

# TRẠNG THÁI ĐÀN DẼO CỦA LƯỚI DẦM CONG CÓ DẠNG VỎ TRỤ

VŨ KHẮC BẢY

Nghiên cứu bài toán về hệ thống lưới dầm cong có dạng vỏ trụ được các nhà kỹ thuật và xây dựng rất quan tâm. Tính toán bài toán này trong giới hạn đàn hồi đã được xét đến trong [3]. Trong bài này nghiên cứu trạng thái đàn - dẻo của hệ thống lưới dầm cong khi chịu tác dụng của lực mặt phân bố tùy ý.

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ VÀ CÁC GIẢ THIẾT

Xét hệ thống dầm cong, có dạng vỏ trụ, làm bằng vật liệu không nén được. Các trục của dầm lưới này đều nằm trên một mặt trụ tròn (gọi là mặt trung bình hay là mặt giữa). Mặt vỏ trụ trung bình có bán kính là  $R$ , độ dài đường sinh là  $l$ . Góc ở tâm cung của thiết diện ngang mặt trung bình là  $2\beta_0$ . Trục của các dầm cong này đều lập với đường sinh của mặt trung bình một góc  $\varphi$ .

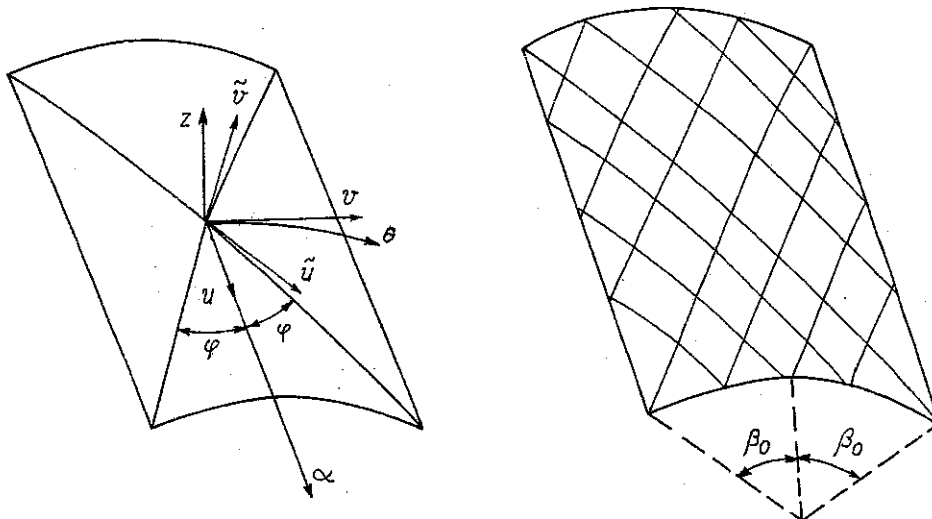
Hệ thống dầm lưới này tựa tự do trên các biên cong, còn các biên dọc đường sinh: tựa tự do hoặc bị ngàm. Trên mặt các dầm chịu tải phân bố tùy ý.

Để nghiên cứu bài toán này ta giả thiết rằng:

+ Các dầm đan đủ dày để trạng thái ứng suất (tại các dầm không thuộc phần giao nhau của các dầm) chỉ tính đến thành phần ứng suất theo hướng dọc trục dầm, còn các thành phần ứng suất khác là nhỏ nên bỏ qua.

+ Độ cong của mặt trung bình là nhỏ, nên dùng giả thiết vỏ thoải.

## 2. CÁC HỆ THỐNG KÝ HIỆU



$\alpha, \theta, z$  - Các tọa độ theo các hướng: dọc đường sinh, tiếp tuyến với cung của thiết diện ngang của mặt trung bình, theo hướng pháp tuyến ngoài của trung bình. Góc tọa độ đặt tại điểm giữa cung của biên ngang (trong đó:  $\alpha = x/R, \theta = y/R$ )

$\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$  - Các tọa độ hướng dọc theo các trục của các dầm

$u, v, w$  - Các thành phần chuyển vị trong hệ trục tọa độ:  $\alpha, \theta, z$

$\tilde{u}, \tilde{v}$  - Các thành phần chuyển vị trong hệ trục tọa độ  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$

$e_1, e_2, e_{12}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}$  - Các thành phần biến dạng, ứng suất trong hệ tọa độ:  $\alpha, \theta, z$

$\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$  - Biến dạng dọc, ứng suất pháp của dầm theo hướng:  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$

$a$  - Chiều cao của dầm

$E, G$  - Mô đun đàn hồi và mô đun trượt của vật liệu dầm

$\tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \tilde{M}_1, \tilde{M}_2, \tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2$  - Lực pháp, mô men uốn, lực cắt xuất hiện trong thiết diện ngang của dầm theo hướng  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ .

$N_1, N_2, N_{12}, N_{21}, Q_1, Q_2, M_1, M_2, M_{12}, M_{21}$  - Lực pháp, lực tiếp, lực cắt, mô men uốn và mô men xoắn xuất hiện tương ứng trên các thiết diện ngang và dọc của mặt trung bình.

