Tạp chí Cơ học Journal of Mechanics, NCNST of Vietnam T. XVIII, 1996, No 3 (8 - 18)

CỘNG HƯỞNG CƠ BẢN Ở MỘT HỆ VANDERPOL MỞ RỘNG

NGUYỄN VĂN ĐÌNH - TRẦN KIM CHI

Hệ dao động Vanderpol là hệ kinh điển, một dạng mở rộng của nó được khảo sát trong [1]. Nhiều chế độ cộng hưởng ở hệ này đã được nghiên cứu, nhưng đều ở tình trạng cộng hưởng đúng. Dưới đây, hạn chế ở trường hợp cộng hưởng cơ bản, hệ trên được xét trên toàn vùng cộng hưởng. Phương pháp trung bình [2] ở xấp xỉ thứ nhất được sử dụng, các dạng đường biên - tần được phân biệt theo các điểm kỳ dị [3].

§1. HỆ KHẢO SÁT - CÁC PHƯƠNG TRÌNH XÁC ĐỊNH DAO ĐỘNG DỪNG

Cho hệ dao động mô tả bởi phương trình vi phân:

$$\ddot{x} + x = \varepsilon\Big\{1 - (x + q\cos\omega t)^2\Big\}\dot{x}, \tag{1.1}$$

trong đó $q > 0$, các ký hiệu khác có ý nghĩa như trong [1]. Xét vùng cộng hưởng cơ bản, đặt $\omega^2 = 1 + \varepsilon\omega\Delta$ và viết (1.1) dưới dạng:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon\Big\{\omega\Delta x + (1 - (x + q\cos\omega t)^2)\dot{x}\Big\}. \tag{1.2}$$

Theo phương pháp trung bình, chuyển về biến biên độ và pha biến thiên chậm (a, θ), chúng ta đặt

$$x = a\cos\psi, \quad \dot{x} = -\omega a\sin\psi, \quad \psi = \omega t + \theta, \tag{1.3}$$

và lập hệ phương trình vi phân trung bình:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{\varepsilon a}{2}\Big\{\frac{1}{2}qa\cos\theta - \frac{1}{4}q^2\cos 2\theta + \Big(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}q^2 - 1\Big)\Big\}, \\ \dot{\theta} &= -\frac{\varepsilon}{2}\Big\{\frac{1}{2}qa\sin\theta + \frac{1}{4}q^2\sin 2\theta + \Delta\Big\}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Vẫn dùng (a, θ) để ký hiệu biên độ và pha hằng của dao động dừng, chúng được xác định bởi hai phương trình

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{2}qa\cos\theta - \frac{1}{4}q^2\cos 2\theta + \Big(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}q^2 - 1\Big) = 0, \\ f_2 &= \frac{1}{2}qa\sin\theta + \frac{1}{4}q^2\sin 2\theta + \Delta = 0, \end{aligned} \tag{1.5}$$

tương đương với

$$\begin{aligned} f_3 &= f_1\sin\theta + f_2\cos\theta = \Big(\frac{1}{4}a^2 + \frac{3}{4}q^2 - 1\Big)\sin\theta + \Delta\cos\theta + \frac{1}{2}qa\sin 2\theta = 0, \\ f_4 &= f_1\cos\theta - f_2\sin\theta = -\Delta\sin\theta + \Big(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}q^2 - 1\Big)\cos\theta + \frac{1}{2}qa\cos 2\theta = 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Kết hợp hai hệ (1.5) và (1.6) sẽ lập được

$$f_5 = 2af_1 + qf_4 = -q\Delta\sin\theta + q\Big(\frac{5}{4}a^2 + \frac{1}{4}q^2 - 1\Big)\cos\theta + 2a\Big(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}q^2 - 1\Big) = 0,$$
$$f_6 = 2af_2 - qf_3 = q\Big(\frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{4}q^2 + 1\Big)\sin\theta - q\Delta\cos\theta + 2a\Delta = 0. \qquad (1.7)$$

Bằng cách biểu diễn f_5, f_6 qua f_1, f_2 có thể thấy hệ (1.7) chỉ tương đương với hệ thức (1.5) khi

$$4a^2 \neq q^2. \qquad (1.8)$$

Vì vậy, để tìm được đường biên tần $C : a^2 = a^2(\Delta)$ trên mặt $P(\Delta, a^2)$ cần giải
1) hệ (1.7) kèm điều kiện (1.8)
2) hệ (1.5) với

$$4a^2 = q^2. \qquad (1.9)$$

§2. BA NHÁNH CỦA ĐƯỜNG BIÊN TẦN

Với hằng q cho trước, đường biên - tần C sẽ gồm ba nhánh: hai nhánh không suy biến C_1 và suy biến C_2 [3] của hệ (1.7), (1.8) và nhánh C_3 của hệ (1.5), (1.9).

