Tạp chí Cơ học Journal of Mechanics, NCNST of Vietnam T. XVIII, 1996, No 4 (6 - 13)

VA CHẠM CỦA HAI THANH ĐÀN HỒI VỚI THANH THỨ HAI CHỊU LỰC CẢN ĐÀN NHỚT Ở MẶT BÊN VÀ TỰA TRÊN NỀN CỨNG

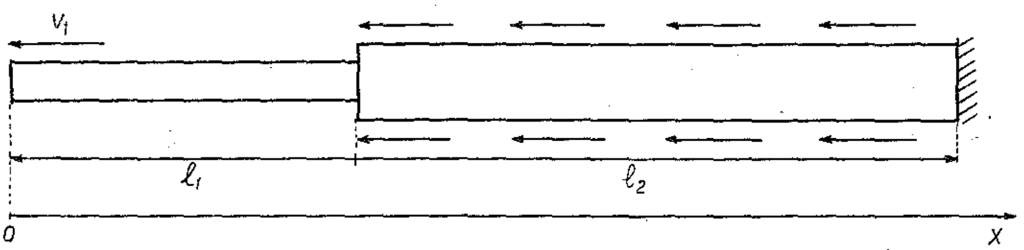
NGUYỄN THÚC AN, NGUYỄN ĐĂNG TỘ,
NGUYỄN HÙNG SƠN

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Theo [1] Các tác giả đã giải bài toán va chạm của hai thanh đàn hồi với thanh thứ hai bán vô hạn và chịu lực cản đàn nhớt ở mặt bên.

Trong bài này các tác giả xét bài toán trên với thanh thứ hai hữu hạn và đầu thanh không bị va chạm tựa trên nền cứng

SƠ ĐỒ BÀI TOÁN



2. THIẾT LẬP BÀI TOÁN

a. Phương trình chuyển động của thanh

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \quad \text{với} \quad 0 \le x \le \ell_1; \; t > 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial t} + k u_2 = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \quad \text{với} \quad \ell_1 \le x \le \ell_1 + \ell_2; \; t > 0 \tag{2.2}$$

b. Điều kiện đầu của bài toán: Trước khi va chạm khi $t = 0$ thì:

$$u_1 = 0; \quad \dot{u}_1 = V_1 \tag{2.3a}$$

$$u_2 = 0; \quad \dot{u}_2 = 0 \tag{2.3b}$$

c. Điều kiện biên của bài toán:

Tại $x = 0$ thì:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \tag{2.4a}$$

Tại $x = \ell_1 + \ell_2$ thì:

$$u_2 = 0 \tag{2.4b}$$

Tại $x = \ell_1$ thì:

$$E_1F_1\frac{\partial u_1}{\partial x} = E_2F_2\frac{\partial u_2}{\partial x} \quad \text{và} \quad u_1 = u_2 \tag{2.4c}$$

3. CÁCH GIẢI BÀI TOÁN

Để giải bài toán biên trên ta đưa về giải 2 bài toán sau:

Bài toán 1

Bài toán này được biểu thị ở (2.1) (2,3a), (2.4a) và:

$$\text{khi } x = \ell_1 \qquad E_1F_1\frac{\partial u_1}{\partial x} = -Q(t) \tag{3.1}$$

Áp dụng phép biến đổi Laplace $u_1(x,t) \div u_1(x,p)$ và $Q(t) \div Q_0(p)$.
Theo [1] ta có hàm ảnh:

$$u_1^{(0)}(x,p) = -\frac{a_1}{E_1F_1}\,\frac{Q_0(p)}{p}\,\frac{\mathrm{ch}(px/a_1)}{\mathrm{sh}(p\ell_1/a_1)} + \frac{V_1}{p^2} \tag{3.2}$$

và nghiệm của bài toán thứ nhất là:

$$u_1(t,x) = V_1t + \frac{a_1}{E_1F_1}\Big\{\sum_{n=0}^{n_1}\int_0^{t-[(2n+1)\ell_1-x]/a_1} Q(\tau)d\tau + \sum_{n=0}^{n_1}\int_0^{t-[(2n+1)\ell_1+x]/a_1} Q(\tau)d\tau\Big\} \tag{3.3}$$

trong đó

$$n_1 = \left\|\frac{a_1t-\ell_1+x}{2\ell_1}\right\|; \qquad n_2 = \left\|\frac{a_1t-\ell_1-x}{2\ell_1}\right\|$$

