Tạp chí Cơ học Journal of Mechanics, NCNST of Vietnam T. XVIII, 1996, No 2 (35 - 42)

CÁC PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN CỦA BÀI TOÁN TĨNH VÀ ĐỘNG CỦA BẢN COMPOSITE LỚP ĐÀN HỒI DỊ HƯỚNG KHÔNG THUẦN NHẤT

PHẠM THỊ TOAN

1. MỞ ĐẦU

Các bài toán tĩnh và động của bản composite có cấu trúc tuần hoàn thường gặp trong thực tiễn. Bằng phương pháp trung bình hóa thành lập các phương trình cơ bản của các bài toán này. Nêu một phương pháp giải và so sánh với phương pháp của bản nhiều lớp.

2. BÀI TOÁN TĨNH

Bài toán của vật liệu composite đàn hồi theo chuyển vị có dạng:

$$\left[C_{ijk\ell}(\vec{x})u_{k,\ell}\right]_{,j} + X_i = 0,$$

với điều kiện biên:

$$u_i\big|_{S_u} = u_i^0, \quad C_{ijk\ell}(\vec{x})u_{k,\ell}n_j\big|_{S_\sigma} = S_i^0$$

Xét composite có cấu trúc tuần hoàn, khi đó:

$$C_{ijk\ell}(\vec{x} + \vec{a}_i N_i) = C_{ijk\ell}(\vec{x})$$

Đặt: $\xi_\beta = \left[\dfrac{x_\beta}{\alpha} + N_\beta\right]$, $\alpha = \dfrac{\ell}{L} \ll 1$ trong đó ℓ - nhân tuần hoàn, L - kích thước đặc trưng của vật thể và nghiệm tìm dưới dạng khai triển

$$u_i = \sum_{q=0}^{\infty} \alpha^q \sum_{p=0}^{q} N^{(P)}_{ijk_1\ldots k_p}(\vec{\xi}) W^{\{q-p\}}_{j,k_1\ldots k_p}(\vec{x})$$

Đặt nghiệm vào phương trình cân bằng và điều kiện biên, cân bằng các hệ số cùng bậc của α đưa về một dãy các bài toán truy hồi với hệ số hằng số [1]

$$\begin{aligned}
&h^{\{p\}}_{ijnk} W^{\{p\}}_{n,kj} + X_i^{\{p\}} = 0 \\
&W_i^{\{p\}}\big|_{S_u} = u_i^{0\{p\}}, \\
&h^{(0)}_{ijnk} W^{\{p\}}_{n,k} n_j\big|_{S_6} = S_i^{(0)\{p\}}
\end{aligned}$$

trong đó:

$$X_i^{\{p\}} = \sum_{r=1}^{p} h^{(r)}_{ijmnk_1\ldots k_r} W^{\{p-r\}}_{m,nk_1\ldots k_rj}, \quad p>0; \quad X_i^{\{0\}} \equiv X_i,$$
$$u_i^{0\{p\}} = -\sum_{r=1}^{p} N^{(r)}_{ijk_1\ldots k_r} W^{\{p-r\}}_{j,k_1\ldots k_r}\big|_{S_u}, \quad p>0; \quad u_i^{0\{0\}} \equiv u_i^0;$$
$$S_i^{0\{p\}} = -\sum_{r=1}^{p} h^{(r)}_{ijmnk_1\ldots k_r} W^{\{p-r\}}_{m,nk_1\ldots k_r} n_j\big|_{S_\sigma}, \quad p>0; \quad S_i^{0\{p\}} \equiv S_i^0 \tag{2.2}$$

Các đại lượng $h^{(p)}_{ijmnk_1\ldots k_p}$, $N^{(p)}_{ijk_1\ldots k_r}$ được xác định theo công thức truy hồi
Lý thuyết mô đun hiệu quả ứng với $p=0$

$$h_{ijnk}W^{(0)}_{n,kj} + X_i = 0, \quad h_{ijnk} = h^{(0)}_{ijnk}, \quad W_i^{(0)}\big|_{S_u} = u_i^0,$$
$$h_{ijnk}W^{(0)}_{n,k}n_j\big|_{S_\sigma} = S_i^0 \tag{2.3}$$

