Tạp chí Cơ học   Journal of Mechanics, NCNST of Vietnam T. XVIII, 1996, No 2 (13 - 19)

DAO ĐỘNG DỪNG Ở TRƯỜNG HỢP SUY BIẾN

NGUYỄN VĂN ĐÌNH

Xét dao động dừng với biên độ và pha hằng (a, θ) xác định bởi hệ hai phương trình (1.2), đại số bậc nhất theo $u = \sin\theta$, $v = \cos\theta$ với các hệ số là đa thức của a và Δ (độ lệch tần).

Thường, trước hết, theo lý thuyết hệ phương trình đại số bậc nhất, chúng ta rút ra (u, v); sau đó, theo công thức lượng giác $u^2 + v^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ suy ra quan hệ biên - tần.

Như thế cần phân biệt hai trường hợp không suy biến và suy biến tương ứng khi định thức của hệ bậc nhất không triệt tiêu hoặc triệt tiêu. Trường hợp không suy biến, hệ đại số có nghiệm duy nhất (u, v) và dễ dàng suy ra quan hệ biên - tần. Trường hợp suy biến hệ đại số hoặc vô nghiệm hoặc có vô số nghiệm; nếu vô nghiệm, hiển nhiên hệ lượng giác cũng vô nghiệm và không có dao động dừng; nếu có vô số nghiệm đại số (u, v), nghiệm nào tương ứng dao động dừng và dao động này có những đặc điểm gì ? Những nhận xét trình bày dưới đây nhằm tìm lời giải đáp cho câu hỏi đặt ra.

§1. DAO ĐỘNG DỪNG Ở TRƯỜNG HỢP KHÔNG SUY BIẾN

Xét hệ dao động á tuyến mô tả bởi hệ phương trình vi phân trung bình

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon\Big\{A(\Delta, a)\sin\theta + B(\Delta, a)\cos\theta - C(\Delta, \theta)\Big\} \\ \dot{\theta} &= \varepsilon\Big\{E(\Delta, a)\sin\theta + F(\Delta, a)\cos\theta - G(\Delta, a)\Big\} \end{aligned} \tag{1.1}$$

trong đó: a, θ - biên độ và pha biến thiên chậm; Δ - độ lệch tần; A, B, C, E, F, G - những đa thức theo a, Δ; ε - tham số bé; dấu "." - ký hiệu đạo hàm theo thời gian t.

Triệt tiêu vế phải hệ (1.1) dẫn đến hệ hai phương trình "đại số lượng giác" xác định biên độ và pha hằng (a, θ) của các chế độ dao động dừng:

$$\begin{aligned} A\sin\theta + B\cos\theta &= C \\ E\sin\theta + F\cos\theta &= G \end{aligned} \tag{1.2}$$

Đây là hệ bậc nhất theo hai ẩn $u = \sin\theta$, $v = \cos\theta$ nên lời giải tùy thuộc các định thức sau:

$$D_0 = \begin{vmatrix} A & B \\ E & F \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} C & B \\ G & F \end{vmatrix} \tag{1.4}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} A & C \\ E & G \end{vmatrix} \tag{1.5}$$

Chú ý rằng các định thức này là đa thức theo Δ, a.

Gọi là không suy biến, trường hợp các giá trị (Δ, a) - điểm (Δ, a) trên mặt $P(\Delta, a)$ không làm triệt tiêu định thức (1.3)

$$D_0 \neq 0 \tag{1.6}$$

Khi đó, từ

$$u = \sin\theta = \frac{D_1}{D_0}, \qquad v = \cos\theta = \frac{D_2}{D_0} \tag{1.7}$$

và công thức lượng giác $u^2 + v^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ dẫn đến quan hệ biên tần:

$$W_1(\Delta, a) = \frac{D_1^2}{D_0^2} + \frac{D_2^2}{D_0^2} - 1 = 0 \tag{1.8}$$

Như sẽ thấy dưới đây, (1.8) chỉ cho một nhánh của đường biên tần $C : a = a(\Delta)$, quy ước gọi là nhánh không suy biến C_1, nằm trên miền $(P - M)$ thỏa mãn (1.6).