Bài toán 2

Bài toán này được biểu thị ở (2.2), (2.3b), (2.4b) và

$$E_2F_2\frac{\partial u_2}{\partial x} = -Q(t) \quad \text{khi} \quad x = \ell_1 \tag{3.4}$$

Hàm ảnh của nghiệm phương trình (2.2) có dạng:

$$u_2^{(0)}(x,p) = \frac{Q_0(p)}{E_2F_2\beta(1+e^{2\beta\ell_2})}\left[e^{[2\ell_2-(x-\ell_1)]\beta} - e^{\beta(x-\ell_1)}\right] \tag{3.5}$$

trong đó:

$$\beta = \sqrt{p^2+\lambda p+k}/a_2 = \sqrt{(p+\lambda/2)^2-(\lambda^2-4k)/4}/a_2$$

Đặt $\lambda_2 = \mathrm{Re}\sqrt{\lambda^2-4k}$.

Trường hợp 1: Nếu $\lambda^2 - 4k > 0$. Nghiệm của bài toán 2 có dạng:

$$u_2(x,t) = \frac{a_2}{E_2F_2}\sum_{n=0}^{N_1}(-1)^n\int_{[(x-\ell_1)+2n\ell_2]/a_2}^{t} Q(t-\tau)e^{-\lambda\tau/2}I_0\Big[\frac{\lambda_2}{2}\sqrt{\tau^2-(x-\ell_1+2n\ell_2)^2/a_2^2}\Big]d\tau$$

$$+\frac{a_2}{E_2F_2}\sum_{k=1}^{N_2}(-1)^k\int_{[2k\ell_2-(x-\ell_1)]/a_2}^{t} Q(t-\tau)e^{-\lambda\tau/2}I_0\Big[\frac{\lambda_2}{2}\sqrt{\tau^2-(2k\ell_2-x+\ell_1)^2/a_2^2}\Big]d\tau \tag{3.6}$$

trong đó

$$N_1 = \left\| \frac{a_2 t - x + \ell_1}{2\ell_2} \right\| ; \qquad N_2 = \left\| \frac{a_2 t + x - \ell_1}{2\ell_2} \right\|$$

ở các biểu thức (3.3) và (3.6) thì $Q(t)$ là hàm chưa biết, nó được xác định dựa vào điều kiện biên (2.4c) tại $x = \ell_1$

$$u_2(\ell_1, t) = u_1(\ell_1, t)$$

hay

$$u_2^{(0)}(\ell_1 . p) = u_1^{(0)}(\ell_1, p)$$

Từ (3.2) và (3.5) ta có

$$Q_0(p)\Big\{ a_1 \mathrm{cth} \frac{(p\ell_1/a_1)}{(pE_1F_1)} + \frac{e^{2\beta\ell_2} - 1}{E_2F_2\beta(1 + e^{2\beta\ell_2})} \Big\} = \frac{V_1}{p^2} \tag{3.7}$$

Đặt

$$R_0(p) = R_0^{(1)}(p) + R_0^{(2)}(p) = a_1 \mathrm{cth} \frac{p\ell_1/a_1}{pE_1F_1} + \frac{e^{2\beta\ell_2} - 1}{E_2F_2\beta(1 + e^{2\beta\ell_2})}$$
$$R_0(p) \div R(t) = R^{(1)}(t) + R^{(2)}(t).$$