$X, Y, Z$  - Các thành phần tải ngoài tương ứng với hệ tọa độ  $\alpha, \theta, z$ .

### 3. THIẾT LẬP CÁC QUAN HỆ

Với hệ thống ký hiệu trên, theo lý thuyết vỏ thoải ta có được các quan hệ:

$$e_1 = e_1^* - z\chi_1, \quad e_2 = e_2^* - z\chi_2, \quad e_{12} = e_{12}^* - z\chi_{12}$$

trong đó  $e_1^*, e_2^*, e_{12}^*$  là các biến dạng của mặt giữa, nó được liên hệ với các chuyển vị theo lý thuyết vỏ thoải

$$e_1^* = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \quad e_2^* = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R}, \quad e_{12}^* = \frac{1}{2R} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \quad (3.1)$$

và

$$\chi_1 = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, \quad \chi_2 = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \quad \chi_{12} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \theta}$$

Ta có:  $\tilde{e}_1 = e_1 \cos^2 \varphi + e_2 \sin^2 \varphi + 2e_{12} \cos \varphi \sin \varphi$ . Thay các chuyển vị vào ta được

$$\begin{aligned} \tilde{e}_1 &= \frac{1}{R} \left[ \cos^2 \varphi \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \sin^2 \varphi \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) + \frac{\sin 2\varphi}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \right] - \\ &\quad - \frac{z}{R^2} \left[ \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \sin 2\varphi \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \theta} \right] \\ &= \tilde{e}_1^* - z\tilde{\chi}_1. \end{aligned}$$

Tương tự:

$$\begin{aligned} \tilde{e}_2 &= \frac{1}{R} \left[ \cos^2 \varphi \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \sin^2 \varphi \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) - \frac{\sin 2\varphi}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \right] - \\ &\quad - \frac{z}{R^2} \left[ \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \sin 2\varphi \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \theta} \right] \\ &= \tilde{e}_2^* - z\tilde{\chi}_2. \end{aligned}$$

Với các giả thiết đã nêu thì trạng thái ứng suất, biến dạng ở các dầm sẽ tuân theo lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ:

$$\tilde{\sigma}_1 = 3G\tilde{e}_1 - 3Gw\tilde{e}_1 \quad \text{và} \quad \tilde{\sigma}_2 = 3G\tilde{e}_2 - 3Gw\tilde{e}_2$$

Do đó xác định được  $\tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \tilde{M}_1, \tilde{M}_2$ . Khi đó tại các phần giao nhau của dầm (mà ta gọi chúng là các nút lưới) sẽ có:

$$\begin{aligned} N_1 &= (\tilde{N}_1 + \tilde{N}_2) \cos^2 \varphi, & N_2 &= (\tilde{N}_1 + \tilde{N}_2) \sin^2 \varphi, & N_{12} &= N_{21} = 0,5 \sin 2\varphi (\tilde{N}_1 - \tilde{N}_2) \\ M_1 &= (\tilde{M}_1 + \tilde{M}_2) \cos^2 \varphi, & M_2 &= (\tilde{M}_1 + \tilde{M}_2) \sin^2 \varphi, & M_{12} &= -M_{21} = 0,5 \sin 2\varphi (\tilde{M}_1 - \tilde{M}_2) \end{aligned}$$

Các lực pháp và mô men trên cần thỏa mãn hệ phương trình vi phân cân bằng

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial N_{12}}{\partial \theta} + RX &= 0, \\ \frac{\partial N_1}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{12}}{\partial \alpha} + RY &= 0, \\ -N_2 + \frac{\partial Q_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial Q_2}{\partial \theta} + RZ &= 0, \\ Q_1 &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta} + \frac{\partial M_1}{\partial \alpha} \right), \\ Q_2 &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha} + \frac{\partial M_2}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

và các điều kiện biên

$$v = w = N_1 = M_1 = 0 \quad \text{khi } \alpha = 0 \quad \text{và} \quad \alpha = \frac{\ell}{R} \quad (\text{tựa tự do}) \quad (3.3)$$

$$v = w = N_2 = M_2 = 0 \quad \text{khi } \theta = \pm \beta_0 \quad (\text{tựa tự do}) \quad (3.4)$$

$$\text{hoặc: } u = v = w = \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \quad \text{khi } \theta = \pm \beta_0 \quad (\text{ngàm}) \quad (3.5)$$

Đặt:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_1 &= 3Ga\tilde{e}_1^* + R_{N1}, & \tilde{N}_2 &= 3Ga\tilde{e}_2^* + R_{N2} \\ \tilde{M}_1 &= -\frac{Ga^3}{4} \chi_1 + R_{M1}, & \tilde{M}_2 &= -\frac{Ga^3}{4} \chi_2 + R_{M2} \end{aligned}$$

với:

$$\begin{aligned} R_{N1} &= -3G \int_{-a/2}^{a/2} \omega \tilde{e}_1 dz, & R_{N2} &= -3G \int_{-a/2}^{a/2} \omega \tilde{e}_2 dz \\ R_{M1} &= -3G \int_{-a/2}^{a/2} \omega \tilde{e}_1 z dz, & R_{M2} &= -3G \int_{-a/2}^{a/2} \omega \tilde{e}_2 z dz \end{aligned}$$