§2. DAO ĐỘNG DỪNG Ở TRƯỜNG HỢP SUY BIẾN

Nhánh thứ hai của đường biên tần là nhánh C_2 ở trường hợp suy biến. Đó là trường hợp mà điểm (Δ, a) thuộc tập M làm triệt tiêu định thức (1.3):

$$D_0 = 0 \tag{2.1}$$

Khi đó hệ đại số (1.2) theo (u, v) có thể vô nghiệm hoặc có vô số nghiệm, vô nghiệm nếu:

$$\text{hạng } [D_0] \neq \text{hạng } [\overline{D}] \tag{2.2}$$

và có vô số nghiệm nếu

$$\text{hạng } [D_0] = \text{hạng } [\overline{D}] \tag{2.3}$$

trong đó $[D_0]$, $[\overline{D}]$ là ma trận hệ số và ma trận mở rộng:

$$[D_0] = \begin{bmatrix} A & B \\ E & F \end{bmatrix}, \qquad [\overline{D}] = \begin{bmatrix} A & B & C \\ E & F & G \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Nếu hệ đại số (1.2) vô nghiệm thì hệ lượng giác (1.2) (với Δ, a đã biết) cũng vô nghiệm, dao động dừng không tồn tại trên miền M đường biên tần C chỉ có nhánh không suy biến C_1. Nếu (2.3) thỏa mãn, hệ đại số (1.2) có vô số nghiệm. Để đơn giản, giả thiết hạng $[D_0] = 1$, điều kiện (2.3) dẫn đến:

$$D_1 = 0 \tag{2.5}$$

$$D_2 = 0 \tag{2.6}$$

và hệ đại số (1.2) có vô số nghiệm (một trong hai ẩn u, v có giá trị tùy ý). Tuy nhiên, hệ lượng giác (1.2) (với Δ, a thỏa mãn (2.1), (2.5), (2.6)) có thể vô nghiệm và do đó vẫn không có dao động dừng tương ứng.

Để hệ lượng giác (1.2) có nghiệm, trong vô số nghiệm (u, v) phải chọn được nghiệm thỏa mãn điều kiện $u^2 + v^2 = 1$ và do đó tính được góc θ (pha của dao động dừng tương ứng). Điều kiện để hệ lượng giác (1.2) có nghiệm có thể viết dưới dạng:

$$A^2 + B^2 \geq C^2 \tag{2.7a}$$

$$E^2 + F^2 \geq G^2 \tag{2.7b}$$

(Thường chỉ cần xét một trong hai điều kiện (2.7) trừ khi cả ba số hạng ở một điều kiện triệt tiêu thì phải xét điều kiện còn lại)

§3. HAI NHÁNH CỦA ĐƯỜNG BIÊN TẦN - ĐIỂM KỲ DỊ

Những nhận xét vừa nêu cho thấy, nói chung, đường biên tần $C : a = a(\Delta)$ trên mặt $P(\Delta, a)$ gồm hai nhánh:

- Nhánh không suy biến C_1, nằm trên miền $(P - M)$ thỏa mãn (1.6) và được xác định bởi hệ thức (1.8),
- Nhánh suy biến C_2, nếu tồn tại, nằm trên miền M thỏa mãn (2.1). Nhưng vì phải thỏa mãn (2.5), (2.6) nên C_2 thuộc tập $m \subset M$, tập m thỏa mãn đồng thời (2.1), (2.5), (2.6). Hơn nữa còn phải thỏa mãn (2.7) nên $C_2 \subset m \subset M \subset P(\Delta, a)$

Trục mẫu ở (1.8), chúng ta được hệ thức

$$W(\Delta, a) = D_1^2 + D_2^2 - D_0^2 = 0 \tag{3.1}$$

Hệ thức này cho phép tìm cả hai nhánh không suy biến C_1 và suy biến C_2. Thực vậy, hiển nhiên C_1 thỏa mãn (1.8) nên cũng thỏa mãn (3.1). Mặt khác, nhánh C_2 thỏa mãn (2.1), (2.5), (2.6) nên cũng thỏa mãn (3.1).

Tuy nhiên (3.1) còn chứa những điểm không thuộc đường biên - tần và phải loại bỏ: đó là những điểm thỏa mãn (2.1), (2.5), (2.6) nhưng không thỏa mãn (2.7).

Vậy, để tìm đường biên tần, có thể xuất phát từ hệ thức (3.1), chỉ cần xác định chính xác nhánh C_2 thỏa mãn (2.1), (2.5), (2.6) và (2.7).