Xét hệ (1.7), (1.8). Theo ký hiệu trong [3], chúng ta có:

$$D_0 = \begin{vmatrix} -q\Delta & q\Big(\frac{5}{4}a^2 + \frac{1}{4}q^2 - 1\Big) \\ q\Big(\frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{4}q^2 + 1\Big) & -q\Delta \end{vmatrix} = q^2\Big\{\Delta^2 - \Big(\frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{4}q^2 + 1\Big)\Big(\frac{5}{4}a^2 + \frac{1}{4}q^2 - 1\Big)\Big\} \qquad (2.1)$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -2a\Big(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}q^2 - 1\Big) & q\Big(\frac{5}{4}a^2 + \frac{1}{4}q^2 - 1\Big) \\ -2a\Delta & -q\Delta \end{vmatrix} = 2aq\Delta\Big(\frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{4}q^2 - 2\Big), \qquad (2.2)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -q\Delta & -2a\Big(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}q^2 - 1\Big) \\ q\Big(\frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{4}q^2 + 1\Big) & -2a\Delta \end{vmatrix} = 2aq\Big\{\Delta^2 + \Big(\frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{4}q^2 + 1\Big)\Big(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}q^2 - 1\Big)\Big\} \qquad (2.3)$$

Nhánh không suy biến nằm trên miền $(P - M)$:

$$D_0 \neq 0, \qquad 4a^2 \neq q^2. \qquad (2.4)$$

Trên miền này, từ (1.7), có thể rút ra:

$$u = \sin\theta = \frac{D_1}{D_0}, \quad v = \cos\theta = \frac{D_2}{D_0} \qquad (2.5)$$

và hệ thức xác định C_1 là:

$$W_1(\Delta, a^2) = \frac{D_1^2}{D_0^2} + \frac{D_2^2}{D_0^2} - 1 = 0. \qquad (2.6)$$

Nhánh suy biến C_2 nằm trên miền M:

$$D_0 = 0, \qquad 4a^2 \neq q^2. \qquad (2.7)$$

Chú ý rằng hạng của D_0 là 1, nên tập $m \subset M$ thỏa mãn:

$$D_0 = 0, \quad D_1 = 0, \quad D_2 = 0, \quad 4a^2 \neq q^2. \qquad (2.8)$$

Kết quả giải (2.7) cho thấy tập m gồm ba điểm:

$$I: \Delta = 0,\ a^2 = q^2 - \frac{4}{3}\ , \text{ tồn tại khi } q^2 > \frac{4}{3}\ ,\ q^2 \neq \frac{16}{9}, \tag{2.9}$$

$$J_1, J_2:\ \Delta = \pm\frac{3\sqrt{3}}{8}\left(q^2 - \frac{16}{9}\right),\ a^2 = \frac{4}{3} - \frac{q^2}{2}\ , \text{ tồn tại khi } q^2 < \frac{8}{3},\ q^2 \neq \frac{16}{9}. \tag{2.10}$$

Với I, hệ lượng giác (1.7) trở thành:

$$q\cos\theta = -\sqrt{q^2 - \frac{4}{3}}, \quad O\sin\theta = 0 \tag{2.11}$$

và cho hai pha:

$$\theta = \pm\xi = \pm\arccos\left(\frac{-1}{q}\sqrt{q^2 - \frac{4}{3}}\right). \tag{2.12}$$

Vậy I là một điểm của nhánh C_2 kể từ khi $q^2 > \frac{4}{3}$ (nếu $q^2 = \frac{4}{3}$, điểm I trùng gốc tọa độ).

Với J_1, J_2, hệ lượng giác (1.7) quy về:

$$\cos(\theta - \alpha_{1,2}) = \frac{1}{q}\sqrt{\frac{4}{3} - \frac{q^2}{2}}, \tag{2.13}$$

với $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$, $\alpha_2 = -\frac{\pi}{3}$ tương ứng J_1, J_2.

Điều kiện để phương trình lượng giác (2.13) có nghiệm là:

$$\frac{8}{3} > q^2 \geq \frac{8}{9} \tag{2.14}$$

và cho bốn pha:

$$\theta_{1,2} = \alpha_{1,2} \pm \eta = \alpha_{1,2} \pm h\text{arccos}\,\frac{1}{q}\sqrt{\frac{4}{3} - \frac{q^2}{2}}\ . \tag{2.15}$$

Vậy J_1, J_2 là hai điểm khác của nhánh C_2 khi $\frac{8}{9} \leq q^2 < \frac{8}{3}$ (nếu $0 < q^2 < \frac{8}{9}$, hai điểm J_1, J_2 tồn tại nhưng không thuộc C_2; nếu $q^2 = \frac{8}{3}$, hai điểm J_1 và J_2 nằm trên trục $a^2 = 0$).

Cả hai nhánh C_1, C_2 đều có thể tìm được từ hệ thức:

$$W_{1,2}(\Delta, a^2) = D_1^2 + D_2^2 - D_0^2 = 0 \quad (4a^2 \neq q^2), \tag{2.16}$$

nhưng để có đúng C_1, C_2 phải loại khỏi (2.15) những điểm thỏa mãn (2.7) nhưng không thỏa mãn điều kiện có nghiệm của hệ lượng giác (1.7):

$$\begin{aligned} &q^2\Delta + q^2\left(\frac{5}{4}a^2 + \frac{1}{4}q^2 - 1\right)^2 \geq 4a^2\left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}q^2 - 1\right)^2, \\ &q^2\left(\frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{4}q^2 + 1\right)^2 + q^2\Delta^2 \geq 4a^2\Delta^2. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Như đã biết, ba điểm I, J_1, J_2 là những điểm kỳ dị. Có thể chứng minh: I là điểm nút; J_1 và J_2 là những điểm cô lập (không thuộc C_2) khi $0 < q^2 < \frac{8}{9}$, là điểm lùi khi $q^2 = \frac{8}{9}$, là điểm nút khi $\frac{8}{9} < q^2 \neq \frac{16}{9} < \frac{8}{3}$ (khi $q^2 = \frac{4}{3}$, điểm I là nút có một tiếp tuyến; khi $q^2 = \frac{8}{3}$, hai điểm J_1 và

J_2 là điểm lùi; khi $q^2 = \dfrac{16}{9}$, như sẽ thấy dưới đây, ba điểm I, J_1, J_2 trùng nhau và là điểm nút bội với ba tiếp tuyến).