Trường hợp composite lớp bao gồm nhiều bó tuần hoàn theo tọa độ x_3. Mỗi bó bao gồm nhiều lớp, tại mỗi lớp vật liệu có thể dị hướng và không thuần nhất. Khi đó ten-xơ mô đun hiệu quả xác định như sau:

$$h_{ihnk} = \langle C_{ijnk}\rangle + \langle C_{ijm3}C^{-1}_{m313}\rangle\langle C^{-1}_{13p3}\rangle^{-1}\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3nk}\rangle - \langle C_{ijm3}C_{m313}C_{13nk}\rangle$$

Dấu ngoặc nhọn chỉ giá trị trung bình của đại lượng.
Nếu lớp là trực hướng và trực hướng trùng với trục tọa độ đã xét trong [3].
Xét trường hợp, trong mỗi lớp S các trục chính trực hướng lập góc φ_s đối với trục tọa độ
Nếu ký hiệu $C^0_{ijk\ell}$ là các thành phần ten-xơ mô đun đàn hồi trong hệ trục chính trực hướng thì các thành phần của mỗi lớp được biểu diễn:

$$\begin{aligned}
C_{1111} &= \cos^4\varphi_S C^0_{1111} + \sin^4\varphi_S C^0_{2222} + 2\cos^2\varphi_S\sin^2\varphi_S(C^0_{1122}+2C^0_{1212}),\\
C_{2222} &= \sin^4\varphi_S C^0_{1111} + \cos^4\varphi_S C^0_{2222} + 2\cos^2\varphi_S\sin^2\varphi_S(C^0_{1122}+2C^0_{1212}),\\
C_{3333} &= C^0_{3333},\\
C_{2233} &= \cos^2\varphi_S C^0_{2233} + \sin^2\varphi_S C^0_{1133},\\
C_{1133} &= \sin^2\varphi_S C^0_{2233} + \cos^2\varphi_S C^0_{1133},\\
C_{1122} &= \cos^2\varphi_S\sin^2\varphi_S(C^0_{1111}+C^0_{2222}-4C^0_{1212}) + (\cos^4\varphi_S+\sin^4\varphi_S)C^0_{1122},\\
C_{2323} &= \cos^2\varphi_S C^0_{2323} + \sin^2\varphi_S C^0_{1313},\\
C_{1313} &= \sin^2\varphi_S C^0_{2323} + \cos^2\varphi_S C^0_{1313},\\
C_{1212} &= \cos^2\varphi_S\sin^2\varphi_S(C^0_{1111}+C^0_{2222}-2C^0_{1122}-2C^0_{1212}) + (\cos^4\varphi_S+\sin^4\varphi_S)C^0_{1212},\\
C_{1112} &= \cos^3\varphi_S\sin\varphi_S(C^0_{1111}-C^0_{1122}-2C^0_{1212}) - \cos\varphi_S\sin^3\varphi_S(C^0_{2222}-C^0_{1222}-2C^0_{1212}),\\
C_{1222} &= \cos\varphi_S\sin^3\varphi_S(C^0_{1111}-C^0_{1122}-2C^0_{1212}) - \cos^3\varphi_S\sin\varphi_S(C^0_{2222}-C^0_{1122}-2C^0_{1212}),\\
C_{1233} &= \cos\varphi_S\sin\varphi_S(C^0_{1133}-C^0_{2233}),\\
C_{1323} &= \cos\varphi_S\sin\varphi_S(C^0_{1313}-C^0_{2323}),
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Các thành phần ten-xơ mô đun đàn hồi hiệu quả:

$$\begin{aligned}
h_{1111} &= \langle C_{1111}\rangle + \langle C^{-1}_{3333}\rangle^{-1}\langle C^{-1}_{3333}C_{1133}\rangle^2 - \langle C^{-1}_{3333}C^2_{1133}\rangle,\\
h_{2222} &= \langle C_{2222}\rangle + \langle C^{-1}_{3333}\rangle^{-1}\langle C^{-1}_{3333}C_{2233}\rangle^2 - \langle C^{-1}_{3333}C^2_{2233}\rangle,\\
h_{3333} &= \langle C^{-1}_{3333}\rangle^{-1},\\
h_{2233} &= \langle C^{-1}_{3333}\rangle^{-1}\langle C^{-1}_{3333}C_{2233}\rangle,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&h_{1133} = \langle C_{3333}^{-1}\rangle^{-1}\langle C_{3333}^{-1}C_{1133}\rangle,\\
&h_{1122} = \langle C_{1122}\rangle + \langle C_{3333}^{-1}\rangle^{-1}\langle C_{3333}^{-1}C_{2233}\rangle\langle C_{3333}^{-1}C_{1133}\rangle - \langle C_{3333}^{-1}C_{1133}C_{2233}\rangle,\\
&h_{1212} = \langle C_{1212}\rangle + \left\langle \frac{C_{1233}}{C_{3333}}\right\rangle^2 \frac{1}{\langle C_{3333}^{-1}\rangle} - \langle C_{3333}^{-1}C_{1233}^2\rangle,\\
&h_{1112} = \langle C_{1112}\rangle + \langle C_{3333}^{-1}\rangle^{-1}\langle C_{3333}^{-1}C_{1133}\rangle\langle C_{3333}^{-1}C_{1233}\rangle - \langle C_{3333}^{-1}C_{1133}C_{1233}\rangle,\\
&h_{1222} = \langle C_{1222}\rangle + \langle C_{3333}^{-1}\rangle^{-1}\langle C_{3333}^{-1}C_{2233}\rangle\langle C_{3333}^{-1}C_{1233}\rangle - \langle C_{3333}^{-1}C_{2233}C_{1233}\rangle,\\
&h_{1233} = \langle C_{3333}^{-1}\rangle^{-1}\langle C_{3333}^{-1}C_{1233}\rangle,\\
&h_{1323} = \left\langle \frac{C_{1323}}{d}\right\rangle \frac{1}{\Delta_1},\\
&\quad d \equiv C_{1313}C_{2323} - C_{1323}^2,\\
&\quad \Delta_1 = \left\langle \frac{C_{1313}}{d}\right\rangle\left\langle \frac{C_{2323}}{d}\right\rangle - \left\langle \frac{C_{1323}}{d}\right\rangle^2,
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

Xét bài toán bản: $\sigma_{33} = 0$ trên toàn độ dày của bản, $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ tại $x_3 = \pm\frac{h}{2}$

Theo lý thuyết mô đun hiệu quả liên hệ ứng suất, biến dạng:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11} &= h_{1111}\varepsilon_{11} + h_{1122}\varepsilon_{22} + h_{1133}\varepsilon_{33} + 2h_{1112}\varepsilon_{12},\\
\sigma_{22} &= h_{1122}\varepsilon_{11} + h_{2222}\varepsilon_{22} + h_{2233}\varepsilon_{33} + 2h_{1222}\varepsilon_{12},\\
\sigma_{33} &= h_{1133}\varepsilon_{11} + 2h_{1233}\varepsilon_{12} + h_{2233}\varepsilon_{22} + h_{3333}\varepsilon_{33} = 0,\\
\sigma_{12} &= h_{1112}\varepsilon_{11} + h_{1222}\varepsilon_{22} + h_{1233}\varepsilon_{33} + 2h_{1212}\varepsilon_{12},
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