Một đặc điểm đáng chú ý: nhánh C_2 thuộc tập điểm kỳ dị của đường (3.1): $W(\Delta, a) = 0$. Thực vậy, chú ý đến (2.1), (2.5), (2.6) dễ dàng thấy, tại các điểm của C_2, các đạo hàm riêng của hàm $W(\Delta, a)$ đối với Δ, a đều triệt tiêu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \Delta} &= 2\Big(D_1 \frac{\partial D_1}{\partial \Delta} + D_2 \frac{\partial D_2}{\partial \Delta} - D_0 \frac{\partial D_0}{\partial \Delta}\Big) = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial a} &= 2\Big(D_1 \frac{\partial D_1}{\partial a} + D_2 \frac{\partial D_2}{\partial a} - D_0 \frac{\partial D_0}{\partial a}\Big) = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Tính chất của điểm kỳ dị có thể được nhận biết qua biểu thức khai triển của hàm $W(\Delta, a)$ ở lân cận điểm kỳ dị. Trường hợp thường gặp, có thể dùng các tiêu chuẩn quen biết [1] như nếu:

$$\Big(\frac{\partial^2 W}{\partial \Delta \partial a}\Big)^2 - \Big(\frac{\partial^2 W}{\partial \Delta^2}\Big)\Big(\frac{\partial^2 W}{\partial a^2}\Big) \quad \begin{cases} > 0 & \text{có điểm nút} \\ < 0 & \text{có điểm lùi} \end{cases} \tag{3.3}$$

Cuối cùng, chú ý rằng khi đã xác định được điểm (Δ, a) trên nhánh C_2, để tìm pha θ chúng ta trở lại hệ lượng giác (1.2). Thí dụ, có thể từ phương trình thứ nhất trong hệ (1.2), rút ra

$$\cos(\theta - \xi) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \theta = \xi \pm \arccos\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \mathrm{tg}\xi = \frac{A}{B} \tag{3.4}$$

§4. ỔN ĐỊNH CỦA DAO ĐỘNG DỪNG TRONG TRƯỜNG HỢP SUY BIẾN

Có thể khảo sát ổn định của dao động dừng ở cả hai trường hợp không suy biến và suy biến theo cùng một trình tự. Trước hết, từ (1.1) lập hệ biến phân

$$\begin{aligned} \delta \dot{a} &= \varepsilon(A' \sin\theta + B' \cos\theta - C')\delta a + \varepsilon(A \cos\theta - B \sin\theta)\delta\theta \\ \delta \dot{\theta} &= \varepsilon(E' \sin\theta + F' \cos\theta - G')\delta a + \varepsilon(E \cos\theta - F \sin\theta)\delta\theta \end{aligned} \tag{4.1}$$

trong đó dấu "'" là ký hiệu đạo hàm riêng theo a

Phương trình đặc trưng có dạng

$$\rho^2 + \varepsilon h_1 \rho + h_2 = 0 \tag{4.2}$$

và điều kiện đủ để ổn định tiệm cận là

$$\begin{aligned} -h_1 &= (A' - F)\sin\theta + (B' + E)\cos\theta - C' < 0 \\ h_2 &= (A'\sin\theta + B'\cos\theta - C')(E\cos\theta - F\sin\theta) \\ &\quad - (E'\sin\theta + F'\cos\theta - G')(A\cos\theta - B\sin\theta) > 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Trường hợp không suy biến, thay $\sin\theta$, $\cos\theta$ bởi các biểu thức (1.7), vế trái các điều kiện (4.3) sẽ biểu diễn qua (Δ, a) và cho phép xác định các đoạn ổn định trên nhánh C_1 của đường biên tần.

Trường hợp suy biến, góc pha θ cũng được tính từ (1.2), thí dụ theo công thức (3.4). Các điểm của nhánh C_2 thường là rời rạc, mỗi điểm ứng với nhiều pha nghĩa là ứng với nhiều chế độ dao động dừng, có thể các pha đó - các dao động dừng - đều ổn định hoặc không ổn định hoặc pha này ổn định trong khi pha khác không ổn định

§5. HỆ THÔNG SỐ - CƯỠNG BỨC Ở CỘNG HƯỞNG CƠ BẢN

Trường hợp suy biến thường xảy ra khi có tương tác phức tạp như ở hệ thông số cưỡng bức đã xét trong [2] trên cơ sở các nhận xét vừa trình bày. Để minh họa rõ hơn và chính xác hơn, dưới đây lược tóm một số kết quả

Phương trình vi phân mô tả hệ có dạng:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon\Big\{ - hx^2 + \Delta x - \gamma x^3 + 2px\cos 2\omega t + q\cos(\omega t + \sigma)\Big\} \tag{5.1}$$

trong đó $h > 0$, $p > 0$, $q > 0$, $0 \le \sigma \le 2\pi$.