Xét nhánh cuối cùng C_3 với hằng $4a^2 = q^2$; khi đó hệ (1.5) trở thành

$$\begin{aligned} &a^2\cos\theta - a^2\cos 2\theta = \left(1 - \frac{9a^2}{4}\right), \\ &a^2\sin\theta + a^2\sin 2\theta = -\Delta. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Kết quả giải hệ này cho các nghiệm:
- với $\Delta = 0$ có

$$\theta = 0, \quad \theta = \pm\frac{2\pi}{3}, \quad 4a^2 = q^2 = \frac{16}{9}, \tag{2.19}$$

$$\theta = \pi, \quad 4a^2 = q^2 = 16. \tag{2.20}$$

- với $\Delta \neq 0$ có

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{9a^2}{4} - 1\right), \tag{2.21}$$

$$W_3(\Delta, a^2) = \Delta^4 + 2A(a^2)\Delta^2 + B(a^2) = 0, \tag{2.22}$$

trong đó các hệ số hằng

$$\begin{aligned} A(a^2) &= \frac{1}{16}(9a^2 - 4)(21a^2 - 4), \\ B(a^2) &= \frac{1}{16}\left(1 - \frac{9a^2}{4}\right)^2(9a^2 - 4)(a^2 - 4), \end{aligned} \tag{2.23}$$

(các điểm (2.19) là vị trí tại đó I, J_1, J_2 trùng nhau nhưng bị loại khỏi C_2 vì thỏa mãn điều kiện $4a^2 = q^2$)

Chú ý rằng các pha (2.20) (2.21) có thể tìm được từ (2.5).

§3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG BIÊN TẦN. CÁC DẠNG ĐƯỜNG BIÊN TẦN

Có thể lập được phương trình đường biên tần chung cho cả ba nhánh C_1, C_2, C_3. Thực vậy, (2.16) là trùng phương theo Δ với các hệ số triệt tiêu khi $4a^2 = q^2$ nên có thể viết dưới dạng:

$$W_{1,2}(\Delta, a^2) = q^2(4a^2 - q^2)W(\Delta, a^2) = 0, \tag{3.1}$$

trong đó:

$$\begin{aligned} W(\Delta, a^2) &= \Delta^4 + 2A(a^2, q^2)\Delta^2 + B(a^2.q^2), \\ A(a^2, q^2) &= \frac{1}{16}\left\{21a^4 + (30q^2 - 56)a^2 + (3q^4 - 16q^2 + 16)\right\}, \\ B(a^2, q^2) &= \frac{1}{16}\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{3}{4}q^2 + 1\right)^2\left\{a^4 - (2q^2 + 8)a^2 + (q^2 - 4)^2\right\}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Phương trình của cả ba nhánh đường biên tần là:

$$W(\Delta, a^2) = 0. \tag{3.3}$$

Thực vậy, hai nhánh C_1 và C_2 thỏa mãn (2.15) với $4a^2 \neq q^2$ nên thỏa mãn (3.3). Nếu $4a^2 = q^2$, chúng ta có

$$A(a^2, q^2 = 4a^2) = A(a^2),$$
$$B(a^2, q^2 = 4a^2) = B(a^2), \tag{3.4}$$

nên $W(\Delta, a^2)$ trùng với $W_3(\Delta, a^2)$ và do đó C_3 cũng thỏa mãn (3.3). Với (3.3), các điểm kỳ dị cũng có thể được xác định. Thực vậy:

$$\frac{\partial W_{1,2}}{\partial \Delta} = q^2(4a^2 - q^2)\frac{\partial W}{\partial \Delta},$$
$$\frac{\partial W_{1,2}}{\partial a^2} = 4q^2 W + q^2(4a^2 - q^2)\frac{\partial W}{\partial a^2} = q^2(4a^2 - q^2)\frac{\partial W}{\partial a^2}. \tag{3.5}$$

Nếu $4a^2 \neq q^2$ các đạo hàm riêng W_{12} và W đồng thời triệt tiêu nên các điểm kỳ dị I, J, K tìm được ở §2 cũng tìm được nhờ (3.3).

