Tạp chí Cơ học   Journal of Mechanics, NCNST of Vietnam T. XVIII, 1996, No 3 (1 - 7)

VỀ PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU KHẢ NĂNG ỔN ĐỊNH VÀ MẤT ỔN ĐỊNH NGHIỆM CỦA MỘT PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN PHI TUYẾN

NGUYỄN ĐĂNG BÍCH, NGUYỄN VÕ THÔNG

Khi nghiên cứu trạng thái mất ổn định khí động của các công trình cao và kết cấu mềm, người ta phân biệt hệ số cản kết cấu và hệ số cản khí động. Hiệu số giữa các hệ số cản tương ứng này là đại lượng dương thì phản ứng của kết cấu yếu dần theo thời gian và kết cấu trong trạng thái ổn định, hiệu số này là đại lượng âm thì phản ứng của kết cấu mạnh dần theo thời gian và kết cấu rơi vào trạng thái mất ổn định [1, 2]. Khẳng định như vậy có đúng cho mọi trường hợp không ? Bằng cách nào nghiên cứu được khả năng ổn định nghiệm của một phương trình vi phân phi tuyến, trong trường hợp không tìm được đến cùng nghiệm tường minh. Đó là điều nội dung bài báo này muốn đề cập.

1. PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG

Phương trình chuyển động của kết cấu có cản với giả thiết đơn giản hóa có thể viết dưới dạng:

$$M(\ddot{x} + \beta\omega\dot{x} + \omega^2 x) = f(x, \dot{x}) \tag{1.1}$$

M - khối lượng của đơn vị độ dài,
β - hệ số cản kết cấu,
ω - tần số dao động riêng,
$f(x, \dot{x})$ - lực khí động.
Trong bài toán này $f(x, \dot{x})$ không phụ thuộc hiển vào thời gian và là hàm của vị trí, vận tốc dao động của chính kết cấu.

2. PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG ỨNG VỚI DẠNG XÁC ĐỊNH CỦA LỰC KHÍ ĐỘNG

Ta xét lực khí động có dạng:

$$f(x, \dot{x}) = M\Big[\alpha\omega\dot{x} + (1 + a)\frac{\dot{x}^2}{x} + \frac{b}{\omega}\,\frac{\dot{x}^3}{x^2}\Big] \tag{2.1}$$

α - hệ số cản khí động,
a, b - hằng số.
Thay (2.1) vào (1.1) ta được:

$$\ddot{x} + \nu\omega\dot{x} + \omega^2 x = (1 + a)\frac{\dot{x}^2}{x} + \frac{b}{\omega}\,\frac{\dot{x}^3}{x^2} \tag{2.2}$$

ở đây $\nu = \beta - \alpha$

Vấn đề đặt ra là nghiên cứu khả năng ổn định và mất ổn định nghiệm của phương trình (2.2) phụ thuộc vào dấu của hệ số ν. Phương trình vi phân (2.2) là phương trình vi phân phi tuyến, để giải ta dùng phép biến đổi

$$y = \frac{x}{\dot{x}} \tag{2.3}$$

Với phép biến đổi (2.3) phương trình (2.2) được đưa về phương trình

$$y\dot{y} = \omega^2 y^3 + \nu\omega y^2 - ay - \frac{b}{\omega} \tag{2.4}$$

Phương trình (2.4) có thể phân ly biến số

$$\frac{ydy}{y^3 + \frac{\nu}{\omega}y^2 - \frac{a}{\omega^2}y - \frac{b}{\omega^3}} = \omega^2 dt \tag{2.5}$$

Để sử dụng được công thức nghiệm lượng giác của phương trình bậc 3 ta dùng phép biến đổi [3]

$$y = z - \frac{\nu}{3\omega} \tag{2.6}$$

Thay (2.6) vào (2.5) ta được

$$\frac{\left(z - \frac{\nu}{3\omega}\right)dz}{z^3 + pz + q} = \omega^2 dt \tag{2.7}$$

$$p = -\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{\nu^2}{3} + a\right) \tag{2.8}$$

$$q = \frac{1}{\omega^3}\left[2\left(\frac{\nu}{3}\right)^3 + a\frac{\nu}{3} - b\right] \tag{2.9}$$

$$Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = -\frac{1}{\omega^6}\left(\frac{a^2\nu^2}{4.27} + \frac{a^3}{27} + \frac{\nu^3 b}{27} + \frac{a\nu b}{6} - \frac{b^2}{4}\right) \tag{2.10}$$

Phương trình

$$z^3 + pz + q = 0 \tag{2.11}$$

có 3 nghiệm thực e_1, e_2, e_3 khi $Q < 0$

$$e_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\,\cos\frac{\varphi}{3} \tag{2.12}$$

$$e_{2,3} = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\,\cos\left(\frac{\varphi}{3} \pm \frac{\pi}{3}\right) \tag{2.13}$$

$$\cos\varphi = -\frac{q}{2\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \tag{2.14}$$