Hệ phương trình vi phân trung bình theo biên độ và pha (a, θ) là:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{\varepsilon}{2\omega}\Big\{h\omega a + pa\sin 2\theta + q\sin(\theta - \sigma)\Big\} \\ \dot{\theta} &= -\frac{\varepsilon}{2\omega a}\Big\{\Big(\Delta - \frac{3\gamma}{4}a^2\Big)a + pa\cos^2\theta + q\cos(\theta - \sigma)\Big\} \end{aligned} \tag{5.2}$$

Biên độ và pha hằng (a, θ) của dao động dừng được xác định từ hệ "đại số - lượng giác" có được khi triệt tiêu vế phải của hệ (5.2), tương đương với:

$$h\omega a\sin\theta - \Big[\Big(\frac{3\gamma}{4}a^2 - \Delta\Big) - p\Big]a\cos\theta = -q\cos\sigma \tag{5.3a}$$

$$\Big[\Big(\frac{3\gamma}{4}a^2 - \Delta\Big) + p\Big]a\sin\theta + h\omega a\cos\theta = q\sin\sigma \tag{5.3b}$$

Chúng ta có:

$$D_0 = \begin{vmatrix} h\omega a & -\Big[\Big(\frac{3\gamma}{4}a^2 - \Delta\Big) - p\Big]a \\ \Big[\Big(\frac{3\gamma}{4}a^2 - \Delta\Big) + p\Big]a & h\omega a \end{vmatrix} = a^2 D \tag{5.4}$$

với

$$D = \left(\frac{3\gamma}{4}a^2 - \Delta\right)^2 + h^2\omega^2 - p^2 \tag{5.5}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -q\cos\sigma & -\left[\left(\frac{3\gamma}{4}a^2 - \Delta\right) - p\right]a \\ q\sin\sigma & h\omega a \end{vmatrix} = -aq\left\{h\omega\cos\sigma - \left[\left(\frac{3\gamma}{4}a^2 - \Delta\right) - p\right]\sin\sigma\right\} \tag{5.6}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} h\omega a & -q\cos\sigma \\ \left[\left(\frac{3\gamma}{4}a^2 - \Delta\right) + p\right]a & q\sin\sigma \end{vmatrix} = aq\left\{h\omega\sin\sigma + \left[\left(\frac{3\gamma}{4}a^2 - \Delta\right) + p\right]\cos\sigma\right\} \tag{5.7}$$

Tập M làm triệt tiêu định thức D_0 là đường biên - tần của hệ thuần thông số ($q = 0$)

$$D = \left(\frac{3\gamma}{4}a^2 - \Delta\right)^2 + h^2\omega^2 - p^2 = 0 \tag{5.8}$$

Trường hợp không suy biến, $D_0 \neq 0$, từ (5.3) có thể rút ra $\sin\theta$, $\cos\theta$, từ đó suy ra hệ thức xác định nhánh C nằm trên miền $(P - M)$ của đường biên tần

$$\begin{aligned} &W_1(\Delta, a^2) = \\ &= \frac{q^2}{a^2D^2}\left\{\left\langle h\omega\cos\sigma - \left[\left(\frac{3\gamma}{4}a^2 - \Delta\right) - p\right]\sin\sigma\right\rangle^2 + \left\langle h\omega\sin\sigma + \left[\left(\frac{3\gamma}{4}a^2 - \Delta\right) + p\right]\cos\sigma\right\rangle^2 - 1 = \right. \\ &= \frac{q^2}{a^2D^2}\left\{\left[\left(\frac{3\gamma}{4}a^2 - \Delta\right) + p\cos 2\sigma\right]^2 + \left[h\omega + p\sin 2\sigma\right]^2\right\} - 1 = 0 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Để tìm nhánh C_2, trước hết tìm tập $m \subset M$ đồng thời thỏa mãn

$$D_0 = 0 \quad (a) \qquad D_1 = 0 \quad (b) \qquad D_2 = 0 \quad (c) \tag{5.10}$$