Nếu $4a^2 = q^2$, điểm kỳ dị thỏa mãn:

$$W\left(\Delta, a^2 = \frac{q^2}{4}\right) = \Delta^4 + 2A(a^2)\Delta^2 + B(a^2) = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial \Delta} W\left(\Delta, a^2 = \frac{q^2}{4}\right) = 4\Delta\left\{\Delta^2 + A(a^2)\right\} = 0, \tag{3.6}$$
$$\frac{\partial}{\partial a^2} W\left(\Delta, a^2 = \frac{q^2}{4}\right) = 2\Delta^2\frac{\partial \Delta}{\partial a^2} + \frac{\partial B}{\partial a^2} = 0,$$

trong đó

$$\frac{\partial A}{\partial a^2} = \frac{1}{8}(81a^2 - 28), \qquad \frac{\partial B}{\partial a^2} = -\frac{81}{8}\left(a^2 - \frac{4}{3}\right)\left(a^2 - \frac{4}{9}\right)^2. \tag{3.7}$$

Kết quả tính cho thấy có một điểm kỳ dị $\Delta = 0$, $4a^2 = q^2 = \dfrac{16}{4}$; đó chính là vị trí (2.19) tại đó ba điểm I, J_1, J_2 trùng nhau.

Đến đây có thể liệt kê các dạng khác nhau của đường biên tần và sự chuyển tiếp của chúng khi tăng q. Những đường này là kết quả giải trên máy tính phương trình (2.16):

- nếu $q = 0$ hệ Vanderpol kinh điển có dao động dừng biểu diễn bởi điểm trên trục tung với $a^2 = 4$

- nếu $0 < q^2 < \dfrac{8}{9}$ trên mặt $(\Delta, A = a^2)$, đường biên tần C có dạng cho trên hình 1 (vẽ với $q = 0,8$), một đường kín bao quanh điểm $(\Delta = 0, a^2 = 4)$ và không có điểm kỳ dị nào (I chưa xuất hiện, J_1 và J_2 là điểm cô lập nằm trên hyperbol $D_0 = 0$ biểu diễn bằng đường chấm nhỏ - không thuộc đường biên tần)

- nếu $q^2 = \dfrac{8}{9}$ ($q \approx 0,94$) đường biên tần C cho trên hình 2 có hai điểm lùi J_1, J_2

- nếu $\dfrac{8}{9} < q^2 < \dfrac{4}{3}$, dạng của C cho trên hình 3 (vẽ với $q = 1,1$), có hai đường vòng thắt tại hai nút J_1, J_2

- nếu $q^2 = \dfrac{4}{3}$ ($q \approx 1,555$) đường C cho trên hình 4, vẫn có hai nút J_1, J_2 (nhưng có thêm nút I tại gốc tọa độ)

- nếu $\dfrac{4}{3} < q^2 < \dfrac{16}{9}$, dạng đường biên tần C cho trên hình 5 (vẽ với $q = 1,25$) có ba điểm nút I, J_1, J_2

- nếu $q^2 = \dfrac{16}{9}$ ($q \approx 1,33$), đường C cho trên hình 6, ba điểm nút I, J_1, J_2 trùng nhau tạo thành nút bội

- nếu $\dfrac{16}{9} < q^2 < \dfrac{8}{3}$, dạng đường C cho trên hình 7 (vẽ với $q = 1,45$) ba điểm nút tách rời nhau, nút I nằm cao hơn J_1, J_2

- nếu $q^2 = \frac{8}{9}$ ($q \approx 1,63$), đường C cho trên hình 8, nút I tiếp tục chuyển lên cao (hai điểm J_1, J_2 nằm trên trục Δ và trở thành điểm lùi)

- nếu $\frac{8}{3} < q^2 < 4$ dạng C cho trên hình 9 (vẽ với $q = 1,75$), chỉ còn nút I, có hai điểm tiếp xúc với trục Δ

- nếu $q^2 = 4$, đường C cho trên hình 10, một nút I, C tiếp xúc với trục Δ tại gốc

- nếu $q^2 > 9$ dạng C cho trên hình 11 (vẽ với $q = 2,8$), có một nút I, C nằm cao hơn trục Δ

§4. ĐIỀU KIỆN ỔN ĐỊNH

Để xét ổn định từ hệ (1.4), lập hệ biến phân và sau khi thay $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$ bởi biểu thức của chúng rút từ (1.5) chúng ta được

$$\begin{aligned}
\delta\dot{a} &= -\frac{\varepsilon a}{4}(q\cos\theta + a)\delta a + \frac{\varepsilon a}{4}(3qa\sin\theta + 4\Delta)\delta\theta,\\
\delta\dot{\theta} &= -\frac{\varepsilon}{4}(q\sin\theta)\delta a - \frac{\varepsilon}{4}(3qa\cos\theta + (a^2 + 2q^2 - 4))\delta\theta.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Phương trình đặc trưng là:

$$p^2 + \frac{\varepsilon}{2}H_1 p + H_2 = 0 \tag{4.2}$$

và điều kiện đủ để ổn định tiệm cận là:

$$H_1 = 2qa\cos\theta + (a^2 + q^2 - 2) > 0, \tag{4.3}$$

$$H_2 = (4a^2 + 2q^2 - 4)q\cos\theta + 4q\Delta\sin\theta + a(a^2 + 5q^2 - 4) > 0. \tag{4.4}$$

Trên nhánh không suy biến C_1, sau khi thay $\sin\theta$, $\cos\theta$ bởi (2.5) các điều kiện ổn định trở thành

$$H_1 = (5a^2 + q^2 - 2)\Delta^2 - \frac{1}{4}\Big(\frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{4}q^2 + 1\Big)\Big[a^4 - 2(q^2-1)a^2 + (q^4 - 6q^2 + 8)\Big] \gtrless 0 \tag{4.5}$$

$$H_2 = (21a^2 + 15q^2 - 28)\Delta^2 + \frac{1}{4}\Big(\frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{4}q^2 + 1\Big)\Big[3a^4 - (6q^2 + 16)a^2 + (3q^4 - 8q^2 + 16)\Big] \gtrless 0 \tag{4.6}$$

trong đó chiều > 0 (< 0) ứng miền $D > 0$ (< 0).