Các nghiệm này có tính chất:

$$e_3 < e_2 < 0 < e_1, \quad e_1 + e_2 + e_3 = 0 \quad \text{khi } q < 0 \tag{2.15}$$

$$e_3 < 0 < e_2 < e_1, \quad e_1 + e_2 + e_3 = 0 \quad \text{khi } q > 0 \tag{2.16}$$

$$e_2 = 0, \quad e_3 < 0 < e_1, \quad e_1 + e_3 = 0 \quad \text{khi } q = 0 \tag{2.17}$$

Trường hợp $Q < 0$ phương trình (2.7) có thể viết dưới dạng

$$\frac{\left(z - \frac{\nu}{3\omega}\right)dz}{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)} = \omega^2 dt \tag{2.18}$$

Tích phân phương trình (2.18) ta được

$$(z-e_1)^m(z-e_2)^n(z-e_3)^s = Ae^{-\omega^2 t} \tag{2.19}$$

A - hằng số tích phân

$$m = -\frac{e_1 - (\nu/3\omega)}{(e_1-e_2)(e_1-e_3)} \tag{2.20}$$

$$n = \frac{e_2 - (\nu/3\omega)}{(e_1-e_2)(e_2-e_3)} \tag{2.21}$$

$$s = -\frac{e_3 - (\nu/3\omega)}{(e_1-e_3)(e_2-e_3)} \tag{2.22}$$

Từ phương trình (2.19) không thể tìm được nghiệm $z = z(t)$ khi m, n, s nói chung là những số vô tỷ, vì vậy cũng không thể tìm được nghiệm x theo phương trình:

$$\frac{d}{dt}(\ln x) = \frac{\dot{x}}{x} = \frac{1}{y} = \frac{1}{z - (\nu/3\omega)} \tag{2.23}$$

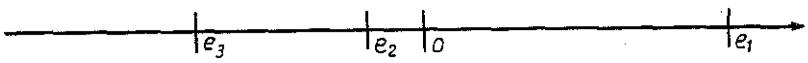
$$x = B\exp\left(\int \frac{dt}{z - (\nu/3\omega)}\right) \tag{2.24}$$

B - hằng số tích phân

Tuy nhiên từ (2.19), (2.23) vẫn cho phép nghiên cứu được khả năng ổn định và mất ổn định của nghiệm x khi $t \to \infty$

a) trường hợp $q < 0$, $\nu < 0$

Theo (2.15) ta có sự phân bố các nghiệm trên trục thực



Có thể có các khả năng:

- Khả năng 1

$$\frac{\nu}{3\omega} < e_3 < e_2 < 0 < e_1 \tag{2.25}$$

Dựa vào (2.20) ÷ (2.22) và từ (2.25) suy ra:

$$m < 0, \quad n > 0, \quad s < 0 \tag{2.26}$$

Trên cơ sở (2.19), (2.26) có thể kết luận

$$z \to e_2 \quad \text{khi} \quad t \to \infty$$

Kết hợp với (2.23) ta có

$$\frac{d}{dt}(\ln x) \to \frac{1}{e_2 - \frac{\nu}{3\omega}} > 0 \quad \text{khi} \quad t \to \infty \tag{2.27}$$

Như vậy là khi $\nu < 0$ và thỏa mãn (2.25) thì x tăng khi $t \to \infty$, kết cấu rơi vào tình trạng mất ổn định khí động

- Khả năng 2

$$e_3 < e_2 < \frac{\nu}{3\omega} < 0 < e_1 \tag{2.28}$$

Dựa vào (2.20) ÷ (2.22) và từ (2.28) suy ra:

$$m < 0, \quad n < 0, \quad s > 0 \tag{2.29}$$

Từ (2.19), (2.29) và (2.23) ta có

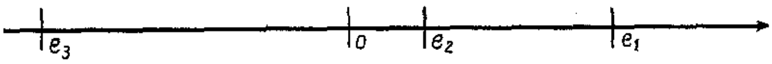
$$z \to e_3 \quad \text{khi} \quad t \to \infty$$

$$\frac{d}{dt}(\ln x) \to \frac{1}{e_3 - \frac{\nu}{3\omega}} < 0 \quad \text{khi} \quad t \to \infty \tag{2.30}$$

Như vậy là khi $\nu < 0$ và thỏa mãn (2.28) thì x giảm khi $t \to \infty$ kết cấu trong trạng thái ổn định. Kết luận này cho phép chú ý rằng không phải cứ $\nu < 0$ là kết cấu rơi vào trạng thái mất ổn định, mà ngược lại có thể ổn định.

b) trường hợp $q > 0$, $\nu > 0$

Theo (2.16) ta có sự phân bố các nghiệm trên trục thực



Có thể có các khả năng:

- Khả năng 1

$$e_3 < 0 < e_2 < \frac{\nu}{3\omega} < e_1 \tag{2.31}$$

Dựa vào (2.20) ÷ (2.22) và từ (2.31) suy ra:

$$m < 0, \quad n < 0, \quad s > 0 \tag{2.32}$$

So sánh (2.32) với (2.29) ta đi đến kết luận: Khi $\nu > 0$ và thỏa mãn (2.31) thì x giảm khi $t \to \infty$, kết cấu trong trạng thái ổn định.