Hai điều kiện (5.10 b, c) tương đương với hệ:

$$\begin{aligned} h\omega + p\sin 2\sigma = 0 \quad (a) \\ \left(\frac{3\gamma}{4}a^2 - \Delta\right) + p\cos 2\sigma = 0 \quad (b) \end{aligned} \tag{5.11}$$

cho một nghiệm - một điểm $I(\Delta, a^2)$ - hiển nhiên thỏa mãn (5.10a):

$$\begin{aligned} \omega^2 = \frac{p^2}{h^2}\sin^2 2\sigma \quad \text{hay} \quad \Delta = -1 + \frac{p^2}{h^2}\sin^2 2\sigma \\ \frac{3\gamma}{4}a^2 = \Delta - p\cos 2\sigma = -1 - \frac{p^2}{h^2}\sin^2 2\sigma - p\cos 2\sigma \end{aligned} \tag{5.12}$$

Vậy tập m chỉ là một điểm I, được chấp nhận nếu $a^2 > 0$. Tại I, điều kiện có nghiệm của hệ lượng giác (5.3) là:

$$\begin{aligned} h^2\omega^2a^2 + \left[\left(\frac{3\gamma}{4}a^2 - \Delta\right) - p\right]^2 \geq q^2\cos^2\sigma \quad \text{hay} \quad (4a^2p^2 - q^2)\cos^2\sigma \geq 0 \\ \left[\left(\frac{3\gamma}{4}a^2 - \Delta\right) + p\right]^2 a^2 + h^2\omega^2a^2 \geq q^2\sin^2\sigma \quad \text{hay} \quad (4a^2p^2 - q^2)\sin^2\sigma \geq 0 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Vậy I (nhánh C_2) chỉ thuộc đường biên tần nếu:

$$a^2 \geq \frac{q^2}{4p^2} \tag{5.14}$$

Cả hai nhánh C_1, C_2 của đường biên tần đều thỏa mãn hệ thức

$$W(\Delta, a^2) = q^2\left\{\left[\left(\frac{3\gamma}{4}a^2 - \Delta\right) + p\cos 2\sigma\right]^2 + [h\omega + p\sin 2\sigma]^2\right\} - a^2D^2 = 0 \tag{5.15}$$

nhưng để có đúng hai nhánh C_1, C_2 phải loại khỏi đường (5.15) những điểm thỏa mãn (5.10 a, b, c) nhưng không thỏa mãn (5.13).

Có thể chứng minh I là điểm nút khi $a^2 > \dfrac{q^2}{4p^2}$, điểm lùi khi $a^2 = \dfrac{q^2}{4p^2}$, điểm cô lập (không thuộc C_2) khi $a^2 < \dfrac{q^2}{4p^2}$.

Để xét ổn định, trong [2] đã lập hệ biến phân, lập phương trình đặc tính, và điều kiện đủ để có ổn định tiệm cận là:

$$D + 2\left(\frac{3\gamma}{4}a^2\right)\left[\left(\frac{3\gamma}{4}a^2 - \Delta\right) + p\cos 2\theta\right] > 0 \tag{5.16}$$

hay (thay $\cos 2\theta$ bởi biểu thức tìm được khi triệt tiêu vế phải của (5.2)):

$$D + 2\left(\frac{3\gamma}{4}a^2\right)\left[2\left(\frac{3\gamma}{4}a^2 - \Delta\right) - \frac{q}{a}\cos(\theta - \sigma)\right] > 0 \tag{5.17}$$

Trường hợp không suy biến, dễ dàng tính được $\sin\theta = \dfrac{D_1}{D_0}$, $\cos\theta = \dfrac{D_2}{D_0}$ và điều kiện (5.17) đưa về dạng:

$$-\frac{1}{D}\frac{\partial W}{\partial a^2} > 0 \tag{5.18}$$

Trường hợp suy biến, nghĩa là tại I, giải hệ (5.3) chúng ta được:

$$\cos(\theta + \sigma) = -\frac{q}{2ap} \quad \text{hay} \quad \theta = -\sigma \pm \xi, \quad \xi = \arccos\frac{-q}{2ap} \tag{5.19}$$

