Tạp chí Cơ học Journal of Mechanics, NCNST of Vietnam T. XVIII, 1996, No 2 (20 – 28)

XÁC ĐỊNH THAM SỐ CỦA DẦM CÓ KHỐI LƯỢNG TẬP TRUNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐO DAO ĐỘNG

NGUYỄN CAO MỆNH, TRẦN TRỌNG TOÀN

§1. ĐẶT VẤN ĐỀ

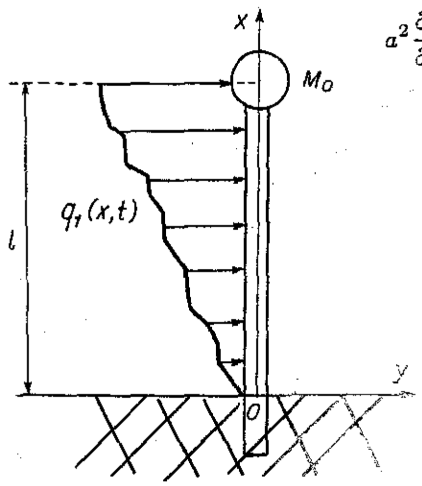
Trong [1] đã trình bày phương pháp xác định độ dài của dầm một đầu ngàm, một đầu tự do dưới tác động của tải trọng ngang bằng cách đo dao động tại một số vị trí của dầm.

Trong bài này, chúng tôi xét trường hợp dầm có khối lượng tập trung tại đầu mút tự do. Bằng cách đo dao động tại một vị trí và cho khối lượng tập trung thay đổi ta cũng có thể xác định được độ dài của dầm. Vấn đề chính cần giải quyết ở đây là do điều kiện biên không thuần nhất nên ta phải quan niệm tính trực giao của hàm riêng theo định nghĩa khác của tích vô hướng

§2. DAO ĐỘNG CỦA DẦM ĐÀN HỒI CÓ GẮN KHỐI LƯỢNG TẬP TRUNG

Xét một dầm đàn hồi có tiết diện ngang không đổi, một đầu ngàm, một đầu tự do có gắn khối lượng tập trung M_0. Các đặc trưng vật lý của dầm là E, J, M tương ứng là mô đun đàn hồi, mô men quán tính và khối lượng trên một đơn vị dài. Dầm chịu tác động của tải trọng ngang $q_1(x,t)$ trên khoảng cách ℓ kể từ tiết diện bị ngàm. Chọn hệ trục tọa độ xOy như hình 1.

Phương trình dao động ngang tự do không cản của dầm như sau:



Hình 1

$$a^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\alpha\frac{\partial y}{\partial t} = q(x,t) \tag{2.1}$$

trong đó

$$a^2 = EJ/M; \quad q(x,t) = q_1(x,t)/M; \tag{2.2}$$

α - hệ số cản của môi trường;

Với các điều kiện biên (xem [2]):

$$y(0,t) = 0; \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial y(0,t)}{\partial x} = 0; \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial^3 y(\ell,t)}{\partial x^3} = \frac{M_0}{EJ}\,\frac{\partial^2 y(\ell,t)}{\partial t^2}; \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial^2 y(\ell,t)}{\partial x^2} = 0; \tag{2.6}$$

Khác với [1], ở đây điều kiện biên (2.5) không thuần nhất.
Phương trình dao động tự do không cản của dầm là:

$$a^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0; \tag{2.7}$$

Dùng phương pháp tách biến, ta đặt:

$$y(x,t)=X(x)T(t) \tag{2.8}$$

Thay (2.8) vào (2.7) ta được:

$$a^2X^{(4)}/X=-\overline{T}/T=\omega^2$$

Từ đó:

$$\overline{T}+\omega^2.T=0; \tag{2.9}$$

$$X^{(4)}-k^4.X=0; \tag{2.10}$$

$$k^4=\omega^2/a^2 \tag{2.11}$$

Giải (2.9) và (2.10) ta được

$$T(t)=A\sin(\omega t)+B\cos(\omega t) \tag{2.12}$$

$$X(x)=C_1A(k,x)+C_2B(k,x)+C_3C(k,x)+C_4D(k,x) \tag{2.13}$$

trong đó:

$$\begin{aligned}A(k,x)&=0,5[\mathrm{ch}(kx)+\cos(kx)];\\ B(k,x)&=0,5[\mathrm{sh}(kx)+\sin(kx)];\\ C(k,x)&=0,5[\mathrm{ch}(kx)-\cos(kx)];\\ D(k,x)&=0,5[\mathrm{sh}(kx)-\sin(kx)].\end{aligned}$$