Theo [3] ta có nếu

$$R_o^{(1)}(p) \div R^{(1)}(t) = (a_1/E_1F_1)(2\|a_1t/2\ell_1\| + 1) \tag{3.8}$$

Ta có thể viết

$$R_0^{(2)}(p) = \frac{1 - e^{-2\beta\ell_2}}{E_2F_2\beta(1 + e^{-2\beta\ell_2})} = \frac{1}{E_2F_2}\Big[\frac{1}{\beta} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{e^{-2n\beta\ell_2}}{\beta}\Big] \tag{3.9}$$

Mặt khác:

$$\frac{1}{\beta} = \frac{a_2}{\sqrt{p^2 + \lambda p + k}} = \frac{a_2}{\sqrt{(p + \lambda/2)^2 - (\lambda^2 - 4k)/4}}$$

Vậy:

$$\frac{1}{\beta} \div a_2 e^{-\lambda t/2} I_0(\lambda_2 t/2)$$

$$\frac{e^{-2n\beta\ell_2}}{\beta} \div a_2 e^{-\lambda t/2} I_0\Big[\frac{\lambda_2}{2}\sqrt{t^2 - (2n\ell_2/a_2)^2}\Big]\eta[t - (2n\ell_2/a_2)].$$

Thay các kết quả trên vào (3.9) ta có:

$$R_0^{(2)}(p) \div R^{(2)}(t) = \frac{a_2}{E_2F_2}\Big\{ e^{-\lambda t/2} I_0(\lambda_2 t/2) + 2\sum_{n \geq 1}(-1)^n e^{-\lambda t/2} I_0\Big[\frac{\lambda_2}{2}\sqrt{t^2 - (2n\ell_2/a_2)^2}\Big]\eta[t - (2n\ell_2/a_2)]\Big\}.$$

Đặt $N = \|a_2t/2\ell_2\|$ và lưu ý $a_2t/2\ell_2 \geq N \to t \geq 2N\ell_2/a_2 \geq 2n\ell_2/a_2$. Từ đó ta có thể viết

$$R^{(2)}(t) = \frac{2a_2}{E_2F_2}\Big\{ \sum_{n=0}^{N}(-1)^n e^{-\lambda t/2} I_0\Big[\frac{\lambda_2}{2}\sqrt{t^2 - (2n\ell_2/a_2)^2}\Big] - (e^{-\lambda t/2}/2) I_0(\lambda_2 t/2)\Big\}. \tag{3.10}$$

Từ (3.7) ta có

$$Q_0(p)R_0(p) = V_1/p^2$$
$$V_1/p^2 \div V_1 t$$

Theo định lý hàm nhân ta có:

$$\int_0^t Q(\tau)R^{(1)}(t-\tau)d\tau + \int_0^t Q(\tau)R^{(2)}(t-\tau)d\tau = V_1 t \tag{3.11}$$

Ký hiệu

$$H^{(1)}(t) = \int_0^t Q(\tau)R^{(1)}(t-\tau)d\tau, \qquad H^{(2)}(t) = \int_0^t Q(\tau)R^{(2)}(t-\tau)d\tau$$

Đạo hàm hai vế của (3.11) theo thời gian ta có:

$$\dot{H}^{(1)}(t) + \dot{H}^{(2)}(t) = V_1 \tag{3.12}$$

Ta ký hiệu T_1 và T_2 là chu kỳ của thanh thứ nhất và thứ hai với $T_1 = 2\ell_1/a_1$ và $T_2 = 2\ell_2/a_2$. Bây giờ ta xác định hàm $Q(t)$.

a. Xét ở chu kỳ thứ nhất của cả hai thanh: $t \in [0, T_1) \cap [0, T_2)$

$$0 \le t < T_1 \to 0 \le t - \tau < T_1 \quad \text{với} \quad 0 \le \tau \le t.$$

Từ (3.8) ta có:

$$R^{(1)}(t-\tau) = a_1/E_1F_1, \quad \text{do đó} \quad \dot{H}^{(1)}(t) = (a_1/E_1F_1)Q(t) \tag{3.13a}$$