Ký hiệu

$$R_N = R_{N1} + R_{N2}, \quad S_N = R_{N1} - R_{N2}, \quad R_M = R_{M1} + R_{M2}, \quad H_M = R_{M1} - R_{M2}$$

Thay thế các chuyển dịch vào các biểu thức trên, sau khi thay vào phương trình cân bằng ta dẫn đến

$$\begin{aligned} \text{ctg}^2 \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial \alpha} &= \frac{-2R^2 X}{3Ga \sin^2 2\varphi} - \frac{R}{6Ga} \left[ \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial R_N}{\partial \alpha} + \frac{2}{\sin 2\varphi} \frac{\partial S_N}{\partial \theta} \right], \\ 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \text{tg}^2 \varphi + \text{tg}^2 \varphi \frac{\partial w}{\partial \alpha} &= \frac{-2R^2 Y}{3Ga \sin^2 2\varphi} - \frac{R}{6Ga} \left[ \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial R_N}{\partial \alpha} + \frac{2}{\sin 2\varphi} \frac{\partial S_N}{\partial \theta} \right], \\ \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \text{tg}^2 \varphi \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{a^2}{12R^2} \left( \text{ctg}^2 \varphi \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + 6 \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^2 \partial \theta^2} + \text{tg}^2 \varphi \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right) + w \text{tg}^2 \varphi &= \\ = \frac{2R^2 Z}{3Ga \sin^2 2\varphi} + \frac{1}{6Ga} \left[ \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 R_M}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 R_M}{\partial \theta^2} + \frac{4}{\sin 2\varphi} \frac{\partial^2 H_M}{\partial \alpha \partial \theta} \right] - \frac{RR_M}{6Ga \cos^2 \varphi} \end{aligned} \quad (3.6)$$

#### 4. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Với các giả thiết và quan hệ đã nêu trên, bài toán chuyển về xác định các hàm  $u, v, w$  thỏa mãn hệ phương trình (3.6) và các điều kiện biên (3.3), (3.4) hoặc (3.3), (3.5).

Trước hết ta tìm nghiệm tổng quát của hệ phương trình thuần nhất tương ứng với hệ phương trình (3.6). Giả sử  $L_1, L_2, L_3, \bar{L}_1$  là các toán tử vi phân tuyến tính nào đó để sao cho:  $u = \bar{L}_1 \phi, v = L_2 \phi, w = L_3 \phi$  và  $\bar{L}_1 \phi = 0$  với  $\phi$  là một hàm nào đó (phải tìm), khi đó  $L_1, L_2, L_3, \bar{L}_1$  cần thỏa mãn hệ phương trình sau:

$$\begin{aligned} & \left( \text{ctg}^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) L_1 + \left( 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \theta} \right) L_2 + \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) L_3 = A_1 \bar{L}_1, \\ & \left( 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \theta} \right) L_1 + \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \text{tg}^2 \varphi \right) L_2 + \left( \text{tg}^2 \varphi \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) L_3 = 0, \\ & \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) L_1 + \left( \text{tg}^2 \varphi \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) L_2 + \left( C \left[ \text{ctg}^2 \varphi \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 6 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \theta^2} + \text{tg}^2 \varphi \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \right] + \text{tg}^2 \varphi \right) L_3 = 0. \end{aligned}$$

Với  $C = \frac{a^2}{12R^2}$ ,  $A_1$  - hằng số cần tìm. Giải ra ta được  $A_1 = -C$  và các toán tử:

$$\begin{aligned} \bar{L}_1 &= \text{ctg}^2 \varphi \frac{\partial^8}{\partial \alpha^8} + \text{tg}^2 \varphi \frac{\partial^8}{\partial \theta^8} + 4 \text{ctg}^2 \varphi \frac{\partial^8}{\partial \alpha^6 \partial \theta^2} + 4 \text{tg}^2 \varphi \frac{\partial^8}{\partial \alpha^2 \partial \theta^6} - 10 \frac{\partial^8}{\partial \theta^4 \partial \alpha^4}, \\ L_1 &= - \left( C \left[ \text{ctg}^2 \varphi \frac{\partial^6}{\partial \alpha^6} + 7 \frac{\partial^6}{\partial \alpha^4 \partial \theta^2} + 7 \text{tg}^2 \varphi \frac{\partial^6}{\partial \alpha^2 \partial \theta^4} + \text{tg}^2 \varphi \frac{\partial^6}{\partial \theta^6} \right] + \text{tg}^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right), \\ L_2 &= \text{tg}^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \theta} + 2C \left[ \text{ctg}^2 \varphi \frac{\partial^6}{\partial \alpha^5 \partial \theta} + 6 \frac{\partial^6}{\partial \alpha^3 \partial \theta^3} + \text{tg}^2 \varphi \frac{\partial^6}{\partial \alpha \partial \theta^5} \right], \\ L_3 &= \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} - \text{tg}^2 \varphi \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \theta^2} \end{aligned}$$