Khi đó các điều kiện biên trở thành:

$$X(0)=0; \tag{2.14}$$

$$X^{(1)}(0)=0; \tag{2.15}$$

$$X^{(3)}(\ell)=-M_1k^4X(\ell); \tag{2.16}$$

$$X^{(2)}(\ell)=0, \tag{2.17}$$

trong đó:

$$M_1=M_0/M \tag{2.18}$$

Cho (2.13) thỏa mãn các điều kiện biên (2.14) và (2.15) ta được:

$$C_1=C_2=0.$$

Nên hàm riêng có dạng:

$$X(x)=C_3C(k,x)+C_4D(k,x) \tag{2.19}$$

Cho (2.19) thỏa mãn các điều kiện biên (2.16) và (2.17) ta được:

$$\begin{aligned}&C_3[D(k,\ell)+kM_1C(k,\ell)]+C_4[A(k,\ell)+kM_1D(k,\ell)]=0;\\ &C_3A(k,\ell)\qquad\qquad\qquad\qquad +C_4B(k,\ell)=0.\end{aligned} \tag{2.20}$$

Điều kiện để các hằng số C_3, C_4 của hệ (2.20) không đồng thời bằng 0 là định thức các hệ số của chúng phải bằng 0:

$$B(k,\ell)D(k,\ell) - A^2(k,\ell) + kM_1[B(k,\ell)C(k,\ell) - A(k,\ell)D(k,\ell)] = 0$$

Hay

$$1 + \mathrm{ch}(k\ell)\cos(k\ell) + kM_1[\mathrm{sh}(k\ell)\cos(k\ell) - \mathrm{ch}(k\ell)\sin(k\ell)] = 0 \tag{2.21}$$

Đây là phương trình tần số, từ đó xác định được k và từ (2.11) xác định được tần số riêng ω

Từ (2.20) ta chọn:

$$C_4 = -C_3A(k,\ell)/B(k,\ell) \tag{2.22}$$

Thay (2.22) vào (2.19) ta được:

$$X(x) = C_3[C(k,\ell) - A(k,\ell)D(k,\ell)/B(k,\ell)] \tag{2.23}$$

Vì phương trình tần số (2.21) có vô số nghiệm nên có vô số hàm riêng dạng:

$$X_j(x) = C_{3j}Z_j(x); \tag{2.24}$$

$$Z_j(x) = [C(k_j,x) - A(k_j,\ell)D(k_j,x)/B(k_j,\ell)]; \tag{2.25}$$

$$k_j^4 = \frac{\omega_j^2}{a^2}\,. \tag{2.26}$$

Bằng cách tính toán dựa vào các phương trình (2.3), (2.4), (2.5), (2.6), (2.7), (2.8) ta tìm được:

$$\int_0^\ell X_i(x)X_j(x)dx = -M_1X_i(\ell)X_j(\ell) \tag{2.27}$$

Tích phân này không bằng 0 nên các hàm riêng $X_j(x)$ không trực giao theo nghĩa tích phân. Ta đưa vào tích vô hướng dưới dạng sau đây đối với hai hàm $g(x)$ và $f(x)$ bất kỳ (xem [3]):

$$(g,f) = \int_0^\ell g(x)f(x)dx + M_1g(\ell)f(\ell)$$

Do đó:

$$(X_i,X_j) = \int_0^\ell X_i(x)X_j(x)dx + M_1X_i(\ell)X_j(\ell) \tag{2.28}$$

và chọn C_{3j} sao cho:

$$(X_j,X_j) = \int_0^\ell X_j^2(x)dx + M_1X_j^2(\ell) = 1 \tag{2.29}$$

Từ đó ta tìm được:

$$C_j = C_{3j} = \Big[\int_0^\ell Z_j^2(x)dx + M_1Z_j^2(\ell)\Big]^{-0,5} \tag{2.30}$$

Ta sẽ ký hiệu:

$$\overline{X}_j(x) = C_jZ_j(x) \tag{2.31}$$

Khi đó sẽ có:

$$(\overline{X}_i, \overline{X}_j) = \begin{cases} 0 & \text{khi} \quad i \neq j \\ 1 & \text{khi} \quad i = j \end{cases} \tag{2.32}$$

Như vậy các hàm riêng $\overline{X}_j$ $(j = 1, 2, \dots)$ là các hàm trực chuẩn và ta có thể khai triển vế phải và nghiệm của phương trình (2.1) theo hệ hàm riêng trực chuẩn.