Ký hiệu $R_s^{(2)}(t) = R^{(2)}(t)$ khi $(s-1)T_2 \le t \le sT_2$ với $s = 1, 2, 3, \ldots$
Khi $0 \le t < T_2$ thì $0 \le t - \tau < T_2$. Từ (3.10) ta có:

$$R_1^{(2)}(t-\tau) = \frac{a_2}{E_2F_2} e^{-\lambda(t-\tau)/2} I_0[\lambda_2(t-\tau)/2]. \tag{3.13b}$$

Từ đó:

$$\dot{H}^{(2)}(t) = \frac{a_2}{E_2F_2}Q(t) + \int_0^t Q(\tau)\frac{a_2}{2E_2F_2}e^{-\lambda(t-\tau)/2}\Big\{\lambda_2 I_1[\lambda_2(t-\tau)/2] - \lambda I_0[\lambda_2(t-\tau)/2]\Big\}d\tau \tag{3.14}$$

Thay các kết quả trên vào (3.12) ta có phương trình:

$$Q(t) + \alpha\int_0^t Q(\tau)K(t-\tau)d\tau = 2\alpha V_1 \tag{3.15}$$

trong đó

$$\alpha = 1/\big\{2\big[(a_1/E_1F_1) + (a_2/E_2F_2)\big]\big\},$$

$$K(t-\tau) = \frac{a_2}{E_2F_2}e^{-\lambda(t-\tau)/2}\Big\{\lambda_2 I_1[\lambda_2(t-\tau)/2] - \lambda I_0[\lambda_2(t-\tau)/2]\Big\}$$

b. Xét ở chu kỳ thứ i của thanh thứ nhất và chu kỳ thứ j của thanh thứ hai

Tức là $t \in [(i-1)T_1, iT_1) \cap [(j-1)T_2, jT_2)$

* Ở chu kỳ thứ i của thanh thứ nhất tức là $(i-1)T_1 < t < iT_1$ với $i = 1, 2, 3, \dots$

Ký hiệu $H_i^{(1)}(t)$ là hàm $H^{(1)}(t)$ khi t ở trong khoảng thời gian này và từ đó ta có thể viết nó dưới dạng

$$H_i^{(1)}(t) = \int_0^{t-(i-1)T_1} Q(\tau)R^{(1)}(t-\tau)d\tau + \sum_{k=1}^{i-1} \int_{t-(i-k)T_1}^{t-(i-k-1)T_1} Q(\tau)R^{(1)}(t-\tau)d\tau$$

Từ (3.8) khi $0 < \tau < t-(i-1)T_1 \rightarrow (i-1)T_1 \le t-\tau < iT_1$, ta có:

$$R^{(1)}(t-\tau) = (2i-1)\frac{a_1}{E_1F_1}$$

Khi $t-(i-k)T_1 < \tau \le t-(i-k-1)T_1$ với $k = \overline{1,(i-1)}$ suy ra $(i-k-1)T_1 \le t-\tau < (i-k)T_1$. Vậy

$$R^{(1)}(t-\tau) = [2(i-k)-1]\frac{a_1}{E_1F_1}$$

Từ đó:

$$H_i^{(1)}(t) = \int_0^{t-(i-1)T_1} Q(\tau)(2i-1)\frac{a_1}{E_1F_1}d\tau + \sum_{k=1}^{i-1} \int_{t-(i-k)T_1}^{t-(i-k-1)T_1} Q(\tau)[2(i-k)-1]\frac{a_1}{E_1F_1}d\tau$$

Do đó

$$\dot{H}_i^{(1)}(t) = (2i-1)\frac{a_1}{E_1F_1}Q[t-(i-1)T_1] + \sum_{k=1}^{i-1}[2(i-k)-1]\frac{a_1}{E_1F_1}Q[t-(i-k-1)T_1$$
$$-\sum_{k=1}^{i-1}[2(i-k)-1]\frac{a_1}{E_1F_1}Q(t-(i-k)T_1].$$

Sau khi tính toán và rút gọn ta có:

$$\dot{H}_i^{(1)}(t) = \frac{a_1}{E_1F_1}Q(t) + \frac{2a_1}{E_1F_1}\sum_{k=1}^{i-1}Q[t-(i-k)T_1]. \tag{3.16}$$

* Ở chu kỳ thứ j của thanh thứ hai tức là: $(j-1)T_2 < t < jT_2$ với $j = 2, 3, 4, \dots$

Ký hiệu $H_j^{(2)}(t)$ là hàm $H^{(2)}(t)$ khi t ở trong khoảng thời gian này.