và hàm

$$\begin{aligned} \phi &= C_1 \theta^6 + C_2 \theta^7 + \sum_{m=1} [(C_{1m} + c_{3m} \theta) \sin(\bar{\lambda}_m \theta) + (C_{2m} + C_{4m} \theta) \cos(\bar{\lambda}_m \theta) + \\ &+ C_{5m} \text{sh}(\bar{p}_m \theta) + C_{6m} \text{ch}(\bar{p}_m \theta) + C_{7m} \text{sh}(\bar{q}_m \theta) + C_{8m} \text{ch}(\bar{q}_m \theta)] \cos(\lambda_m \alpha) \end{aligned}$$

Khi đó nếu gọi  $u^*, v^*, w^*$  là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng với (3.6) thì ta được:

$$\begin{aligned} u^* &= \bar{C}_1 + \bar{C}_2 \theta - \text{tg}^2 \varphi \sum_{m=1} \left\{ [\bar{C}_{1m} + (16\bar{\lambda}_m^4 C) \bar{\lambda}_m \bar{C}_{3m} \theta - 48\bar{\lambda}_m^4 \bar{C}_{4m} C] \sin(\bar{\lambda}_m \theta) \right. \\ &- [\bar{C}_{2m} + (1 + 16\bar{\lambda}_m^4 C) \bar{C}_{4m} \theta + 48\bar{\lambda}_m^4 C \bar{C}_{3m}] \cos(\bar{\lambda}_m \theta) \\ &+ \lambda_m [\bar{C}_{3m} \text{sh}(\bar{p}_m \theta) + \bar{C}_{6m} \text{ch}(\bar{p}_m \theta) + \bar{C}_{7m} \text{sh}(\bar{q}_m \theta) + \bar{C}_{8m} \text{ch}(\bar{q}_m \theta)] \left. \right\} \cos(\lambda_m \alpha) \\ v^* &= \text{tg} \varphi \sum_{m=1} \left\{ [\bar{C}_{1m} + (1 + 16\bar{\lambda}_m^4 C) \bar{\lambda}_m \bar{C}_{3m} \theta - (1 + 48\bar{\lambda}_m^4 C) \bar{C}_{4m}] \cos(\bar{\lambda}_m \theta) \right. \\ &+ [\bar{C}_{2m} + (1 + 16\bar{\lambda}_m^4 C) \bar{\lambda}_m \bar{C}_{4m} \theta + (1 + 48\bar{\lambda}_m^4 C) \bar{C}_{3m}] \sin(\bar{\lambda}_m \theta) \\ &+ \bar{p}_m \text{tg} \varphi [\bar{C}_{5m} \text{ch}(\bar{p}_m \theta) + \bar{C}_{6m} \text{sh}(\bar{p}_m \theta)] + \bar{q}_m \text{tg} \varphi [\bar{C}_{7m} \text{ch}(\bar{q}_m \theta) + \bar{C}_{8m} \text{sh}(\bar{q}_m \theta)] \left. \right\} \sin(\lambda_m \alpha) \\ w^* &= - \sum_{m=1} \left\{ 2\lambda_m [\bar{C}_{4m} \sin(\bar{\lambda}_m \theta) + \bar{C}_{3m} \cos(\bar{\lambda}_m \theta)] + (\lambda_m^2 + p_m^2) [\bar{C}_{5m} \text{sh}(\bar{p}_m \theta) + \bar{C}_{6m} \text{ch}(\bar{p}_m \theta)] \right. \\ &+ (\lambda_m^2 + q_m^2) [\bar{C}_{7m} \text{sh}(\bar{q}_m \theta) + \bar{C}_{8m} \text{ch}(\bar{q}_m \theta)] \left. \right\} \sin(\lambda_m \alpha). \end{aligned}$$

Với

$$\lambda_m = \frac{m\pi R}{\ell}, \quad p_m = \lambda_m \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}, \quad q_m = \lambda_m \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}, \quad \bar{\lambda}_m = \lambda_m \operatorname{ctg} \varphi$$

Để tìm nghiệm riêng của hệ phương trình (3.6) (với vế phải khác 0), nhận thấy rằng hệ (3.6) là hệ phương trình đạo hàm riêng tuyến tính của các biến  $\alpha, \beta$  nên ta có thể đưa về việc tìm nghiệm riêng của 3 hệ phương trình đạo hàm riêng với vế trái giữ nguyên, còn vế phải lần lượt với 3 trường hợp sau:

- a)  $A(\alpha, \theta) \neq 0, \quad B(\alpha, \theta) = 0, \quad D(\alpha, \theta) = 0.$
- b)  $A(\alpha, \theta) = 0, \quad B(\alpha, \theta) \neq 0, \quad D(\alpha, \theta) = 0.$
- c)  $A(\alpha, \theta) = 0, \quad B(\alpha, \theta) = 0, \quad D(\alpha, \theta) \neq 0.$

trong đó  $A(\alpha, \theta), B(\alpha, \theta), D(\alpha, \theta)$  lần lượt ký hiệu vế phải của các phương trình (3.6). Khai triển các  $A(\alpha, \theta), B(\alpha, \theta), D(\alpha, \theta)$  dưới dạng chuỗi Fourier theo các biến  $\theta$  trên đoạn  $[0, \beta_0]$  và  $\alpha$  trên đoạn  $\left[-\frac{\ell}{R}, \frac{\ell}{R}\right]$ .