Bây giờ ta giải phương trình (2.1).

Giả sử vế phải của (2.1) có dạng:

$$q(x,t) = Q_1(x)\sin(n_1 t) + Q_2(x)\cos(n_1 t) \tag{2.33}$$

Khai triển vế phải của (2.1) theo hàm riêng trực chuẩn $\overline{X}_j(x)$ ta được:

$$q(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{X}_j(x) F_j(t) \tag{2.34}$$

$$F_j(t) = \left(\overline{X}_j(x), q(x,t)\right) = \int_0^{\ell} \overline{X}_j(x) q(x,t) dx + M_1 \overline{X}_j(\ell) q(\ell, t) \tag{2.35}$$

hay:

$$F_j(t) = a_j \sin(n_1 t) + b_j \cos(n_1 t) \tag{2.36}$$

$$a_j(\ell, M_0) = \int_0^{\ell} \overline{X}_j(x) Q_1(x) dx + M_1 \overline{X}_j(\ell) Q_1(\ell) \tag{2.37}$$

$$b_j(\ell, M_0) = \int_0^{\ell} \overline{X}_j(x) Q_2(x) dx + M_1 \overline{X}_j(\ell) Q_2(\ell) \tag{2.38}$$

Nghiệm được tìm dưới dạng:

$$y(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{X}_j(x) T_j(t) \tag{2.39}$$

Thay (2.39) vào (2.1) rồi lấy số hạng thứ j ta được:

$$\frac{a^2 \overline{X}_j^4}{\overline{X}_j} = \frac{-\ddot{T}_j}{T_j} - \frac{2\alpha \dot{T}_j}{T_j} + \frac{F_j}{T_j} = \omega_j^2 \tag{2.40}$$

Từ đó:

$$\begin{aligned} & a^2 \overline{X}_j^{(4)} - \omega_j^2 \overline{X}_j = 0 \qquad (\text{như } (2.10)) \\ & \overline{T}_j + 2\alpha \dot{T}_j + \omega_j^2 T_j = F_j = a_j \sin(n_1 t) + b_j \cos(n_1 t) \end{aligned} \tag{2.41}$$

Ta tìm nghiệm cưỡng bức của (2.41) dưới dạng:

$$T_j(t) = A_j \sin(n_1 t) + B_j \cos(n_1 t) \tag{2.42}$$

Thay (2.42) vào (2.41) ta được hệ phương trình xác định A_j, B_j và giải hệ phương trình này thì được:

$$\begin{aligned} & A_j(\ell, M_0) = [a_j(\omega_j^2 - n_1^2) + 2\alpha n_1 b_j]/D_j; \\ & B_j(\ell, M_0) = [b_j(\omega_j^2 - n_1^2) - 2\alpha n_1 a_j]/D_j; \\ & D_j = (\omega_j^2 - n_1)^2 + 4\alpha^2 n_1^2. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Dao động cưỡng bức của dầm là:

$$y(x,\ell,M_0,t) = \Big[\sum_{j=1}^{\infty} \overline{X}_j(x)A_j\Big]\sin(n_1t) + \Big[\sum_{j=1}^{\infty} \overline{X}_j(x)B_j\Big]\cos(n_1t) \tag{2.44}$$

và biên độ dao động có dạng

$$y(x,\ell,M_0) = \Big\{\Big[\sum_{j=1}^{\infty} \overline{X}_j(x)A_j\Big]^2 + \Big[\sum_{j=1}^{\infty} \overline{X}_j(x)B_j\Big]^2\Big\}^{1/2}, \tag{2.45}$$

§3. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN

Giả sử ta biết tải trọng phân bố $q_1(x,t)$ và đo được biên độ dao động tại đầu dầm là : $D[1]$, $D[2]$, $D[3]$,... ứng với các khối lượng thay đổi $M_0[1]$, $M_0[2]$, $M_0[3]$,... ta hãy xác định độ dài của dầm kể từ thiết diện bắt đầu bị ngàm đến đầu mút tự do. Để tìm độ dài của dầm ta cần giải phương trình:

$$y(\ell,\ell,M_0[i]) = D[i]; \quad i = 1,2,3,\dots \tag{3.1}$$

Trong đó vế trái của (3.1) được xác định bởi (2.45) bằng cách thay $x = \ell$.