Từ $\sigma_{33} = 0$ tính ε_{33} thay vào (2.6) và đưa vào các ký hiệu:

$$
\begin{aligned}
&\frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2} = h_{1111} - \frac{h_{1133}^2}{h_{3333}}, \quad \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2} = h_{2222} - \frac{h_{2233}^2}{h_{3333}},\\
&\nu_1 = \frac{h_{1122}h_{3333} - h_{1133}h_{2233}}{h_{2222}h_{3333} - h_{2233}^2}, \quad \nu_2 = \frac{h_{1122}h_{3333} - h_{1133}h_{2233}}{h_{1111}h_{3333} - h_{1133}^2},\\
&G_1 = h_{1112} - \frac{h_{1233}^2}{h_{3333}}, \quad G_2 = h_{1222} - \frac{h_{2233}h_{1233}}{h_{3333}},\\
&G_3 = h_{1212} - \frac{h_{1233}^2}{h_{3333}} \quad \text{với} \quad E_1\nu_2 = E_2\nu_1,
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

Các đại lượng E_1, E_2, ν_1, ν_2, G_1, G_2, G_3 gọi là các mô đun tương đương

Liên hệ ứng suất biến dạng có dạng:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2}(\varepsilon_{11} + \nu_2\varepsilon_{22}) + 2G_1\varepsilon_{12}\\
\sigma_{22} &= \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2}(\varepsilon_{22} + \nu_1\varepsilon_{11}) + 2G_2\varepsilon_{12}\\
\sigma_{12} &= G_1\varepsilon_{11} + G_2\varepsilon_{22} + 2G_3\varepsilon_{12}
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

Xét bài toán uốn bản chữ nhật:

$$
\varepsilon_{11} = -x_3\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2}, \quad \varepsilon_{22} = -x_3\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2}, \quad \varepsilon_{12} = -x_3\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{2.9}
$$

Thay (2.9) vào (2.8) biểu diễn được các thành phần ứng suất σ_{11}, σ_{22}, σ_{12}, còn σ_{13} và σ_{23} được xác định từ các phương trình cân bằng.

Các thành phần mô men:

$$M_1 = \int_{-h_2}^{h_2} \sigma_{11} x_3 dx_3 = -\Big[D_5\Big(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2}\Big) + \frac{D_4}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2}\Big]$$

$$M_2 = \int_{-h_2}^{h_2} \sigma_{22} x_3 dx_3 = -\Big[D_1\Big(\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2}\Big) + \frac{D_2}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2}\Big]$$

$$M_{12} = \int_{-h_2}^{h_2} \sigma_{12} x_3 dx_3 = -\Big[\frac{D_4}{4}\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \frac{D_2}{4}\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} + \Big(\frac{D_3}{2} - D_5\nu_2\Big)\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2}\Big]$$

trong đó:

$$D_1 = \frac{h^2 E_2}{12(1-\nu_1\nu_2)}\ ; \quad D_2 = \frac{G_2 h^3}{3}\ ; \quad D_3 = \frac{h^3}{6}\Big(\frac{E_1\nu_2}{1-\nu_1\nu_2} + 2G_3\Big)$$
$$D_4 = \frac{G_1 h^3}{3}\ ; \quad D_5 = \frac{h^3 E_1}{12(1-\nu_1\nu_2)}\ ; \qquad (2.10)$$

Phương trình cân bằng của bản có dạng:

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2} + q(x_1, x_2) = 0 \qquad (2.11)$$

Thay (2.10) vào (2.11) dẫn đến:

$$D_1\frac{\partial^4 W}{\partial x_2^4} + D_2\frac{\partial^4 W}{\partial x_1 \partial x_2^3} + D_3\frac{\partial^4 W}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_4\frac{\partial^4 W}{\partial x_1^3 \partial x_2} + D_5\frac{\partial^4 W}{\partial x_1^4} = q(x_1, x_2) \qquad (2.12)$$