\* Đối với trường hợp a) ta sẽ tìm nghiệm dưới dạng  $u_a = L_1 \phi_a, v_a = L_2 \phi_a, w_a = L_3 \phi_a$  với  $L_1, L_2, L_3$  như đã tìm được và  $\bar{L}_1 \phi_a = -A(\alpha, \theta)/C$ . Còn hàm  $\phi_a(\alpha, \theta)$  dưới dạng:

$$\phi_a(\alpha, \theta) = \sum_{m,n} T_{mn}^a \begin{Bmatrix} \cos(\gamma_n \theta) & \cos(\lambda_m \alpha) \\ \sin(\gamma_n \theta) & \sin(\lambda_m \alpha) \end{Bmatrix}$$

\* Đối với trường hợp b) tìm được hàm  $\phi_b$  và các toán tử vi phân  $L_{1b}, L_{2b}, L_{3b}, \bar{L}_1$  và hằng số  $A_2$  để sao cho nếu  $\bar{L}_1 \phi_b = -B(\alpha, \theta)/A_2$  thì với  $u_b = L_{1b} \phi_b, v_b = L_{2b} \phi_b, w_b = L_{3b} \phi_b$  sẽ là nghiệm riêng của hệ phương trình. Bằng các cách tương tự ta tìm được  $A_2 = C$  và các toán tử:

$$\begin{aligned} L_{1b} &= -\left( \operatorname{tg}^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \theta} + 2C \left[ \operatorname{tg}^2 \varphi \frac{\partial^6}{\partial \alpha \partial \theta^5} + \operatorname{ctg}^2 \varphi \frac{\partial^6}{\partial \theta \partial \alpha^5} + 6 \frac{\partial^6}{\partial \alpha^3 \partial \theta^3} \right] \right) \\ L_{2b} &= \operatorname{tg}^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + C \left[ \operatorname{ctg}^4 \varphi \frac{\partial^6}{\partial \alpha^6} + 7 \operatorname{ctg}^2 \varphi \frac{\partial^6}{\partial \theta^2 \partial \alpha^4} + 7 \frac{\partial^6}{\partial \alpha^2 \partial \theta^4} + \operatorname{tg}^2 \varphi \frac{\partial^6}{\partial \theta^6} \right] \\ L_{3b} &= \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \theta} - \operatorname{tg}^2 \varphi \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \end{aligned}$$

và hàm  $\phi_b(\alpha, \theta)$  tìm được dưới dạng:

$$\phi_b(\alpha, \theta) = \sum_{m,n} T_{mn}^b \begin{Bmatrix} \cos(\gamma_n \theta) & \cos(\lambda_m \alpha) \\ \sin(\gamma_n \theta) & \sin(\lambda_m \alpha) \end{Bmatrix}$$

\* Đối với trường hợp c) tìm được  $\phi_c$  và các toán tử vi phân  $L_{1c}, L_{2c}, L_{3c}, \bar{L}_1$  và hằng số  $A_3$  để sao cho nếu  $\bar{L}_1 \phi_c = -D(\alpha, \theta)/C$  thì với  $u_c = L_{1c} \phi_c, v_c = L_{2c} \phi_c, w_c = L_{3c} \phi_c$  sẽ là nghiệm riêng của hệ phương trình. Ở đây ta tìm được hàm  $\phi_c(\alpha, \theta)$  dưới dạng:

$$\phi_c(\alpha, \theta) = \sum_{m,n} T_{mn}^c \begin{Bmatrix} \cos(\gamma_n \theta) & \cos(\lambda_m \alpha) \\ \sin(\gamma_n \theta) & \sin(\lambda_m \alpha) \end{Bmatrix}$$

và các toán tử vi phân

$$\begin{aligned} L_{1c} &= \operatorname{tg}^3 \varphi \frac{\partial^3}{\partial \theta^2 \partial \alpha} - \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3}, \\ L_{2c} &= \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \theta} - \operatorname{tg}^2 \varphi \frac{\partial^3}{\partial \theta^3}, \\ L_{3c} &= \operatorname{ctg}^2 \varphi \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} - 2 \frac{\partial^4}{\partial \theta^2 \partial \alpha^2} \end{aligned}$$

Chú ý rằng trong toán tử vi phân  $\tilde{L}_1$  chỉ chứa các đạo hàm riêng bậc chẵn theo các biến  $\alpha$  và  $\theta$  nên các hằng số  $T_{mn}^a, T_{mn}^b, T_{mn}^c$ , ( $\forall m, n$ ) đều có thể tính được dễ dàng.

