Tạp chí Cơ học Journal of Mechanics, NCNST of Vietnam T. XVIII, 1996, No 1 (8 - 14)

PHƯƠNG PHÁP GẦN ĐÚNG XÁC ĐỊNH THAM SỐ HỆ DAO ĐỘNG RÚT GỌN

PHAN NGUYÊN DI

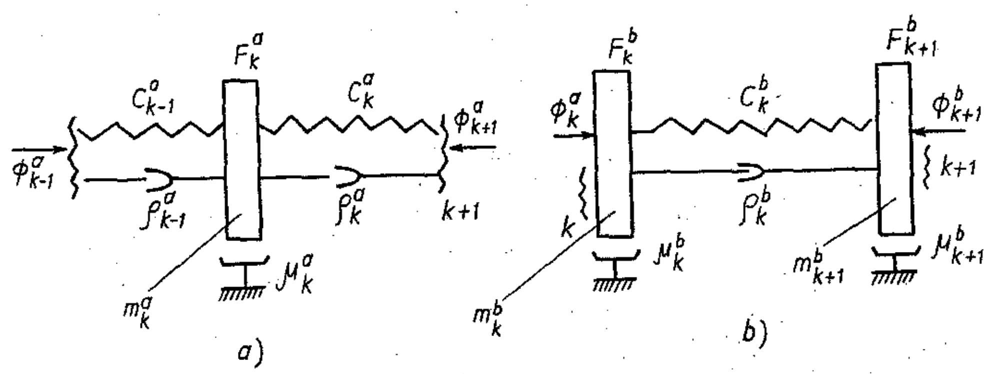
ĐẶT VẤN ĐỀ

Xác định các tham số của một hệ dao động phù hợp với các đặc trưng động lực học nhưng với yêu cầu mô hình đơn giản, ít bậc tự do là một bài toán quan trọng của động lực học máy. Nếu chỉ quan tâm đến tần số riêng của hệ (tham số chỉ gồm các khối lượng tập trung hoặc mô men quán tính và khâu nối đàn hồi), Rivin [1] đã đưa ra phương pháp chia hoặc ghép các khối lượng cạnh nhau. Mỗi bước tiến hành theo cách này số bậc tự do của hệ rút đi một, hệ mới nhận được có $n-1$ tần số, theo thứ tự xấp xỉ bằng $n-1$ tần số hệ ban đầu. Phát triển theo hướng này, Baran [2] thêm một tham số mới là hệ số cản tương đối ở trong các khâu đàn hồi.

Trong [3] tác giả đã xét kể cả trường hợp có lực ngoài tác dụng và lực ma sát tuyệt đối nhưng với giả thiết lực cản tuyệt đối tỷ lệ bậc nhất với vận tốc và lực kích động ngoài là những hàm điều hòa hoặc tuần hoàn. Dưới đây sẽ xét trường hợp lực tác dụng là tùy ý, có ví dụ minh họa.

§1. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

Chia hệ dao động thành hai loại hệ con cơ bản như mô hình 1a và 1b. Các tham số được thể hiện trên mô hình gồm: khối lượng tập trung (hoặc mô men quán tính) m_k; các độ cứng của phần tử đàn hồi C_k, lực cản tương đối trong các khâu đàn hồi với hệ số cản ρ_k; lực tác dụng ngoài gồm F_k và lực cản tuyệt đối tỷ lệ với vận tốc, hệ số cản μ_k. Để phân biệt các tham số trên mô hình loại a hay b sẽ dùng các chỉ số a hoặc b trên các tham số ấy.



Hình 1

Phương trình dao động của mô hình 1a là:

$$
\begin{aligned}
&m_k \ddot{x}_k^a + C_{k-1}^a (x_k^a - x_{k-1}^a) + \rho_{k-1}^a (\dot{x}_k^a - \dot{x}_{k-1}^a) + \\
&\qquad + C_k^a (x_k^a - x_{k+1}^a) + \rho_k^a (\dot{x}_k^a - \dot{x}_{k+1}^a) + \mu_k^a \dot{x}_k^a = F_k^a(t) \\
&\phi_{k-1}^a = C_{k-1}^a (x_{k-1}^a - x_k^a) + \rho_{k-1}^a (\dot{x}_{k-1}^a - \dot{x}_k^a) \\
&\phi_{k+1}^a = C_k^a (x_k^a - x_{k+1}^a) + \rho_k^a (\dot{x}_k^a - \dot{x}_{k+1}^a)
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Phương trình dao động của mô hình 1b là:

$$
\begin{aligned}
m_k^b \ddot{x}_k^b + C_k^b (x_k^b - x_{k+1}^b) + \rho_k^b (\dot{x}_k^b - \dot{x}_{k+1}^b) + \mu_k^b \dot{x}_k^b = \phi_k^b + F_k^b(t) \\
m_{k+1}^b \ddot{x}_{k+1}^b + C_k (x_{k+1}^b - x_k^b) + \rho_k^b (\dot{x}_{k+1}^b - \dot{x}_k^b) + \mu_{k+1}^b \dot{x}_{k+1}^b = -\phi_{k+1}^b + F_{k+1}^b(t)
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Trong các phương trình (1.1), (1.2) $F_i(t)$, $i = k-1, k, k+1$ là những hàm tùy ý. Dùng phép biến đổi Laplace [4]

$$
g_i(s) = L\{F_i(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F_i(t) dt \tag{1.3}
$$

ở đây chọn $s = i\omega$, ω là tần số riêng của hệ.