Điều kiện (4.6) thay được bởi điều kiện

$$\frac{\partial W(\Delta, a^2)}{\partial a^2} \gtrless 0. \tag{4.7}$$

Với nhánh C_2, chúng ta xét từng điểm I, J_1, J_2 theo (4.3), (4.4) với $I: \Delta = 0$, $a^2 = q^2 - \frac{4}{3}$, $\theta = \pm\xi$, điều kiện (4.3) không thỏa mãn nên I luôn không ổn định.

Với

$$J_1 : \Delta = \frac{3\sqrt{3}}{8}\Big(q^2 - \frac{16}{9}\Big), \quad a^2 = \frac{4}{3} - \frac{q^2}{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{3} + \eta = \frac{\pi}{3} \pm \arccos\frac{1}{q}\sqrt{\frac{4}{3} - \frac{q^2}{2}},$$

hai điều kiện ổn định trở thành

$$\frac{2}{3} \mp \frac{3}{2}\sqrt{\Big(\frac{8}{3} - q^2\Big)\Big(q^2 - \frac{8}{9}\Big)} > 0, \tag{4.8}$$

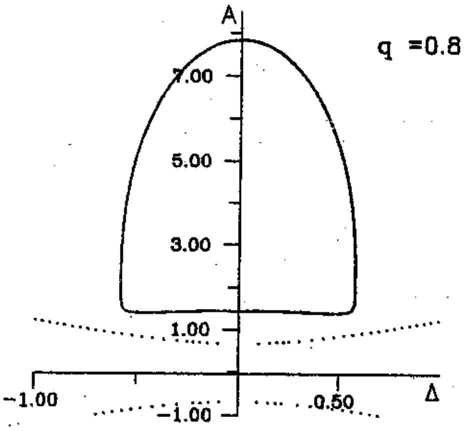


fig.1

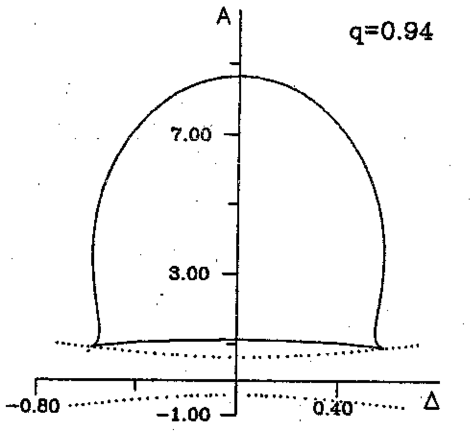


fig.2

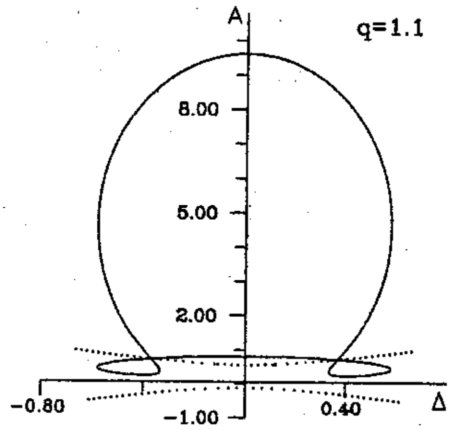


fig.3

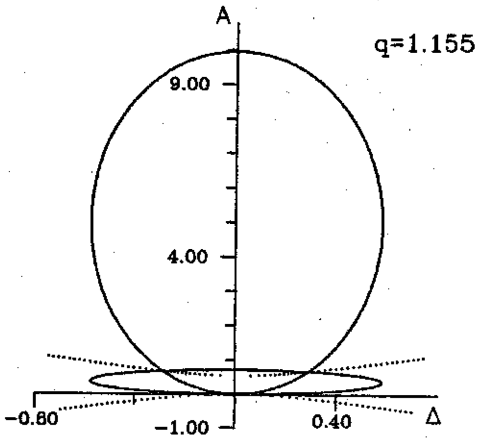


fig.4

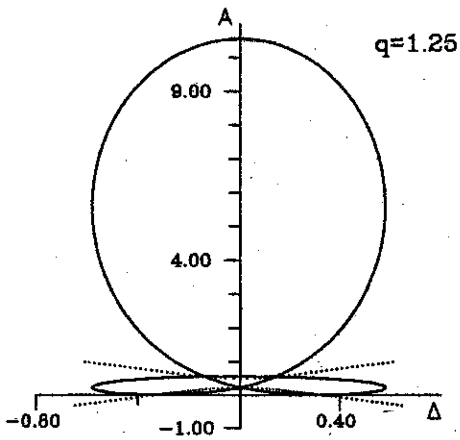


fig.5

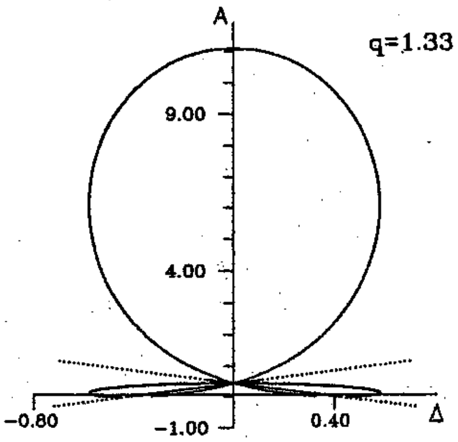


fig.6