Như vậy nếu gọi  $u^0, v^0, w^0$  là nghiệm riêng của hệ phương trình (3.6) thì khi đó:

$$\begin{aligned} u^0 &= L_{1a}\phi_a + L_{1b}\phi_b + L_{1c}\phi_c \\ v^0 &= L_{2a}\phi_a + L_{2b}\phi_b + L_{2c}\phi_c \\ w^0 &= L_{3a}\phi_a + L_{3b}\phi_b + L_{3c}\phi_c \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình (3.6) sẽ là :

$$u = u^* + u^0, \quad v = v^* + v^0, \quad w = w^* + w^0$$

chứa các hằng số  $\bar{C}_{1m}, \bar{C}_{2m}, \bar{C}_{im}$ , ( $i = 1 \div 8, m = 1, 2, 3, 4, \dots$ ). Các hệ số này được xác định từ các điều kiện biên bằng cách cân bằng các hệ số khai triển

## 5. TÍNH TOÁN VỚI TRƯỜNG HỢP TẢI NGOÀI ĐỐI XỨNG VỚI MẶT PHẪNG $\theta = 0$

Để tính toán, ta đưa vào các đại lượng không thứ nguyên

$$\begin{aligned} \bar{X}(\alpha, \theta) &= X(\alpha, \theta)/\sigma_s, \quad \bar{Y}(\alpha, \theta) = Y(\alpha, \theta)/\sigma_s, \quad \bar{Z}(\alpha, \theta) = Z(\alpha, \theta)/\sigma_s \\ \bar{R}_N(\alpha, \theta) &= R_N(\alpha, \theta)(a\sigma_s), \quad \bar{S}_N(\alpha, \theta) = S_N(\alpha, \theta)/(a\sigma_s) \\ \bar{R}_M(\alpha, \theta) &= R_M(\alpha, \theta)/(a^2\sigma_s), \quad \bar{H}_M(\alpha, \theta) = H_M(\alpha, \theta)/(a^2\sigma_s), \end{aligned}$$

$$\bar{R} = \frac{R}{a}, \quad \bar{G} = \frac{G}{\sigma_s}, \quad \eta = \frac{\bar{R}}{6\bar{G}}, \quad \bar{u} = \frac{u}{a}, \quad \bar{v} = \frac{v}{a}, \quad \bar{w} = \frac{w}{a}.$$

Các số liệu tính toán cho loại thép  $\text{ЭИ} - 659$  với các thông số:  $\sigma_s = 4000 \text{ kg/cm}^2, \bar{G} = 20, \frac{\phi'(s)}{3G} = 0,224, \varphi = \frac{\pi}{4}, \beta_0 = \frac{\pi}{2}, \frac{R}{\ell} = 0,25, C = 10^{-5}, \frac{R}{a} = \frac{1}{12C}$

Tải trọng được phân bố theo dạng:

$$\bar{X} = X(t) \cos \theta \sin \left( \frac{\pi R \alpha}{\ell} \right), \quad \bar{Y} = p(t) \sin \theta, \quad \bar{Z} = -p(t) \cos \theta$$

Các kết quả tính toán đối với bài toán (3.6), (3.3), (3.5) được nêu trong bảng 1: chia đoạn  $\left[0, \frac{\ell}{R}\right]$  bởi 21 điểm, chia đoạn  $[-\beta_0, \beta_0]$  bởi 41 điểm, đoạn  $[-z, z]$  bởi 21 điểm, các khai triển đều lấy đến 20 số hạng.

Tính toán cho hai bài toán ứng với hai điều kiện biên khác nhau:

\* Bài toán 1. Tương ứng với điều kiện biên: Các biên cong của dầm lưới và các biên dọc đường sinh tựa tự do

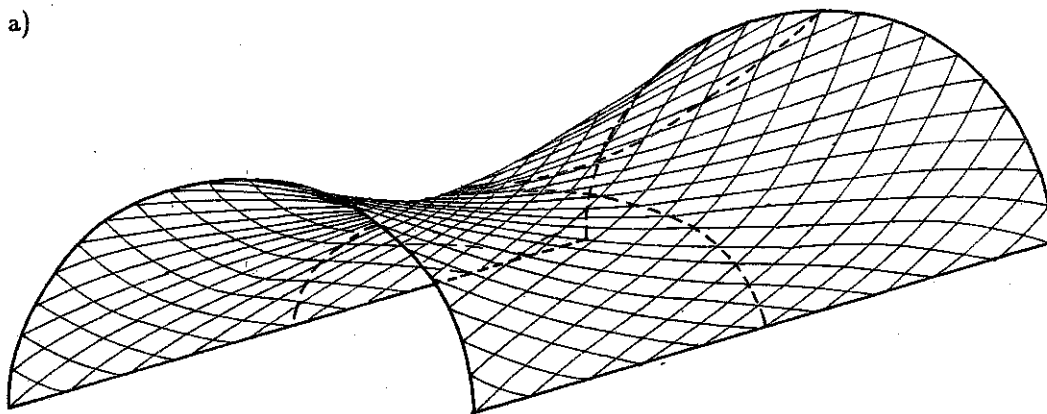
\* Bài toán 2. Tương ứng với điều kiện biên: Các biên cong của dầm lưới tựa tự do, hai biên dọc đường sinh chịu ngàm