- Khả năng 2

$$e_3 < 0 < \frac{\nu}{3\omega} < e_2 < e_1 \tag{2.33}$$

Khi đó

$$m < 0, \quad n > 0, \quad s > 0 \tag{2.34}$$

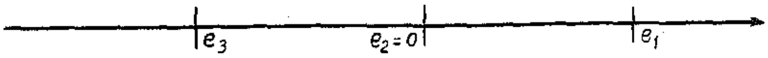
Căn cứ vào (2.19) ta có

$$z \to e_2 \quad \text{hoặc} \quad z \to e_3 \quad \text{khi} \quad t \to \infty$$

Trường hợp này kết cấu có thể ở trong trạng thái ổn định hoặc rơi vào trạng thái mất ổn định. Kết luận này cho phép chú ý rằng không phải cứ $\nu > 0$ là kết cấu ở trạng thái ổn định, mà ngược lại có thể mất ổn định.

c) trường hợp $q = 0$

Theo (2.7) ta có sự phân bố nghiệm trên trục thực



Có thể có khả năng:
- Khả năng $\nu > 0$

$$e_3 < 0 < \frac{\nu}{3\omega} < e_1$$

Khi đó

$$m < 0, \quad n < 0, \quad s > 0 \tag{2.35}$$

Kết quả (2.35) tương tự (2.32), (2.29), kết cấu trong trạng thái ổn định
- Khả năng $\nu < 0$

$$e_3 < \frac{\nu}{3\omega} < 0 < e_1$$

Khi đó

$$m < 0, \quad n > 0, \quad s > 0 \tag{2.36}$$

Kết quả (2.36) tương tự như (2.34), kết cấu có thể ở trong trạng thái ổn định hoặc rơi vào trạng thái mất ổn định.

3. NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH (2.19) KHI $q = 0$

Từ (2.14) suy ra

$$\cos\varphi = -\frac{q}{2\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}} = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \tag{3.1}$$

Dựa vào (3.1) ta có:

$$\cos\frac{\varphi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = 0, \quad \cos\left(\frac{\varphi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{3.2}$$

Thay kết quả (3.2) vào (2.12), (2.13) và có chú ý đến (2.8) ta được

$$e_1 = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{\nu^2}{3} + a}, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = -\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{\nu^2}{3} + a} \tag{3.3}$$

Dựa vào (2.20) ÷ (2.22) và kết quả tính được (3.3) ta có:

$$m = -\frac{\omega\left(\sqrt{\frac{\nu^2}{3} + a} - \frac{\nu}{3}\right)}{2\left(\frac{\nu^2}{3} + a\right)} \tag{3.4}$$

$$n = -\frac{\omega\nu/3}{\frac{\nu^2}{3} + a} \tag{3.5}$$

$$s = \frac{\omega\left(\sqrt{\frac{\nu^2}{3} + a} + \frac{\nu}{3}\right)}{2\left(\frac{\nu^2}{3} + a\right)} \tag{3.6}$$

Từ phương trình (2.19) vẫn chưa tính được tường minh $z = z(t)$ khi kết quả m, n, s tính được như (3.4) ÷ (3.6). Để làm ví dụ ta xét trường hợp riêng đơn giản

$$a = -\frac{2\nu^2}{9} \tag{3.7}$$

Khi đó

$$m = 0, \quad n = -\frac{3\omega}{\nu}, \quad s = \frac{3\omega}{\nu} \tag{3.8}$$

Thay (3.8) vào (2.19) ta được

$$\frac{z + \frac{\nu}{3\omega}}{z} = A^{\nu/3\omega}e^{-(\nu\omega/3)t} \tag{3.9}$$

Từ (3.9) suy ra

$$z = \frac{\nu}{3\omega\left(A^{\nu/3\omega}e^{-(\nu\omega/3)t} - 1\right)} \tag{3.10}$$

Trở lại biến cũ (2.3), (2.6)

$$\frac{\dot{x}}{x} = -\frac{3\omega}{\nu} + \frac{3\omega}{\nu\left(-A^{\nu/3\omega}e^{-(\nu\omega/3)t} + 2\right)} \tag{3.11}$$

Tích phân (3.11) ta được:

$$\ln x = -\frac{3\omega}{\nu}t + \frac{9}{2\nu^2}\ln\left(2e^{(\nu\omega/3)t} - A^{\nu/3\omega}\right) + \ln D$$

$$x = De^{-(3\omega/\nu)t}\left(2e^{(\nu\omega/3)t} - A^{\nu/3\omega}\right)^{9/2\nu^2} \tag{3.12}$$

D - hằng số tích phân.