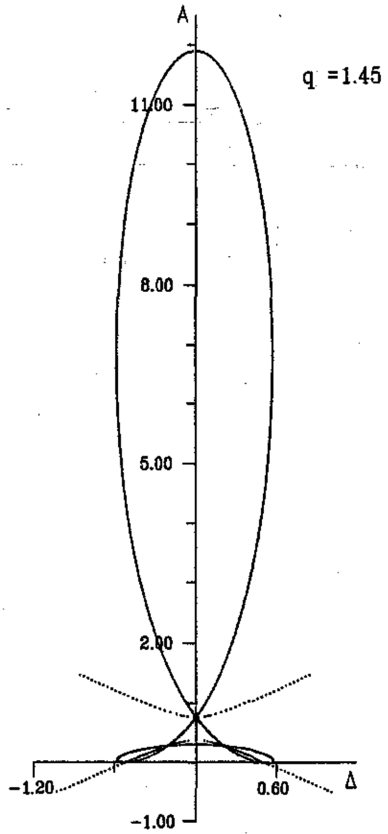


fig.7

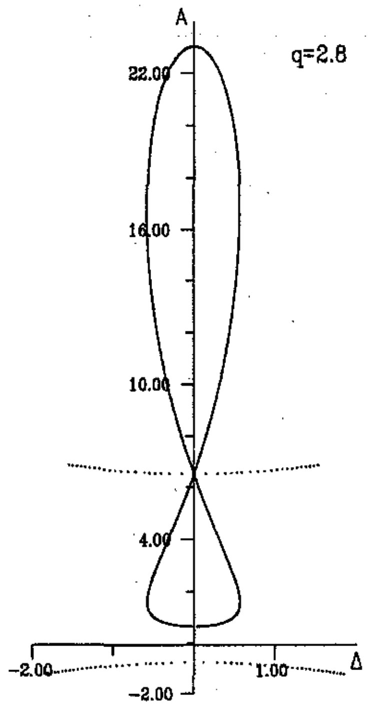


fig.11

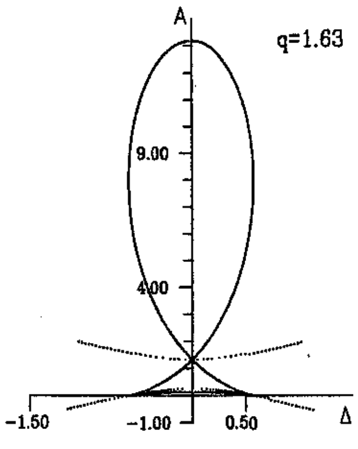


fig.8

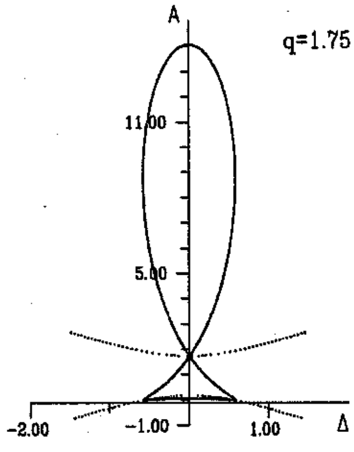


fig.9

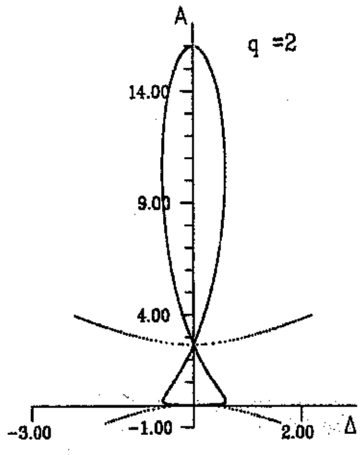


fig.10

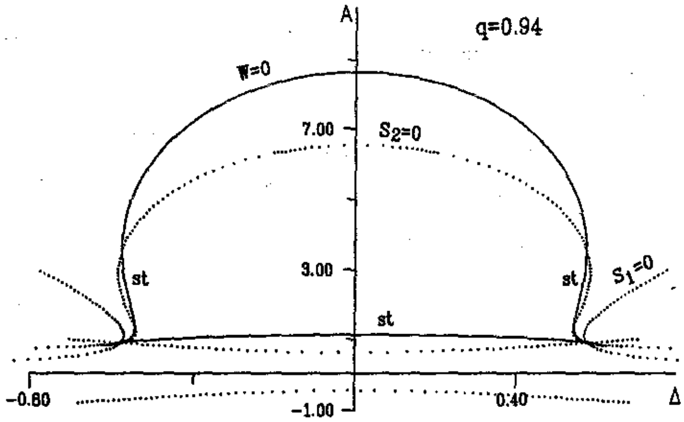


fig.2a

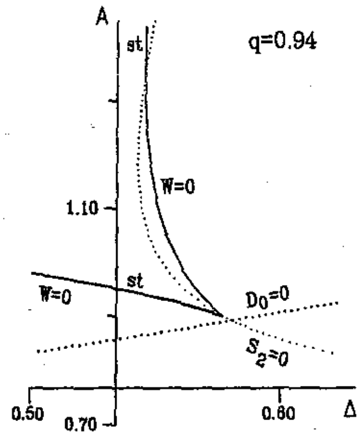


fig.2b

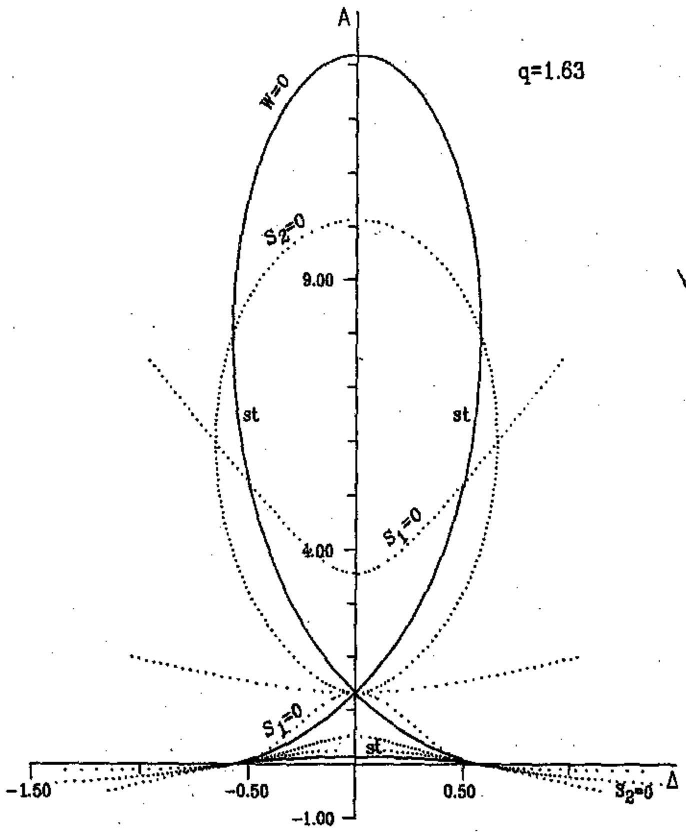


fig.8a

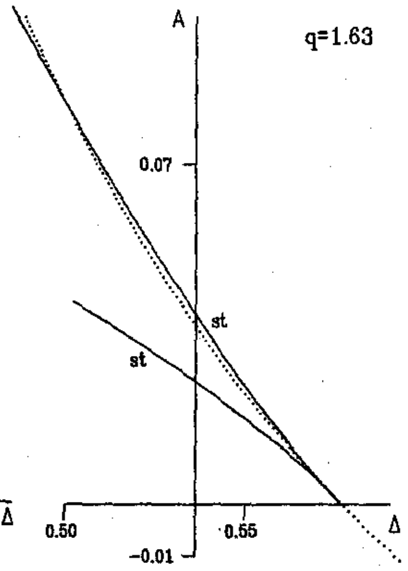
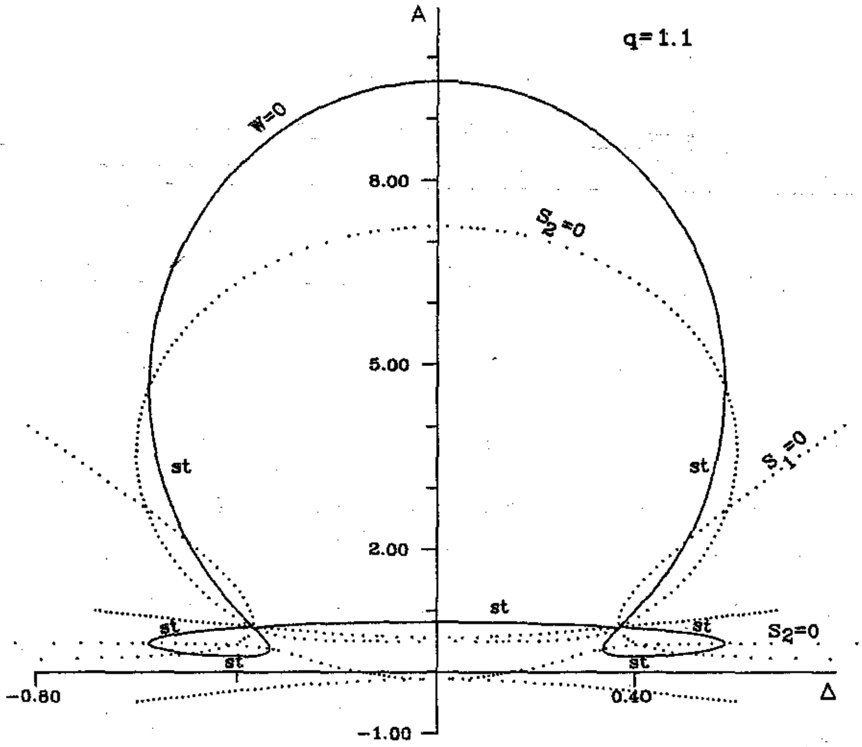
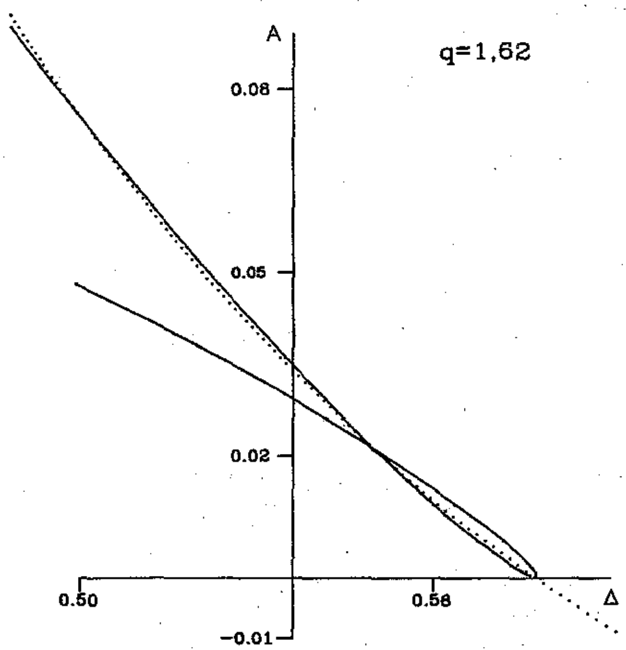