Biểu đồ 1 cho ta các hình ảnh của hệ thống dầm lưới của hai bài toán ứng với hai điều kiện biên:

- Hình ảnh hệ thống dầm lưới bài toán 1 với tải ngoài  $X(t) = 0, p(t) = 0,98 \cdot 10^{-3}$ .
- Hình ảnh hệ thống dầm lưới bài toán 2 với tải ngoài  $X(t) = 10^{-6}, p(t) = 1,1 \cdot 10^{-3}$ .
- Hình ảnh dẻo tại thiết diện có tọa độ  $\theta = \beta_0$  (trong bài toán 2): nút thứ 10 ở trạng thái dẻo hoàn toàn, các nút khác còn ở trạng thái đàn hồi.

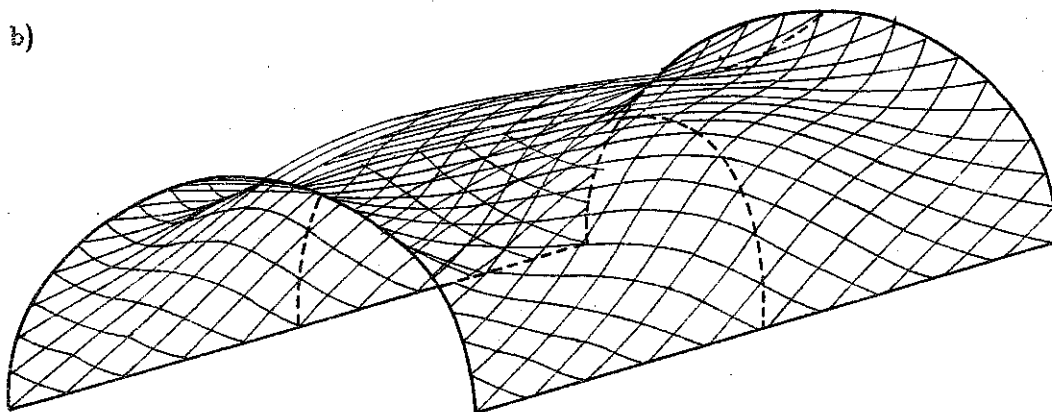
Biểu đồ 1:

a)



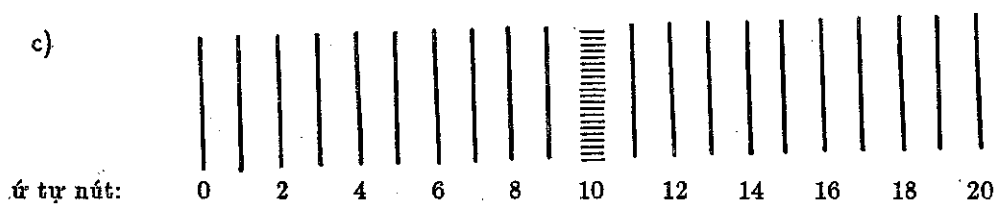
Đạt  $\sigma_u \max = 1.22721E - 01$  tại tọa độ: 0, 19, 10, trong đó ký hiệu  $E - 0n = 10^{-n}$ .  
Đạt  $W_{\max} = -7.93658E - 01$  tại tọa độ: 10, 0

b)



Đạt  $\sigma_u \max = 1.00215E + 00$  tại tọa độ: 10, 20, 10  
Đạt  $W_{\max} = 3.19318E - 03$  tại tọa độ: 10, 12

c)



## 6. NHẬN XÉT

Qua kết quả tính toán cho hai bài toán dầm lưới dạng vỏ trụ ứng với hai điều kiện biên khác nhau, ta nhận thấy rằng

- Do tính chất của bài toán và các giả thiết về sự uốn của các dầm trong hệ thống lưới dầm ên sử dụng ở đây phương pháp nghiệm đàn hồi, nó cũng là dạng riêng của phương pháp biến thể nghiệm đàn hồi của lý thuyết quá trình biến dạng đàn dẻo khi quá trình đặt tải là đơn giản, ới kết quả nhận được thấy rằng phương pháp lặp trên có tốc độ hội tụ khá cao: sai số lớn nhất iữa hai lần lặp thứ 1 và thứ 2 của tất cả các đại lượng đã ở mức phần nghìn, còn giữa hai lần ặp thứ 2 và 3 đã ở mức phần triệu, điều này cũng khẳng định thêm cho tính hội tụ của phương háp lặp này.