Phương trình (2.12) có thể giải bằng phương pháp quen biết của lý thuyết bản dị hướng Ta đưa ra phương pháp khác có thể giải được phương trình (2.12); đưa vào hàm:

$$L(\mu) = D_1\mu^4 + D_2\mu^3 + D_3\mu^2 + D_4\mu + D_5$$

Chứng minh rằng $L(\mu) = 0$ không có nghiệm thực. Thật vậy, cho trạng thái ứng suất thực bất kỳ:

$$\sigma_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2}\frac{1}{N} + \frac{E_1\nu_2}{1-\nu_1\nu_2}\frac{k^2}{N} + \frac{2G_i k}{N}$$
$$\sigma_{22} = \frac{E_1\nu_2}{1-\nu_1\nu_2}\frac{1}{N} + \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2}\frac{k^2}{N} + \frac{2G_2 k}{N}$$
$$\sigma_{12} = \frac{G_1}{N} + G_2\frac{k^2}{N} + \frac{2G_3 k}{N}, \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$$

trong đó k và N là các số thực bất kỳ. Suy ra:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{N}\ , \qquad \varepsilon_{22} = \frac{k^2}{N}\ , \qquad \varepsilon_{12} = \frac{k}{N}$$

Thế năng biến dạng đàn hồi ứng với trạng thái ứng suất trên:

$$V = \frac{1}{2}(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}) = \frac{L(k)}{2N^2}$$

vì $V > 0$ nên với k thực $L(k) > 0 \Rightarrow$ đpcm.

Xét trường hợp $L(\mu) = 0$ có nghiệm bội

$$\mu_1 = \mu_2 = \alpha + i\beta \qquad \text{trong đó} \quad \beta \neq 0$$

Dùng phép biến đổi không suy biến: $x = x_1 + \alpha x_2$, $y = \beta x_2$ quả vậy: $\begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \beta \end{vmatrix} = \beta \neq 0$ luôn thỏa mãn.

Bỏ qua các phép tính trung gian đưa (2.12) về dạng:

$$\overline{D}_1 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \overline{D}_2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \overline{D}_3 \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = q(x, y) \tag{2.13}$$

trong đó

$$\overline{D}_1 = D_1\alpha^4 + D - 2\alpha^3 + D_3\alpha^2 + D_4\alpha + D_5,$$
$$\overline{D}_2 = \beta^2(6\alpha^2 D_1 + 3\alpha R_2 + D_3), \quad \overline{D}_3 = D_1\beta^4$$

$$\alpha = -\frac{D_2}{4D_1}, \quad \beta^2 = \frac{8D_1D_3 - 3D_2^2}{16D_1^2}$$

trong trường hợp này:

$$D_1D_4 = D_2D_3, \qquad D_2^2 = 4D_1(D_3 - 2D_5)$$

Phương trình (2.13) có dạng phương trình cơ bản của bài toán uốn bản trực hướng quen thuộc.

3. BÀI TOÁN ĐỘNG

Theo lý thuyết mô đun hiệu quả bài toán động của composite đàn hồi đưa về bài toán động của lý thuyết đàn hồi dị hướng thuần nhất sau:

$$\begin{aligned}
& h_{ijk\ell} w_{k,\ell j} + X_i = \rho_0 \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2}, \quad \rho_0 = \langle \rho \rangle \\
& w_i \big|_{S_u} = u_i^0 \\
& h_{ijk\ell} w_{k,\ell} n_j \big|_{S_\sigma} = S_i^0, \\
& t = 0; \quad w_i = U_i; \quad \frac{\partial w_i}{\partial t} = V_i
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Trong bài toán dao động uốn tự do của bản thay đại lượng $q(x_1, x_2)$ trong (2.12) bằng lực quán tính $-\langle \rho \rangle h \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, phương trình dao động có dạng:

$$\langle \rho \rangle h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^3 \partial x_1} + D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^2 \partial x_1^2} + D_4 \frac{\partial^4 w}{\partial x_2 \partial x_1^3} + D_5 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} = 0$$

trong đó $\langle \rho \rangle = \left\langle \dfrac{\gamma}{g} \right\rangle = \dfrac{\gamma_0}{g}$