Nghiệm (3.12) ổn định khi $\nu > 0$ và mất ổn định khi $\nu < 0$, phù hợp với những kết luận rút ra từ (2.35), (2.36).

4. NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH (2.5) KHI $b = 0$

Khi đó ta có phương trình

$$\frac{dy}{y^2 + \frac{\nu}{\omega}y - \frac{a}{\omega^2}} = \omega^2 dt \tag{4.1}$$

Phương trình (4.1) có thể viết dưới dạng

$$\frac{dy}{(y - e_1)(y - e_2)} = \omega^2 dt \tag{4.2}$$

$$e_1 = -\frac{\nu}{2\omega} + \frac{1}{2\omega}\sqrt{\nu^2 + 4a} \tag{4.3}$$

$$e_2 = -\frac{\nu}{2\omega} - \frac{1}{2\omega}\sqrt{\nu^2 + 4a} \tag{4.4}$$

Tích phân phương trình (4.2) ta được

$$\frac{y-e_2}{y-e_1} = Ae^{-\omega\sqrt{\nu^2+4a}\,t} \tag{4.5}$$

A - hằng số tích phân

Dựa vào (4.5) ta thấy $y \to e_2$ khi $t \to \infty$

Trở lại biến cũ theo (2.3) ta có

$$\frac{d}{dt}(\ln x) \to \frac{1}{e_2} \quad \text{khi} \quad t \to \infty$$

Như vậy nếu $e_2 < 0$ thì $\ln x$ đồng thời với x giảm theo t khi $t \to \infty$, kết cấu trong trạng thái ổn định. Nếu $e_2 > 0$ thì $\ln x$ đồng thời với x tăng dần theo t khi $t \to \infty$, kết cấu rơi vào trạng thái mất ổn định.

Dựa vào (4.4) ta thấy

$$e_2 < 0 \quad \text{khi} \quad \nu > 0 \quad \text{và khi} \quad \nu < 0, \quad a > 0 \tag{4.6}$$

$$e_2 > 0 \quad \text{khi} \quad \nu < 0, \quad a < 0 \tag{4.7}$$

Từ (4.6) dẫn đến lưu ý rằng khi $\nu < 0$ chưa hẳn kết cấu đã rơi vào trạng thái mất ổn định, mà ngược lại có thể ổn định.

Kết luận rút ra từ (4.6), (4.7) phù hợp với kết luận rút ra từ biểu thức nghiệm tìm được ở trong [4]

$$x = \frac{e^{(\nu\omega/2a)t}}{C^{1/a}\mathrm{ch}^{1/a}\left(\omega\sqrt{\frac{\nu^2}{4}+a}\,t+\gamma\right)} \tag{4.8}$$

C, γ - hằng số tích phân

5. KẾT LUẬN

- Khi $\nu < 0$ chưa chắc chắn kết cấu đã rơi vào trạng thái mất ổn định, mà ngược lại có thể ổn định, kết luận này rút ra từ (2.28). Khi $\nu > 0$ chưa chắc chắn kết cấu ở trong trạng thái ổn định , mà ngược lại có thể mất ổn định, kết luận này rút ra từ (2.33).
- Nghiên cứu khả năng ổn định và mất ổn định nghiệm của phương trình (2.2) bằng phương trình (2.29) và bằng một loạt các nghiên cứu đánh giá (2.25) ÷ (2.29), (2.31) ÷ (2.34) là một đóng góp mới cho phương pháp nghiên cứu khả năng ổn định và mất ổn định nghiệm của một phương trình vi phân phi tuyến

Công trình được hoàn thành với sự tài trợ của Chương trình nghiên cứu cơ bản trong lĩnh vực khoa học tự nhiên.

Địa chỉ:
Viện Khoa học kỹ thuật Xây dựng

Nhận ngày 30/10/1995

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Руководство по расчету зданий и сооружений на действие ветра. Строройиздат, М., 1978, 216 с.
2. Trương Tương Đình. Tính toán tải trọng gió và sổ tay tính toán chống gió. NXB Đại học Đồng Tế, Thượng Hải, 1944, 413 tr. (Bản trung văn).
3. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике. Наука, М., 1973, 304 с.
4. Nguyễn Đăng Bích, Nguyễn Võ Thông. Mất ổn định khí động của thanh hình trụ tựa trên gối đàn hồi có cản nhớt. Tạp chí Cơ học, No 3, 1994.

(xem tiếp trang 22)