- Với cách đặt tải trên thì đối với bài toán 2 (biên bị ngàm dọc đường sinh) sẽ đạt cường độ ứng suất lớn nhất tại các nút giữa trên các biên dọc đường sinh. Với giá trị tải ngoài được chỉ ra trong bảng 1 thì tại giai đoạn 2 bắt đầu xuất hiện dẻo phía mặt ngoài của nút tại giữa các biên dọc đường sinh, còn với giá trị tải ngoài như ở giai đoạn 3 thì dẻo hoàn toàn. Độ võng đạt giá trị ớn nhất tại tọa độ  $\alpha = \frac{\ell}{2R}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{3}$ . Trong khi đó đối với bài toán 1 (biên tựa tự do dọc đường sinh): với cùng giá trị tải như đối với bài toán 2 thì nó đạt độ võng khá lớn (gấp 8 lần) so với độ ỡng trong bài toán 2, và đạt giá trị lớn nhất tại tọa độ  $\alpha = \frac{\ell}{2R}$ ,  $\theta = 0$ . Giá trị cường độ ứng suất lớn nhất đạt tại các nút ở các góc của hệ thống dầm lưới.

### Bảng 1. KẾT QUẢ TÍNH TOÁN LƯỚI VỎ TRỤ

(Điều kiện biên II: Tựa tự do tại hai biên cong. Ngàm theo hai biên dọc đường sinh)  
Các đại lượng tính ở điểm có tọa độ: 10, 20, 10. Độ võng tính tại điểm có tọa độ: 10, 0

$$\sigma_s = 4000 \text{ kg/cm}^2, \quad \bar{G} = 20, \quad \frac{\phi'(s)}{3G} = 0,224, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \beta_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{R}{\ell} = 0,25, \quad C = 10^{-5}, \quad \frac{R}{a} = \frac{1}{12C}. \quad \text{Chia chiều dài, rộng, cao : 21, 41, 21 điểm}$$

$$\text{Tải ngoài: } \bar{X} = X(t) \cdot \cos \theta \sin \left( \frac{\pi R a}{\ell} \right), \quad \bar{Y} = p(t) \cdot \sin \theta, \quad \bar{Z} = -p(t) \cdot \cos \theta$$

Các đại lượng lượng	Lần lặp 1	Lần lặp 2	Sai số giữa hai lần lặp 1 và 2	Lần lặp 3	Sai số giữa hai lần lặp 2 và 3
Giai đoạn 1: $X(t) = 0, p(t) = 1.0E - 03 \quad (\text{Kg/cm}^2)$					
$e_1$	-1.665E-0003				
$\sigma_1$	-9.992E-0001				
$\sigma_u$	9.992E-0001				
Độ võng	-1.613E-0003				
Giai đoạn 2: $X(t) = 0.5E - 06, p(t) = 1.052E - 03 \quad (\text{Kg/cm}^2)$					
$e_1$	-1.674E-0003	-1.674E-0003	0.000E+0000	-1.674E-0003	0.000E+0000
$\sigma_1$	-1.004E+0000	-1.001E+0000	0.000E+0000	-1.001E+0000	0.000E+0000
$\sigma_u$	1.004E+0000	1.001E+0000	3.381E-0003	1,001E+0000	5.114E-0008
Độ võng	-1.622E-0003	-1.622E-0003	0.000E+0000	-1.622E-0003	0.000E+0000
Giai đoạn 3: $X(t) = 1.0E - 06, p(t) = 1.1E - 03 \quad (\text{Kg/cm}^2)$					
$e_1$	-1.683E-0003	-1.683E-0003	0.000E+0000	-1.683E-0003	0,000E+0000
$\sigma_1$	-1.010E+0000	-1.002E+0000	0.000E+0000	-1.002E+0000	0.000E+0000
$\sigma_u$	1.010E+0000	1.002E+0000	7.375E-0003	1.002E+0000	1.798E-0007
Độ võng	-1.630E-0003	-1.630E-0003	0.000E+0000	-1.630E-0003	0.000E+0000



Tác giả chân thành cảm ơn GS TS Đào Huy Bích đã hướng dẫn để hoàn thành công trình này

Công trình được sự tài trợ của đề tài KT 0.4 2.2

Địa chỉ:  
Trường Đại học Lâm nghiệp

Nhận ngày 6/9/1995

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Власов В. З. Общая теория оболочек. Гостехиздат 1949.
2. Галимов К. З., Муштари Х. М. Нелинейная теория упругих оболочек - Казань, Таткнизоиздат 1957.
3. Пшеничников Г. И. Расчет сетчатых цилиндрических оболочек М. 1969.
4. Пшеничников Г. И. Теория тонких упругих сетчатых оболочек и пластинок, Наука, М. 1982.

### SUMMARY

#### ELASTO - PLASTIC STATE OF CURVE BEAM SYSTEM SUBJECTED TO COMPLEX LOADING

Investigation of the elastic state of curve beam system had been considered in [3]. In this paper the elasto - plastic state of curve beam system in the form of cylindrical shell is analysed by the elastic solution method. Numerical results of the problem and conclusion are given.