Đặt nghiệm $w(x_1, x_2, t) = (A\cos pt + B\sin pt)W(x_1, x_2)$ đưa về:

$$D_1 \frac{\partial^4 W}{\partial x_2^4} + D_2 \frac{\partial^4 W}{\partial x_2^3 \partial x_1} + D_3 \frac{\partial^4 W}{\partial x_2^2 \partial x_1^2} + D_4 \frac{\partial^4 W}{\partial x_2 \partial x_1^3} + D_5 \frac{\partial^4 W}{\partial x_1^4} - p^2 \frac{\gamma_0 h}{g} W = 0$$

Đặt

$$W(x_1, x_2) = \sin\left(\frac{2\pi n x_1}{a} + \frac{2\pi m x_2}{b}\right),$$

thỏa mãn các điều kiện biên bản lề theo nghĩa Saint Venant, ta tìm được tần số riêng:

$$p_{mn} = 4\pi^2\sqrt{\frac{g}{\gamma_0 h}\left[D_1\frac{m^4}{b^4} + D_2\frac{m^3 n}{b^3 a} + D_3\frac{n^2m^2}{a^2b^2} + D_4\frac{n^3 m}{a^3 b} + D_5\frac{n^4}{a^4}\right]}$$

4. VÍ DỤ SO SÁNH VỚI PHƯƠNG PHÁP CỦA TẤM NHIỀU LỚP

a. Phương pháp trung bình hóa

Xét bản composite nhiều lớp đồng phương thủy tinh / epoxy có cấu trúc tuần hoàn bao gồm 10 bó, mỗi bó có 3 lớp, lớp thứ nhất dày: $H_1 = 0,3mm$ lập với phương x_1 góc 45°, lớp thứ hai dày $H_2 = 0,5mm$ lập với phương x_1 góc 30°, lớp thứ ba dày $H_3 = 0,2mm$, lập với phương x_1 góc 0°.

Cho cơ tính của mỗi lớp $E_1 = 46$ GPa, $E_2 = 10$ GPa, $G_{12} = 4,6$ GPa, $\gamma_{12} = 0,31$.

Ký hiệu $C^0_{ijk\ell}$ là các thành phần của ten-xơ mô đun đàn hồi trong các trục chính trực hướng ta có:

$$C^0_{1111} = \frac{E_1^2}{E_1 - \gamma_{12}^2 E_2} = 46,982 \text{ GPa}, \qquad C^0_{2222} = \frac{E_2}{E_1} C^0_{1111} = 10,213 \text{ GPa}$$

$$C^0_{1122} = \gamma_{12} C^0_{2222} = 3,166 \text{ GPa}, \qquad C^0_{1212} = G_{12} = 4,6 \text{ GPa}$$

Các thành phần còn lại bằng 0.

Theo (2.4) ta xác định các thành phần của ten-xơ mô đun đàn hồi hiệu quả

$$\begin{aligned}
h_{1111} &= \langle C_{1111}\rangle = H_1 C^{45^\circ}_{1111} + H_2 C^{30^\circ}_{1111} + H_3 C^0_{1111}\\
h_{2222} &= \langle C_{2222}\rangle = H_1 C^{45^\circ}_{2222} + H_2 C^{30^\circ}_{2222} + H_3 C^0_{2222}\\
h_{1122} &= \langle C_{1122}\rangle = H_1 C^{45^\circ}_{1122} + H_2 C^{30^\circ}_{1122} + H_3 C^0_{1122}\\
h_{1212} &= \langle C_{1212}\rangle = H_1 C^{45^\circ}_{1212} + H_2 C^{30^\circ}_{1212} + H_3 C^0_{1212}\\
h_{1112} &= \langle C_{1112}\rangle = H_1 C^{45^\circ}_{1112} + H_2 C^{30^\circ}_{1112} + H_3 C^0_{1112}\\
h_{1222} &= \langle C_{1222}\rangle = H_1 C^{45^\circ}_{1222} + H_2 C^{30^\circ}_{1222} + H_3 C^0_{1222}
\end{aligned}$$