Điều kiện ổn định (5.17) trở thành:

$$-2p\cos 2\sigma - \frac{q}{a}\cos(-2\sigma \pm \xi) > 0 \tag{5.20}$$

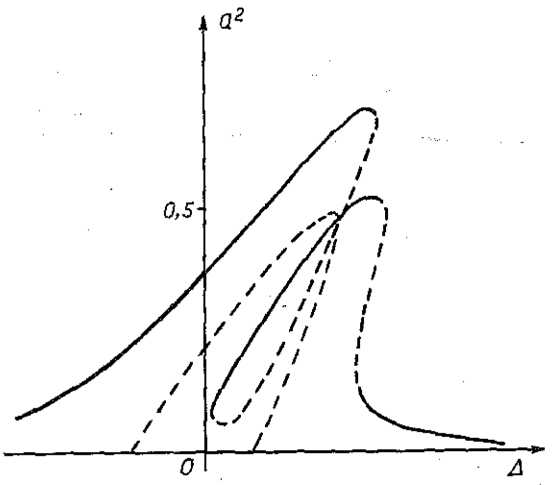
và dẫn đến:

$$(q^2 - 4p^2a^2)\cos 2\sigma \mp q\sin 2\sigma\sqrt{4a^2p^2 - q^2} > 0 \tag{5.21}$$

Thí dụ: $\gamma = 0,8$, $h = 0,22$, $p = 0,25$, $q = 0,1$, $\sigma = 3\pi/4$ điểm I có "tọa độ": $\Delta = 0,2913$, $a^2 = 0,4855 > \dfrac{q^2}{4p^2} = 0,04$ và điều kiện ổn định là $\mp q > 0$, một trong hai chế độ dao động dừng biểu diễn bởi điểm nút I là ổn định, dao động kia không ổn định, đường biên - tần cho trên hình 1

KẾT LUẬN

Nội dung trình bày trên cho thấy sự cần thiết phải chú ý đến nghiệm dao động dừng trong trường hợp suy biến. Trên đường biên-tần những nghiệm này được biểu diễn bởi những điểm kỳ dị, tương ứng nhiều pha, có thể ổn định hoặc không ổn định. Dựa vào điểm kỳ dị có thể phân biệt các dạng đường biên tần có thể có trong hệ và sự chuyển đổi của các đường biên tần theo một thông số nào đó.



Hình 1

Công trình được hoàn thành với sự hỗ trợ tài chính của Chương trình nghiên cứu cơ bản trong lĩnh vực Khoa học tự nhiên

Địa chỉ:
Viện Cơ học TT KHTN & CNQG

Nhận ngày 20/10/1995

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Норден А. П. Краткий курс дифференциальной геометрии. Физматгиз, Москва 1958.
2. Nguyen Van Dinh. Interaction between parametric and forced oscillations in fundamental resonance. Journal of Mechanics, NCNST of Vietnam T. XVII, No 3, 1995 (12-19).

SUMMARY

STATIONARY OSCILLATIONS IN DEGENERATED CASE

In the present paper, some remarks about stationary oscillations in degenerated case are presented. It is shown that these oscillations may exist, may be stable or unstable and they are represented by singular points of the response curve.

Cả hai nhánh C_1, C_2 của đường biên tần đều thỏa mãn hệ thức

$$W(\Delta, a^2) = q^2\left\{\left[\left(\frac{3\gamma}{4}a^2 - \Delta\right) + p\cos 2\sigma\right]^2 + [h\omega + p\sin 2\sigma]^2\right\} - a^2D^2 = 0 \tag{5.15}$$

nhưng để có đúng hai nhánh C_1, C_2 phải loại khỏi đường (5.15) những điểm thỏa mãn (5.10 a, b, c) nhưng không thỏa mãn (5.13).

Có thể chứng minh I là điểm nút khi $a^2 > \frac{q^2}{4p^2}$, điểm lùi khi $a^2 = \frac{q^2}{4p^2}$, điểm cô lập (không thuộc C_2) khi $a^2 < \frac{q^2}{4p^2}$.