Lý luận tương tự như trên ta có:

$$H_j^{(2)}(t) = \int_0^{t-(j-1)T_2} Q(\tau)R_j^{(2)}(t-\tau)d\tau + \sum_{k=1}^{j-1} \int_{t-(j-k)T_2}^{t-(j-k-1)T_2} Q(\tau)R_{j-k}^{(2)}(t-\tau)d\tau \tag{3.17}$$

trong đó từ (3.10) ta có:

$$R_j^{(2)}(t-\tau) = \frac{2a_2}{E_2F_2}\sum_{m=0}^{j-1}(-1)^m e^{-\lambda(t-\tau)/2} I_0\Big[\frac{\lambda_2}{2}\sqrt{(t-\tau)^2-(2m\ell_2/a_2)^2}\Big]$$
$$-\frac{a_2}{E_2F_2}e^{-\lambda(t-\tau)/2}I_0[\lambda_2(t-\tau)/2]. \tag{3.18}$$

$$R^{(2)}_{j-k}(t-\tau)=\frac{2a_2}{E_2F_2}\sum_{n=0}^{j-k-1}(-1)^n e^{-\lambda(t-\tau)/2}I_0\left[\frac{\lambda_2}{2}\sqrt{(t-\tau)^2-(2nI_2/a_2)^2}\right]$$
$$-\frac{a_2}{E_2F_2}e^{-\lambda(t-\tau)/2}I_0[\lambda_2(t-\tau)/2]. \tag{3.19}$$

Từ đó:

$$\begin{aligned}\dot{H}^{(2)}_j(t)=&Q[t-(j-1)T_2]R^{(2)}_j[(j-1)T_2]\\ &+\int_0^{t-(j-1)T_2}Q(\tau)\dot{R}^{(2)}_j(t-\tau)d\tau+\sum_{k=1}^{j-1}Q[t-(j-1)T_2]R^{(2)}_{j-k}[(j-k-1)T_2]\\ &-\sum_{k=1}^{j-1}Q[t-(j-k)T_2]R^{(2)}_{j-k}[(j-k)T_2-0]+\sum_{k=1}^{j-1}\int_{t-(j-k)T_2}^{t-(j-k-1)T_2}Q(\tau)\dot{R}^{(2)}_{j-k}(t-\tau)d\tau\end{aligned} \tag{3.20}$$

Biến đổi lần lượt các số hạng của (3.20) và rút gọn ta có:

$$\dot{H}^{(2)}_j=\frac{a_2}{E_2F_2}Q(t)+\int_{(j-1)T_2}^{t}Q(\tau)\dot{R}^{(2)}_1(t-\tau)d\tau+\sum_{k=1}^{j-2}\int_{t-(j-k)T_2}^{t-(j-k-1)T_2}Q(\tau)\dot{R}^{(2)}_{j-k}(t-\tau)d\tau$$
$$+\int_{t-T_2}^{(j-1)T_2}Q(\tau)\dot{R}^{(2)}_1(t-\tau)d\tau+\frac{2a_2}{E_2F_2}\sum_{k=1}^{j-1}(-1)^{j-k}e^{-\lambda(j-k)T_2/2}Q[t-(j-k)T_2] \tag{3.21}$$