fig.8b



A
q= 1.1
W=0
8.00
S2=0
5.00
st
st
S1=0
2.00
st
st
st
S2=0
st
st
-0.80
0.40
Δ
-1.00

fig.3a



A
q=1,62
0.08
0.05
0.02
0.50
0.56
Δ
-0.01

fig.7*

$$3\left(q^2-\frac{8}{9}\right)\sqrt{\frac{8}{3}-q^2}\mp\left(\frac{8}{3}-q^2\right)\sqrt{q^2-\frac{8}{9}}>0 \tag{4.9}$$

Nếu $q^2 = \frac{8}{9}$ (J_1 là điểm lùi) vế trái (4.9) triệt tiêu không có kết luận về ổn định của J_1 ở xấp thứ nhất.

Nếu $\frac{8}{9} < q^2 < \frac{8}{3}$, điểm J_1 với $\theta = \frac{\pi}{3} - \eta$ luôn thỏa mãn (4.8), (4.9) nên luôn ổn định; điểm với $\theta = \frac{\pi}{3} + \eta$ chỉ ổn định khi $\frac{16+4\sqrt{3}}{9} < q^2 < \frac{8}{3}$.

Vấn đề ổn định của J_2 được khảo sát tương tự.

Với nhánh C_3, $q^2 = 4a^2$, điểm nút bội $\Delta = 0$, $4a^2 = q^2 = \frac{16}{9}$, pha $\theta = 0$ ổn định, hai pha $= \pm\frac{2\pi}{3}$ không ổn định. Các điểm (2.20) và (2.21), (2.22) có pha θ tính được theo (2.5) nên tính định được xác định theo (4.5), (4.6).

Để minh họa, các đoạn ổn định trên đường biên tần ở một số trường hợp được cho trên c hình 2a và 2b, 3a, 7*, 8a và 8b, 11 bởi nét liền đậm, đoạn không ổn định bởi nét liền mảnh ường -.-.- là ranh giới điều kiện (4.5), đường - - - - là ranh giới điều kiện (4.6), đường chấm ... hyperbol $D_0 = 0$) trong đó h.7* vẽ với $q = 1,62$ sát giá trị $q = \sqrt{\frac{8}{3}} \approx 1,63$ nhằm minh họa hai ạn ổn định bắt chéo tại nút J và tình trạng này được duy trì khi J trở thành điểm lùi trên trục khi $q^2 = \frac{8}{3}$.

KẾT LUẬN

Kết quả thu được cho biết quy luật cộng hưởng cơ bản ở hệ Vanderpon mở rộng. Các phương nh xác định chế độ dừng được biến đổi về dạng thích hợp. Các trường hợp suy biến với các ểm kỳ dị được phân tích chi tiết và giúp chúng ta phân biệt các dạng khác nhau của đường biên n. Các tính toán lý thuyết phù hợp với những kết quả giải trên máy tính.

Địa chỉ:
Viện Cơ học TT KHTN & CNQG

Nhận ngày 20/10/1995

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Mitropolski Yu. A., Nguyen Van Dao. Applied asymptotic methods in non-linear oscillations. Hanoi 1994.

Bogoliubov N. N., Mitropolski Yu. A. Asymptotic methods in theory of nonlinear oscillations, Moscow 1963.

Nguyen Van Dinh. Dao động dừng ở trường hợp suy biến. Tc Cơ học số 2, 1996.

SUMMARY

FUNDAMENTAL RESONANCE IN ONE GENERALIZED SYSTEM OF TYPE VANDERPOL

In the present paper, an oscillating system of type Vanderpol is considered. The fundamen- l resonance is examined, degenerated cases are analyzed in detail; singular points are used to stinguished various forms of the amplitude frequency curve.