_kz) + D_k\mu_kz\ \mathrm{ch}(\mu_kz)\Big\}J_1(\mu_kr) - \\
&\quad - \sum_{\substack{\alpha=1\\k=1}}\Big\{\Big(2pa\frac{H^0_{\alpha k}}{a} + \overline{H}_{\alpha k}\Big)J_1(\mu_kr)\Big\}\sin(pz) + \\
&\quad + \sum_{k,\alpha=1}C_{\alpha k}rJ_0(\mu_kr)\sin(pz) + \sum_{\alpha=0}C_{\alpha 0}r\sin(pz) - 2GCr
\end{aligned}
$$

Thành phần ứng suất

$$
\begin{aligned}
\sigma_{zz} &= 2Ge_{zz} + \sigma - R - B = \\
&= -2G\sum_{k=1}\Big\{\lambda_k\overline{E}_kI_0(\lambda_kr) + E_k\big[3I_0(\lambda_kr) + \lambda_krI_1(\lambda_kr)\big]\Big\}\cos(\lambda_kz) - \\
&\quad - 2G\sum_{k=1}\Big\{\mu_k\overline{D}_k\ \mathrm{ch}(\mu_kz) + D_k\big[\mu_kz\ \mathrm{sh}(\mu_kz) - \mathrm{ch}(\mu_kz)\big]\Big\}J_0(\mu_kr) + \\
&\quad + \sum_{\substack{\alpha=1\\k=1}}\Big\{\frac{p}{\mu_k}\overline{H}_{\alpha k} - 2\frac{H^0_{\alpha k}}{a}\Big\}\cos(pz)J_0(\mu_kr) + \\
&\quad + \int_0^r\frac{B-R}{r}dr - \int_0^r\frac{\partial F}{\partial z}dr - 2R - B - 4GB_1 - \frac{Qr^2}{2} + f.
\end{aligned}
$$

Xác định thành phần ứng suất

$$\sigma_{rr} = 2Ge_{rr} + \sigma + R =$$
$$= 2G\sum_{k=1}\left\{\lambda_k \overline{E}_k\Big[I_0(\lambda_k r) - \frac{I_1(\lambda_k r)}{\lambda_k r}\Big] + E_k\big[\lambda_k r I_1(\lambda_k r)\big]\right\}\cos(\lambda_k z) +$$
$$+ 2G\sum_{k=1}\left\{\mu_k \overline{D}_k \operatorname{ch}(\mu_k z) + D_k\big[\mu_k z \operatorname{sh}(\mu_k z) + \operatorname{ch}(\mu_k z)\big]\right\}J_0(\mu_k r) -$$
$$- 2G\sum_{k=1}\left\{\mu_k \overline{D}_k \operatorname{ch}(\mu_k z) + D_k \mu_k z \operatorname{sh}(\mu_k z)\right\}\frac{J_1(\mu_k r)}{\mu_k r} +$$
$$+ \sum_{\alpha,k=1}\left\{\frac{2H^0_{\alpha k}}{a} + \frac{p}{\mu_k}\overline{H}_{\alpha k}\right\}\cos(pz)J_0(\mu_k r) - \int_0^r \frac{\partial F}{\partial z}dr -$$
$$- \sum_{\alpha,k=1}\frac{2H^0_{\alpha k}}{2a}\mu_k a\cos(pz)\frac{J_1(\mu_k r)}{\mu_k r} + \int_0^r \frac{B-R}{r}dr + 2GB_1 - \frac{Qr^2}{2} + f.$$

Các hằng số $\overline{D}_k$, D_k, $\overline{E}_k$, E_k, C, B_1, f được tính khi cho thỏa mãn các điều kiện biên. Khi đó ta sẽ đưa về việc cân bằng các hệ số của các khai triển theo các hàm $J_1(\mu_k r)$, $J_0(\mu_k r)$, $\cos(\lambda_k z)$, $\sin(\lambda_k z)$.

2. TÍNH TOÁN BẰNG SỐ

Tính toán với trụ có kích thước $a : b = 0,5$. Trụ được làm bằng thép 15X 18H12 C4T IO: $\sigma_s = 800\,\mathrm{MN/m^2}$, $E_1/E = 0,32$. Tải ngoài:

$$f_1(r,t) = f_2(r,t) = W_z(t)\ \sigma_s; \quad f_5(z,t) = 0;$$
$$f_6(z,t) = T_{0-za}(t)\ \sigma_s\ \sin\Big(\frac{\pi}{b}z\Big); \quad Qa^2 = \overline{Q}\ \sigma_s$$
$$f_3(r,t) = -f_4(r,t) = T_{0-z\ell}(t)\ \sigma_s\ J_1(\mu_1 r)$$

Ký hiệu

$$\overline{S}_{zz} = \frac{S_{zz}}{\sigma_s}\ ; \quad \overline{S}_{rr} = \frac{S_{rr}}{\sigma_s}\ ; \quad \overline{S}_{rz} = \frac{S_{rz}}{\sigma_s}\ ; \quad \overline{W}_u = \frac{\sigma_u}{\sigma_s}$$

Các giá trị hàm $T_{0-z\ell}(t)$, $T_{0-za}(t)$, $W_z(t)$ thay đổi theo tham số t được chỉ ra ở từng giai đoạn tải.