Sau khi thay (3.16) và (3.21) vào (3.12) ta có phương trình sau:

$$\frac{a_1}{E_1F_1}+\frac{a_2}{E_2F_2}Q(t)+\int_{(j-1)T_2}^{t}Q(\tau)\dot{R}^{(2)}_1(t-\tau)d\tau=$$
$$=V_1-\frac{2a_1}{E_1F_1}\sum_{k=1}^{j-1}Q[t-(i-k)T_1]-\frac{2a_2}{E_2F_2}\sum_{k=1}^{j-1}(-1)^{j-k}e^{-\lambda(j-k)T_2/2}Q[t-(j-k)T_2]$$
$$-\sum_{k-1}^{j-2}\int_{t-(j-k)T_2}^{t-(j-k-1)T_2}Q(\tau)\dot{R}^{(2)}_{j-k}(t_\tau)d\tau-\int_{t-T_2}^{(j-1)T_2}Q(\tau)\dot{R}^{(2)}_1(t-\tau)d\tau \tag{3.22}$$

Từ (3.13b) ta có:

$$\dot{R}^{(2)}_1(t-\tau)=\frac{a_2}{2E_2F_2}e^{-\lambda(t-\tau)/2}\Big\{\lambda_2I_1[\lambda_2(t-\tau)/2]-\lambda I_0[\lambda_2(t-\tau)/2]\Big\}$$

Từ (3.22) có thể viết dưới dạng

$$Q(t)+\alpha\int_{(j-1)T_2}^{t}Q(\tau)K(t-\tau)d\tau=2\alpha V_1-f_{ij}(t) \tag{3.23}$$

trong đó:

$$f_{ij}(t)=\Big\{\frac{2a_1}{E_1F_1}\sum_{k=1}^{i-1}Q[t-(i-k)T_1]+\frac{2a_2}{E_2F_2}\sum_{k=1}^{j-1}(-1)^{j-k}e^{-\lambda(j-k)T_2/2}Q[t-(j-k)T_2]$$
$$+\sum_{k=1}^{j-2}\int_{t-(j-k)T_2}^{t-(j-k-1)T_2}Q(\tau)\dot{R}^{(2)}_{j-k}(t-\tau)d\tau+\int_{t-T_2}^{(j-1)T_2}Q(\tau)\dot{R}^{(2)}_1(t-\tau)d\tau\Big\}2\alpha$$

Hàm $f_{ij}(t)$ là hàm đã biết của thời gian t, do hàm $Q(t)$ đã được xác định từ các chu kỳ trước chu kỳ thứ i của thanh thứ nhất và trước chu kỳ thứ j của thanh thứ hai.

Vậy các phương trình (3.15) và (3.23) là các phương trình tích phân Voltera loại 2, nghiệm có thể tìm được bằng cách lấp các dãy hàm

$$\{Q_n^{(ij)}(t)\} \to Q^{(ij)}(t).$$

Trong đó hàm $Q^{(ij)}(t)$ là hàm $Q(t)$ xác định ở chu kỳ thứ i của thanh thứ nhất và ở chu kỳ thứ j của thanh thứ hai. Cụ thể là

$$\left.\begin{aligned} Q_0^{(11)} &= 2\alpha V_1 \\ Q_1^{(11)} &= 2\alpha V_1 - \alpha \int_0^t K(t-\tau) Q_0^{(11)}(\tau)d\tau \\ &\dots\ \dots \\ Q_n^{(11)} &= 2\alpha V_1 - \alpha \int_0^t K(t-\tau) Q_{n_1}^{(11)}(\tau)d\tau \end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

Khi $i \geq 2$ và $j \geq 2$ dãy hàm $\{Q_n^{(ij)}(t)\}$ sẽ là :

$$\left.\begin{aligned} Q_0^{(ij)} &= 2\alpha V_1 - f_{ij}(t) \\ Q_1^{(ij)} &= 2\alpha V_1 - f_{ij}(t) - \alpha \int_{(j-1)T_2}^t K(t-\tau) Q_0^{(ij)}(\tau)d\tau \\ &\dots\ \dots \\ Q_n^{(ij)} &= 2\alpha V_1 - f_{ij}(t) - \alpha \int_{(j-1)T_2}^t K(t-\tau) Q_{n-1}^{(ij)}(\tau)d\tau \end{aligned}\right\} \tag{3.25}$$

Sau khi tìm được $Q(t)$ từ (3.24) và (3.25), ta thay vào (3.3) và (3.6) thì xác định được dịch chuyển $u_1(t,x)$ và $u_2(t,x)$. Từ đó ta tìm được trường ứng suất và trường vận tốc trong các thanh, lực nén va chạm và thời gian va chạm của hai thanh.