Vì $M_0[i]$ đã cho nên phương trình (3.1) được coi là phương trình để xác định độ dài ℓ.

Phương trình (3.1) là phương trình rất phức tạp đối với ℓ. Vì vậy ta sẽ dùng phương pháp số và vẽ đồ thị để giải bài toán trên.

Ta hãy chuyển phương trình (3.1) về dạng:

$$F_i(\ell) = y(\ell,\ell,M_0[i]) - D[i] = 0; \quad i = 1,2,3,\dots \tag{3.2}$$

Để giải phương trình (3.2) ta chọn ℓ biến thiên trong một khoảng nào đó của bài toán thực tế, vẽ đồ thị các hàm $F_i = F_i(\ell)$ trên cùng một hệ trục tọa độ ℓOF.

Giao điểm của những đường cong này với trục hoành $O\ell$ chính là các giá trị có thể có của ℓ.

Ta vẫn dùng tiêu chuẩn:

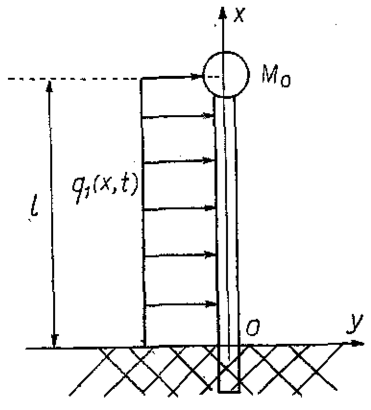
$$A_j^2 + B_j^2 < \varepsilon, \tag{3.3}$$

với ε bé tùy ý cho trước để lấy một số hữu hạn số hạng trong (2.45). Việc dùng (3.3) đã được lý giải trong [4].

Sơ đồ tính toán giống như sơ đồ đã nêu trong [1], ở đây chỉ lưu ý một điều là: thay cho việc tính hàm riêng $X_j(x)$ ta tính hàm riêng trực chuẩn theo (2.31) mà trước đó cần phải tính các hằng số tích phân C_j theo (2.30). Để minh họa cho phương pháp đã trình bày ở trên ta hãy xét một số ví dụ sau đây:

Ví dụ 1.

Một ống trụ bằng thép một đầu ngàm, một đầu tự do có gắn khối lượng tập trung M_0. Tiết diện ngang hình vành khăn với bán kính trong $r = 0,27m$; bán kính ngoài $R = 0,30m$; ống chịu tải trọng ngang: $q_1(x,t) = 98,1[\sin(3t) + \cos(3t)]$ trên toàn bộ chiều dài ℓ. Các tham số khác của môi trường và của ống được cho và tính như sau: $\alpha = 0,05$; $\rho = 7,8\cdot 10^3 kg/m^3$; $E = 2\cdot 10^{11} N/m^2$; $J = (R^4 - r^4)/4$; $M = \rho A$; $A = \pi(R^2 - r^2)$; Chọn hệ trục tọa độ xOy như hình 2.



Hình 2

Khi cho khối lượng tập trung thay đổi theo từng lần đo như sau:

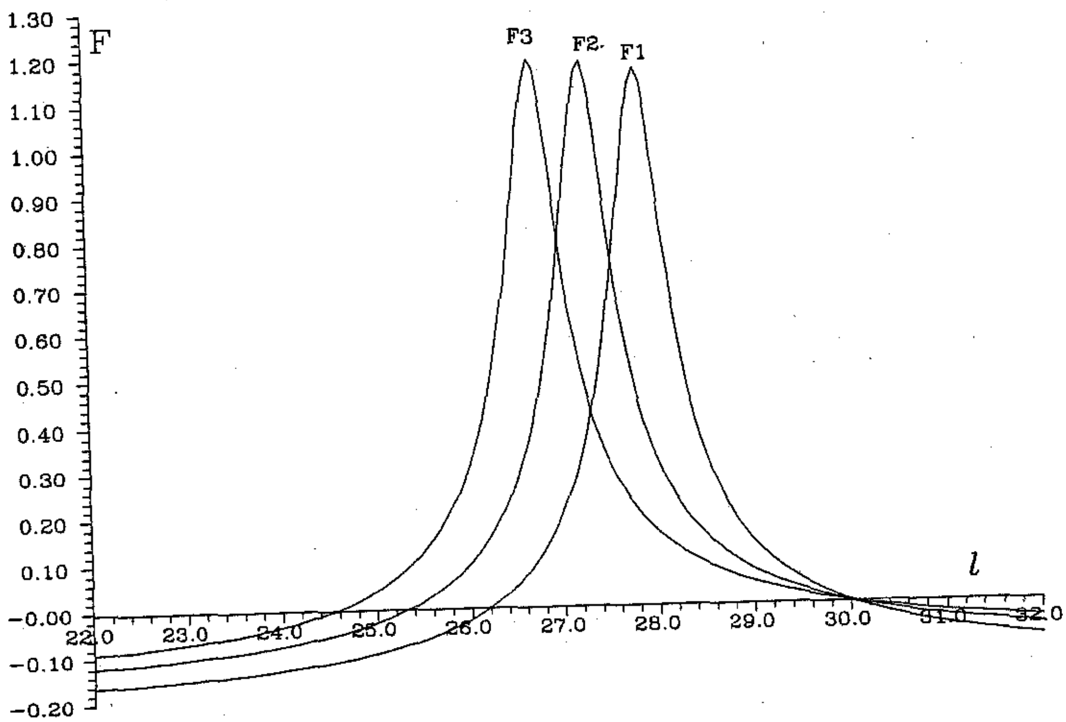
$$M_0[1] = 4000kg; \quad M_0[2] = 4500kg; \quad M_0[3] = 5000kg$$

và tương ứng đo được biên độ như sau:

$$D[1] = 0,199691m; \quad D[2] = 0,161550m; \quad D[3] = 0,137845m.$$

Hãy xác định độ dài của ống?

Vẽ 3 đường cong $F_i(\ell) = y(\ell, \ell, M_0[i]) - D[i]$; $i = 1, 2, 3$ trên cùng một hệ trục tọa độ $(\ell O F)$ ta được hình 3.



Hình 3

Từ đồ thị trên hình 3 ta thấy rằng có một giao điểm với trục hoành mà cả 3 đường cong đều đi qua. Ta sẽ lấy hiện tượng này làm căn cứ để chọn giá trị ℓ có trong thực tiễn. Dùng chương trình chia đôi cung để xác định chính xác hơn hoành độ của những điểm cắt ta được kết quả ghi trong bảng 1.

Bảng 1 (Tính trên đoạn [10, 40])

Khối lượng (kg)	biên độ (m)	$\ell[1]$ (m)	$\ell[2]$ (m)
4000	0,199691	26,207849	30,000002
4500	0,161550	25,350344	30,000015
5000	0,137845	24,589547	30,000015

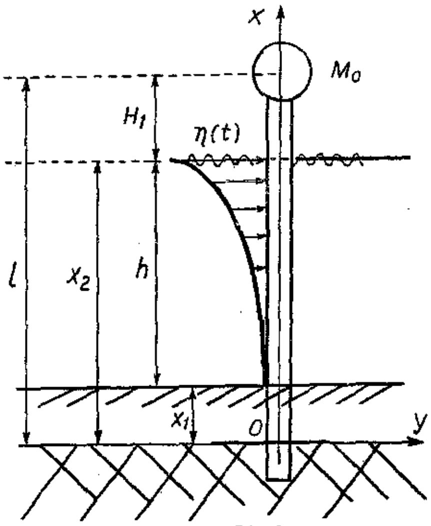
(Với độ chính xác $A_j^2 + B_j^2 < 10^{-2}$)

Từ hình 3 và bảng 1 ta thấy nghiệm của bài toán là: $\ell \approx 30\,m$.

Ví dụ 2.

Một chiếc cọc bằng thép có một đầu cắm sâu vào đáy biển, đầu kia mang khối lượng tập trung M_0. Cọc có tiết diện ngang hình vành khăn với bán kính lớn và nhỏ tương ứng là: $R = 0,6m$; $r = 0,55m$; độ sâu của biển lúc nước yên tĩnh là $h = 55m$; phần cọc trên mặt nước $H_1 = 5m$; hệ số cản môi trường $\alpha = 0,03$, dưới tác dụng của sóng biển Eri có chiều cao $H = 1,2m$ cọc chịu lực cưỡng bức phân bố theo chiều sâu $[x_1, x_2]$. Hãy tìm độ dài ℓ của cọc kể từ thiết diện được coi là ngàm đến đầu mút tự do của cọc nếu biết khối lượng thay đổi $M_0[i]$ và biên độ dao động đo được tương ứng là $D[i]$; $i = 1,2,3$?