Bán kính được chia thành 50 điểm, chiều dài được chia thành 60 điểm, các khai triển được lấy đến số hạng thứ 7. Các tính toán được lập trình trên TURBO PASCAL với mô phỏng 8087 nên các chữ số được lấy đến 12 chữ số có nghĩa. Vì mục đích là khảo sát trạng thái ứng suất, biến dạng với các cách đặt tải khác nhau (phức tạp và đơn giản) với tính toán theo phương pháp gần đúng trên, tính với 3 lần lặp, đánh giá sai số giữa các lần lặp 2-1 và 3-2.

3. NHẬN XÉT

Qua tính toán trên nhiều cách đặt tải khác nhau, đã nhận được các kết quả và các nhận xét sau:

1 - Với mọi cách đặt tải khác nhau, các đại lượng được xác định với sai số giữa hai lần lặp thứ 2 và 3 đều nhỏ hơn sai số giữa hai lần lặp thứ 1 và 2. Sai số lớn nhất của tất cả các đại lượng giữa hai lần lặp thứ 2 và 3 ở mọi giai đoạn tải và ở cách đặt tải khác nhau đều dưới 5%.

2 - Trên cùng một cách đặt tải

+ Nếu chia quá trình đặt tải càng nhỏ thì sai số giữa hai lần lặp của tất cả các đại lượng càng nhỏ đi.

+ Nếu chia bán kính hoặc chiều dài trụ càng nhiều điểm thì sai số giữa hai lần lặp của tất cả các đại lượng càng giảm đi.

3 - Đem cùng một giá trị tải ngoài như nhau: nếu các quá trình đặt tải càng phức tạp thì vùng dẻo càng tăng: trong giai đoạn 3 (đặt tải đơn giản) thì vùng dẻo của trụ rất nhỏ, còn trong giai đoạn 6 (đặt tải phức tạp) vùng dẻo của trụ đã gần như hoàn toàn.

4. KẾT LUẬN

Qua việc giải bài toán và các nhận xét trên ta có kết luận sau:

1 - Phương pháp biến thể nghiệm đàn hồi của quá trình biến dạng đàn dẻo có tính hội tụ, tốc độ hội tụ cao, có tính ổn định.

2 - Độ phức tạp của quá trình đặt tải ảnh hưởng mạnh đến trạng thái biến dạng và ứng suất bên trong vật thể tức là vật thể làm việc kém hơn khi chịu tải phức tạp.

Tác giả chân thành cảm ơn GS TS Đào Huy Bích đã hướng dẫn thực hiện công trình này.

Công trình được sự tài trợ của chương trình nghiên cứu cơ bản trong lĩnh vực khoa học tự nhiên KT - 04.

Địa chỉ:
Trường Đại học Lâm nghiệp

Nhận ngày 20/5/1994

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Đào Huy Bích. Phương pháp biến thể nghiệm đàn hồi trong lý thuyết quá trình biến dạng đàn dẻo. Tạp chí Khoa học trường Đại học Tổng hợp Hà Nội No 2, 1985.
2. Đào Huy Bích. Lý thuyết quá trình đàn dẻo. ĐH Tổng hợp Hà Nội 1993.
3. Vũ Khắc Bảy. Sự hội tụ của phương pháp biến thể nghiệm đàn hồi trong lý thuyết quá trình biến dạng đàn dẻo. Tạp chí Cơ học No 4 - 1992.
4. Vũ Khắc Bảy. Trạng thái đàn dẻo của bản tròn chịu lực cắt và lực dãn đối xứng trục. Tuyển tập công trình Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ 4, Hà Nội 1993.

SUMMARY

ELASTO-PLASTIC STATE OF A SHORT-CIRCULAR CYLINDER SUBJECTED TO AXESYMMETRICAL COMPLEX LOADING

The modified method of elastic solution in the theory of elasto - plastic deformation processes had been proposed in [1]. Through the numerical solution of some elasto - plastic plane problems, the convergence, the convergence rate and the stability of this iteration method had been considered [3, 4]. In this paper, also through the numerical solution of the elasto - plastic space problem, the characters of this iteration method are considered, and the influence of complex loading processes to elasto - plastic state is confirmed.