Các trường hợp sau cách giải tương tự như trên và cầu lưu ý

Trường hợp 2. Nếu $\lambda_2 - 4k < 0$, hàm nhân ở các phương trình Volterra (3.15), (3.23) sẽ là:

$$K(t-\tau) = -\frac{a_2}{E_2F_2}\Big\{\lambda_2 J_1[\Lambda_2(t-\tau)/2] - \lambda J_0[\lambda_2(t-\tau)/2]\Big\}$$

Trong các biểu thức (3.6), (3.13b) và (3.18) hàm $I_0(.)$ được thay bằng hàm $J_0(.)$.

Trường hợp 3. Nếu $\lambda_2 - 4k = 0$, biểu thức (3.6) sẽ là:

$$\begin{aligned} u_2(x,t) = \frac{a_2}{E_2F_2}\sum_{n=0}^{N_1}(-1)^n \int_{[(x-\ell_1)+2a\ell_2]/a_2}^{t} Q(t-\tau)e^{-\lambda\tau/2}d\tau \\ + \frac{a_2}{E_2F_2}\sum_{k=1}^{N_2}(-1)^k \int_{[2k\ell_2-(x-\ell_1)]/a_2}^{t} Q(t-\tau)e^{-\lambda\tau/2}d\tau. \end{aligned}$$

Các biểu thức (3.13b) và (3.18) sẽ được thay tương ứng

$$R_1^{(2)}(t-\tau) = \frac{a_2}{E_2F_2}e^{-\lambda(t-\tau)/2}, \qquad R_j^{(2)}(t-\tau) = (-1)^{j-1}\frac{a_2}{E_2F_2}e^{-\lambda(t-\tau)/2}$$

và hàm nhân của các phương trình Voltera (3.15) và (3.23) sẽ là:

$$K(t-\tau) = -\frac{a_2}{E_2F_2}\lambda e^{-\lambda(t-\tau)/2}$$

4. KẾT LUẬN

Nội dung bài báo này tác giả đã giải quyết trọn vẹn bài toán về va chạm dọc của hai thanh đàn hồi với thanh thứ hai chịu lực cản đàn nhớt ở mặt bên và tựa trên nền cứng.

Về mặt kỹ thuật đây là mô hình bài toán va chạm của búa vào cọc có kể đến lực cản ở mặt bên và đáy cọc gặp chướng ngại vật.

Công trình được hoàn thành với sự hỗ trợ tài chính của Chương trình nghiên cứu cơ bản trong lĩnh vực Khoa học tự nhiên

Địa chỉ:
Trường đại học Thủy lợi

Nhận ngày 2/8/1995

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Đăng Tộ, Nguyễn Hùng Sơn. Va chạm dọc của hai thanh đàn hồi có kể lực các đàn nhớt ở mặt bên thanh thứ hai bán vô hạn. Tuyển tập hội nghị khoa học công nghệ kết cấu xây dựng lần thứ III - Hà Nội 11/1994.
2. Nguyễn Thúc An, Phó Đức Anh, Nguyễn đăng Tộ, Nguyễn Hùng Sơn. Va chạm dọc của hai thanh đàn hồi với lực cản nhớt ở mặt bên thanh thứ hai. Tc Cơ học số 2, 1995.
3. Беймен Г., Эрдейн Д. Таблицы интегральных преобразований. Наука, М., 1969.

SUMMARY

LONGITUDINAL SHOCK OF TWO ELASTIC BARS WITH THE 2^{nd} BAR BASES ON RIGID FOUNDATION AND MEETS VISCO-ELASTIC RESISTANCE ON SIDE FACE

In this paper authors have studied problem of longitudinal shock of two elastic bars with more general model [1, 2].

Technically the model of this problem similar to driving pile, where the pile bases on rigid foundation and meets visco-elastic resistance of foundation on side face of the pile.