Liên hệ ứng suất - biến dạng theo lý thuyết mô đun hiệu quả:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= h_{1111}\varepsilon_{11} + h_{1122}\varepsilon_{22} + 2h_{1112}\varepsilon_{12}\\
\sigma_{22} &= h_{1122}\varepsilon_{11} + h_{2222}\varepsilon_{22} + 2h_{1222}\varepsilon_{12}\\
\sigma_{12} &= h_{1112}\varepsilon_{11} + h_{1222}\varepsilon_{22} + 2h_{1212}\varepsilon_{12}
\end{aligned}$$

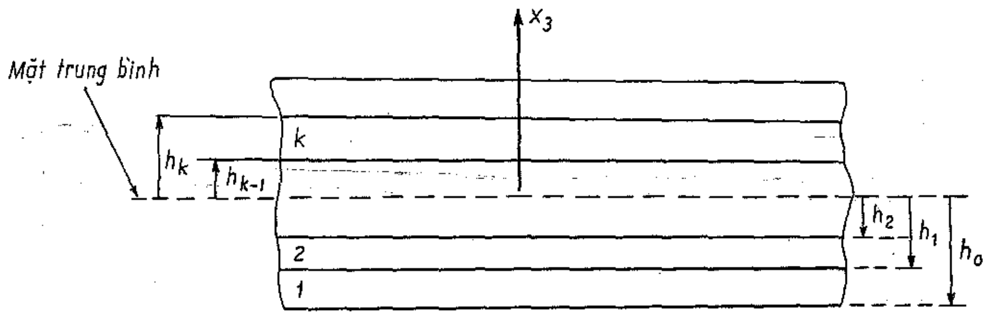
Tính các mô men:

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_{12} \end{bmatrix} = \frac{h^3}{12}\begin{bmatrix} h_{1111} & h_{1122} & h_{1112} \\ h_{1122} & h_{2222} & h_{1222} \\ h_{1112} & h_{1222} & h_{1212} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\partial^2 W/\partial x_1^2 \\ -\partial^2 W/\partial x_2^2 \\ -2\partial^2 W/\partial x_1 \partial x_2 \end{bmatrix}$$

trong đó h chiều dày cả bản $h = 10mm$. Thay các giá trị bằng số ta được:

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2616,042 & 720,358 & 707,925 \\ 720,358 & 1237,225 & 415,050 \\ 707,925 & 415,050 & 839,853 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\partial^2 W/\partial x_1^2 \\ -\partial^2 W/\partial x_2^2 \\ -2\partial^2 W/\partial x_1 \partial x_2 \end{bmatrix}$$

b. Phương pháp tấm nhiều lớp



Hình 1

Theo hình 1 ta xác định được tọa độ h_k

$h_0 = -5$	$h_8 = -2,2$	$h_{16} = 0,3$	$h_{24} = 3$
$h_1 = -4,7$	$h_9 = -2$	$h_{17} = 0,8$	$h_{25} = 3,3$
$h_2 = -4,2$	$h_{10} = -1,7$	$h_{18} = 1$	$H_{26} = 3,8$
$h_3 = -4$	$h_{11} = -1,2$	$h_{19} = 1,3$	$h_{27} = 4$
$h_4 = -3,7$	$h_{12} = -1$	$h_{20} = 1,8$	$h_{28} = 4,3$
$h_5 = -3,2$	$h_{13} = -0,7$	$h_{21} = 2$	$h_{29} = 4,8$
$h_6 = -3$	$h_{14} = -0,2$	$h_{22} = 2,3$	$h_{30} = 5$
$h_7 = -2,7$	$h_{15} = 0$	$h_{23} = 2,7$	