Chọn hệ trục tọa độ xOy như sau: trục Oy hướng theo phương truyền sóng; trục Ox trùng với trục của cọc và hướng từ dưới lên trên (xem hình 4)



Hình 4

Lực của sóng Eri tác dụng lên cọc được tính theo [1] là:

$$q_1(x,t) = A_0\text{ch}(Kx)\sin(n_1t) + B_0\text{ch}^2(Kx)\cos(n_1t); \tag{3.4}$$
$$A_0 = 0,5C_In_1^2H/\text{sh}(Kh);$$
$$B_0 = 2C_D(n_1H)^2/[3\pi\text{sh}^2(Kh)];$$
$$C_I = 0,25\pi\rho_1D^2C_i \quad \text{là hệ số quán tính;}$$
$$C_D = 0,5D\rho_1C_d \quad \text{là hệ số cản vận tốc.}$$

trong đó:

n_1 là tần số sóng;

K là số sóng;

$\rho_1 = 1026$ kg/m^3 là mật độ nước biển;

$D = 2R$ là đường kính lớn của cọc;

$C_i = C_d = 1$ là các hằng số vật lý tính được bằng thực nghiệm

Phương trình dao động ngang của cọc là:

$$a^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\alpha\frac{\partial y}{\partial t} = q(x,t) \tag{3.5}$$

với $q(x,t) = q_1(x,t)/M$; $a^2 = EJ/M$.

Phương trình (3.5) hoàn toàn giống (2.1) và điều kiện biên của ví dụ 2 hoàn toàn giống (2.3), (2.4), (2.5), (2.6).

Áp dụng kết quả đã trình bày ở §2 với

$$q(x,t) = Q_1(x)\sin(n_1t) + Q_2(x)\cos(n_1t);$$
$$Q_1(x) = A_0\text{ch}Kx/M; \quad Q_2(x) = B_0\text{ch}^2Kx/M$$

ta sẽ được biểu thức tương tự (2.36) trong đó:

$$a_j(\ell, M_0) = \int_{X_1}^{X_2} \overline{X}_j(x)Q_1(x)dx; \qquad b_j(\ell, M_0) = \int_{X_1}^{X_2} \overline{X}_j(x)Q_2(x)dx$$

$$x_1 = \ell - (h + H_1); \qquad x_2 = \ell - H_1,$$

ở đây do $Q_1(\ell) = Q_2(\ell) = 0$ nên khác với (2.37) và (2.38) a_j và b_j không có số hạng thứ hai ở vế phải.

Với các thông số của môi trường biển như sau:

Chu kỳ sóng $T = 7\,s$; $g = 9,81 m/s^2$ là gia tốc trọng trường; tần số sóng và số sóng được tính theo công thức:

$$n_1 = 2\pi/T; \qquad n_1^2 = gK\text{tg}(Kh)$$

Còn các thông số ρ, E, J, M được cho và tính như ví dụ 1.

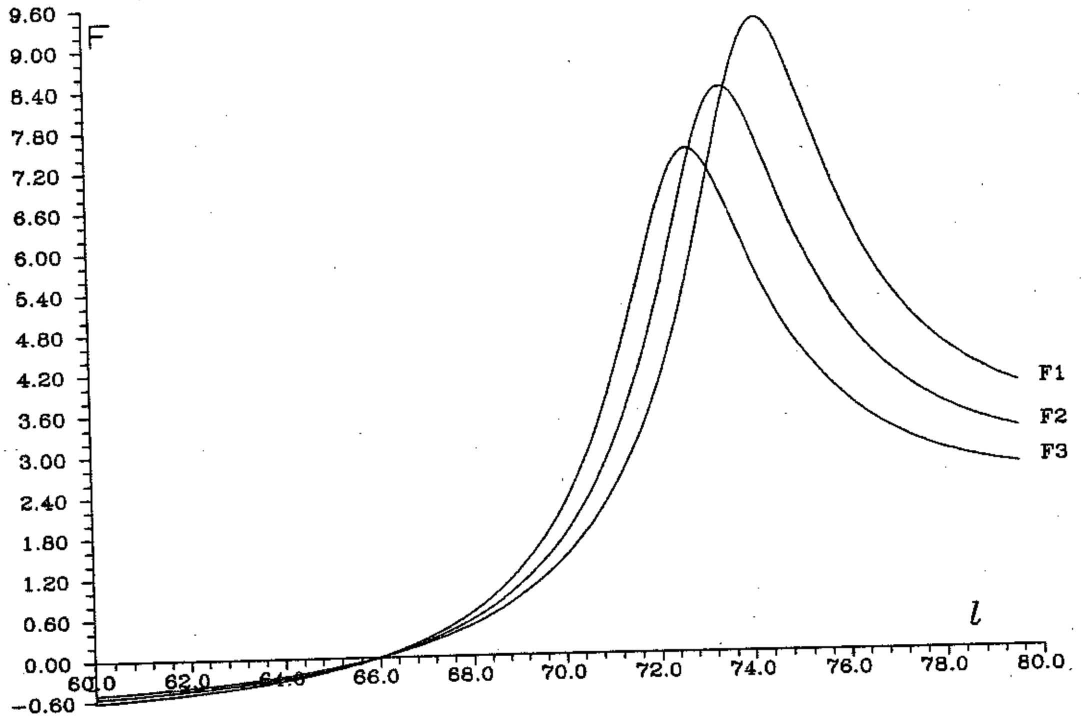
Ta giả sử cho khối lượng tập trung ở đầu cọc thay đổi:

$$M_0[1] = 30000kg; \quad M_0[2] = 32000kg; \quad M_0[3] = 34000kg$$

và đo biên độ dao động ngang ở đầu cọc là:

$$D[1] = 0,698051\,m; \quad D[2] = 0,755803\,m; \quad D[3] = 0,823666\,m$$

Làm tương tự như ví dụ 2 ta có hình 5 và bảng 2



Hình 5

Bảng 2 (Tính trên đoạn [60, 80])

Khối lượng (kg)	Biên độ (m)	$\ell[1]$ (m)
30000	0,698051	65,999998
32000	0,755803	66,000001
34000	0,823666	66,000001

(Với độ chính xác $A_j^2 + B_j^2 < 10^{-6}$)

Từ hình 5 và bảng 2 ta có kết quả $\ell \approx 66\,m$.

Chúng tôi đã lấy hai kết quả của ví dụ 1 và ví dụ 2 để kiểm tra bài toán thuận nhằm tìm lại biên độ dao động ở đầu cọc ứng với các khối lượng thay đổi trong từng ví dụ. Lời giải xác nhận hai kết quả tìm được trong cả hai ví dụ đã nêu là đúng

KẾT LUẬN

Các kết quả đã trình bày ở trên cho ta thấy rằng bằng cách đo dao động tại đầu cọc ứng với khối lượng tập trung ở đầu cọc thay đổi một số lần dưới tác động của tải trọng cưỡng bức, ta có thể xác định được độ dài của cọc. Bài toán được giải bằng phương pháp số và vẽ đồ thị theo ngôn ngữ lập trình PASCAL. Việc chọn một giá trị phù hợp với thực tế trong bài toán đa trị được minh họa qua các ví dụ ứng với trường hợp tải trọng phân bố đều và tải trọng phân bố thay đổi theo độ dài cọc.

Công trình được hoàn thành với sự hỗ trợ tài chính của Chương trình nghiên cứu cơ bản trong lĩnh vực Khoa học tự nhiên

Địa chỉ:
Viện Cơ học TT KHTN & CNQG

Nhận ngày 30/11/1995

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Cao Mệnh - Trần Trọng Toàn. Xác định tham số của dầm bằng phương pháp đo dao động. Tạp chí Cơ học số 3, 1995.
2. Филипов А. П. Колебания механических систем, Издателство "Наукова думка", Киев 1965.
3. Graham Kelly S. Fundamentals of mechanical vibrations. International Edition 1993.
4. Сехниашвили Э. Колебания упругих систем. Изд. "Сабочота сакартбело", Тбилиси 1966.

SUMMARY

DETERMINATION OF BEAMS'S PARAMETERS WITH LUMPED MASS BY USING MEASUREMENT DATA OF VIBRATIONS

In this paper the transverse vibration of the clamped-free beam with lumped mass is investigated. From that the inverse problem for determining the length of the beam on the basis of measurement data of beams's vibration with changing mass is solved by numerical method. The computer programs for the problem are to be applied to some examples and the obtained results are acceptable.

The common solution for problems with different lumped masses is chosen as desirable result.