Để xét ổn định, trong [2] đã lập hệ biến phân, lập phương trình đặc tính, và điều kiện đủ để có ổn định tiệm cận là:

$$D + 2\left(\frac{3\gamma}{4}a^2\right)\left[\left(\frac{3\gamma}{4}a^2 - \Delta\right) + p\cos 2\theta\right] > 0 \tag{5.16}$$

hay (thay $\cos 2\theta$ bởi biểu thức tìm được khi triệt tiêu vế phải của (5.2)):

$$D + 2\left(\frac{3\gamma}{4}a^2\right)\left[2\left(\frac{3\gamma}{4}a^2 - \Delta\right) - \frac{q}{a}\cos(\theta - \sigma)\right] > 0 \tag{5.17}$$

Trường hợp không suy biến, dễ dàng tính được $\sin\theta = \frac{D_1}{D_0}$, $\cos\theta = \frac{D_2}{D_0}$ và điều kiện (5.17) đưa về dạng:

$$-\frac{1}{D}\frac{\partial W}{\partial a^2} > 0 \tag{5.18}$$

Trường hợp suy biến, nghĩa là tại I, giải hệ (5.3) chúng ta được:

$$\cos(\theta + \sigma) = -\frac{q}{2ap} \quad \text{hay} \quad \theta = -\sigma \pm \xi, \quad \xi = \arccos\frac{-q}{2ap} \tag{5.19}$$

Điều kiện ổn định (5.17) trở thành:

$$-2p\cos 2\sigma - \frac{q}{a}\cos(-2\sigma \pm \xi) > 0 \tag{5.20}$$

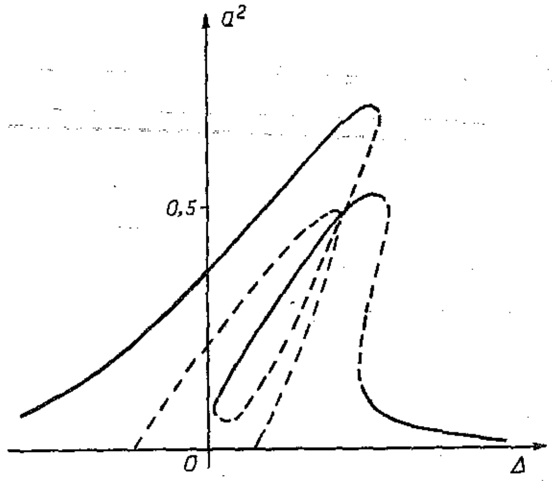
và dẫn đến:

$$(q^2 - 4p^2a^2)\cos 2\sigma \mp q\sin 2\sigma\sqrt{4a^2p^2 - q^2} > 0 \tag{5.21}$$

Thí dụ: $\gamma = 0,8$, $h = 0,22$, $p = 0,25$, $q = 0,1$, $\sigma = 3\pi/4$ điểm I có "tọa độ": $\Delta = 0,2913$, $a^2 = 0,4855 > \frac{q^2}{4p^2} = 0,04$ và điều kiện ổn định là $\mp q > 0$, một trong hai chế độ dao động dừng biểu diễn bởi điểm nút I là ổn định, dao động kia không ổn định, đường biên - tần cho trên hình 1

KẾT LUẬN

Nội dung trình bày trên cho thấy sự cần thiết phải chú ý đến nghiệm dao động dừng trong trường hợp suy biến. Trên đường biên-tần những nghiệm này được biểu diễn bởi những điểm kỳ dị, tương ứng nhiều pha, có thể ổn định hoặc không ổn định. Dựa vào điểm kỳ dị có thể phân biệt các dạng đường biên tần có thể có trong hệ và sự chuyển đổi của các đường biên tần theo một thông số nào đó.



Hình 1

Công trình được hoàn thành với sự hỗ trợ tài chính của Chương trình nghiên cứu cơ bản trong lĩnh vực Khoa học tự nhiên

Địa chỉ:
Viện Cơ học TT KHTN & CNQG

Nhận ngày 20/10/1995

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Норден А. П. Краткий курс дифференциальной геометрии. Физматгиз, Москва 1958.
2. Nguyen Van Dinh. Interaction between parametric and forced oscillations in fundamental resonance. Journal of Mechanics, NCNST of Vietnam T. XVII, No 3, 1995 (12-19).

SUMMARY

STATIONARY OSCILLATIONS IN DEGENERATED CASE

In the present paper, some remarks about stationary oscillations in degenerated case are presented. It is shown that these oscillations may exist, may be stable or unstable and they are represented by singular points of the response curve.