Xác định các hằng số độ cứng thu gọn trong hệ trục chính

$$Q_{11} = \frac{E_1^2}{E_1 - E_2\gamma_{12}^2} = 46,9824s \text{ GPa}, \qquad Q_{22} = \frac{E_2}{E_1}Q_{11} = 10,213 \text{ GPa}$$

$$Q_{12} = \gamma_{12}Q_{22} = 3,133 \text{ GPa}, \qquad Q_{66} = G_{12} = 4,6 \text{ GPa}, \qquad Q_{26} = Q_{16} = 0$$

Ma trận độ cứng của mỗi lớp trong hệ tọa độ chung:
* Lớp 0°:

$$Q_{0^\circ} = \begin{bmatrix} 46,982 & 3,166 & 0 \\ 3,166 & 10,213 & 0 \\ 0 & 0 & 4,6 \end{bmatrix}$$

* Lớp 45°:

$$Q_{45^\circ} = \begin{bmatrix} 20,482 & 11,282 & 9,192 \\ 11,282 & 20,482 & 9,192 \\ 9,192 & 9,192 & 12,716 \end{bmatrix}$$

* Lớp 30°:

$$Q_{30^\circ} = \begin{bmatrix} 31,703 & 9,225 & 11,475 \\ 9,225 & 13,319 & 4,446 \\ 11,475 & 4,446 & 10,687 \end{bmatrix}$$

Ta có quan hệ [5]

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\partial^2 W/\partial x_1^2 \\ -\partial^2 W/\partial x_2^2 \\ -2\partial^2 W/\partial x_1 \partial x_2 \end{bmatrix}$$

trong đó:

$$D_{ij} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{30}(h_k^3 - k_{k-1}^3)(Q_{ij})_k$$

thay giá trị bằng số ta được

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2616,890 & 719,660 & 705,758 \\ 719,660 & 1237,718 & 415,010 \\ 705,758 & 415,010 & 839,149 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\partial^2 W/\partial x_1^2 \\ -\partial^2 W/\partial x_2^2 \\ -2\partial^2 W/\partial x_1 \partial x_2 \end{bmatrix}$$

So sánh hai ma trận quan hệ được thiết lập từ hai phương pháp ta thấy sai số không lớn

5. KẾT LUẬN

Bằng phương pháp trung bình hóa áp dụng vào bài toán bản composite nhiều lớp ta xác định được các thành phần của ten-xơ mô đun đàn hồi hiệu quả. Kết quả đã đưa bài toán bản composite lớp đàn hồi về bài toán lý thuyết bản đàn hồi dị hướng với các mô đun tương đương. Trên một thí dụ bằng số đã tiến hành so sánh với phương pháp của tấm nhiều lớp

Công trình được hoàn thành với sự tài trợ của Chương trình nghiên cứu cơ bản trong lĩnh vực khoa học tự nhiên.

Địa chỉ:
Trường đại học Giao thông vận tải

Nhận ngày 21/7/1995

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Pobedrja B. E. Cơ học vật liệu composite MGU 1984 (tiếng Nga).
2. Lekhnhixky . Bản dị hướng. L. 1957 (tiếng Nga).
3. Đào Huy Bích. Về bài toán bản composite lớp đàn hồi trực hướng không thuần nhất. Tạp chí Cơ học, No 4, 1994.
4. Timosenko X. P., Xvoinopski - Krige. Tấm và vỏ. Nhà xuất bản KH & KT, 1971.
5. Trần Ích Thịnh. Vật liệu composite - Nhà xuất bản Giáo dục, 1994.

SUMMARY

EQUATIONS OF DYNAMIC AND STATIC PROBLEMS OF NONHOMOGENEOUS AND ANISOTROPIC ELASTIC LAYERED - COMPOSITE PLATES

The homogennization method for studying composite materials had been introduced in [1]. By this method the problem of nonhomogeneous and anisotropic elastic layered - composite material reduces to the set of problems of homogeneous, anisotropic elastic material. In this paper the governing equations of dynamic and static problems of layered - composite plates are formulated.

An example is considered, obtained results can be compared with ones of multi-layered plate method.