Ngoài ra dùng các ký hiệu sau:

$$
\begin{aligned}
L\{x_i\} &= \varphi_i \\
L\{\phi_i\} &= P_i \\
i &= k-1,\ k,\ k+1.
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Do

$$
\begin{aligned}
L\{\dot{x}_i\} &= sL\{x_i\} - x_i(0) \\
L\{\ddot{x}_i\} &= s^2 L\{x_i\} - s x_i(0) - \dot{x}_i(0)
\end{aligned}
$$

cho nên nếu chọn điều kiện ban đầu là hệ đứng yên sẽ nhận được:

$$
L\{\dot{x}_i\} = s\varphi_i; \qquad L\{\ddot{x}_i\} = s^2 \varphi_i \tag{1.5}
$$

Sử dụng phép biến đổi Laplace cho (1.1) và đặt

$$
\begin{aligned}
H_\nu^a &= C_\nu^a + i\omega\rho_\nu^a \\
\theta_\nu^a &= m_\nu^a - i\frac{\mu_\nu^a}{\omega} \\
\nu &= k-1,\ k,\ k+1
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

$$
\omega_{ak}^2 = \frac{H_{k-1}^a + H_k^a}{\theta_k^a} \tag{1.7}
$$

Sau khi khử φ_k^a ta đưa (1.1) về dạng

$$
\begin{aligned}
\varphi_{k-1}^a &= \left(\frac{1}{H_{k-1}^a} + \frac{1}{H_k^a}\right)\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{ak}}\right) P_{k+1}^a + \\
&\quad + \left(1 - \frac{H_{k-1}^a + H_k^a}{H_{k-1}^a} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_{ak}}\right) \varphi_{k+1}^a - \frac{g_k^a}{H_{k-1}^a} \\
P_{k-1}^a &= \left(1 - \frac{H_{k-1}^a + H_k^a}{H_k^a} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_{ak}^2}\right) P_{k+1}^a - \omega^2 \theta_k^a \varphi_{k+1}^a - g_k^a
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

Do phép biến đổi Laplace là phép biến đổi tuyến tính và có phép biến đổi ngược nên khi trở lại hàm gốc các đẳng thức (1.8) dẫn đến

$$\begin{aligned} x^a_{k-1} &= \left(\frac{1}{H^a_{k-1}} + \frac{1}{H^a_k}\right)\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega^2_{ak}}\right)\phi^a_{k+1} + \\ &+ \left(1 - \frac{H^a_{k-1} + H^a_k}{H^a_{k-1}} \cdot \omega^2 \omega^2_{ak}\right) x^a_{k+1} - \frac{P^a_k}{H^a_{k-1}} \\ \phi^a_{k-1} &= \left(1 - \frac{H^a_{k-1} + H^a_k}{H^a_k} \cdot \frac{\omega^2}{\omega^2_{ak}}\right)\phi^a_{k+1} - \omega^2 \theta^a_k x^a_{k+1} - F^a_k \end{aligned} \tag{1.9}$$

Hoàn toàn tương tự, dùng phép biến đổi Laplace trên các phương trình (1.2), sử dụng ký hiệu (1.6) và đặt

$$\omega^2_{bk} = \frac{\theta^b_k + \theta^b_{k+1}}{\theta^b_k\, \theta^b_{k+1}} \cdot H^b_k \tag{1.10}$$

sau phép biến đổi ngược ta được:

$$\begin{aligned} x^b_k &= \left(1 - \frac{\theta^b_k + \theta^b_{k+1}}{\theta^b_k} \cdot \frac{\omega^2}{\omega^2_{bk}}\right) x^b_{k+1} + \frac{\phi^b_{k+1}}{H^b_k} - \frac{P^b_{k+1}}{H^b_k} \\ \phi^b_k &= \left(1 - \frac{\theta^b_k + \theta^b_{k+1}}{\theta^b_{k+1}} \cdot \frac{\omega^2}{\omega^2_{bk}}\right)\phi^b_{k+1} - \omega^2(\theta^b_k + \theta^b_{k+1})\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega^2_{bk}}\right) x^b_{k+1} - \\ &- \left(1 - \frac{\theta^b_k + \theta^b_{k+1}}{\theta^b_{k+1}} \cdot \frac{\omega^3}{\theta^b_{bk}}\right) F^b_{k+1} - F^b_k \end{aligned} \tag{1.11}$$

Nếu xác định được trạng thái động lực học tại bất kỳ một mặt cắt nào của hệ (ở đây trạng thái động lực học là (x, ϕ) thì xem như hệ dao động được xác định. Đẳng thức (1.9) là biểu diễn trạng thái của hệ tại trạng thái $k-1$ qua trạng thái mặt cắt $k+1$ của mô hình loại a, còn đẳng thức (1.11) là trạng thái tại mặt cắt k biểu diễn qua trạng thái tại mặt cắt $k+1$ của mô hình loại b.

Vấn đề là cần chọn các tham số thích hợp để thay thế mô hình loại a bằng mô hình loại b. Chọn

$$\begin{aligned} \theta^b_k &= \frac{H^a_{k-1}}{H^a_k + H^a_{k-1}} \cdot \theta^a_k \\ \theta^b_{k+1} &= \frac{H^a_k}{H^a_k + H^a_{k-1}} \cdot \theta^a_k \\ \frac{1}{K^b_k} &= \frac{1}{H^a_k} + \frac{1}{H^a_{k-1}} \\ F^b_k &= \frac{H^a_{k-1}}{H^a_k + H^a_{k-1}} \cdot F^a_k \\ F^b_{k+1} &= \frac{H^a_k}{H^a_k + H^a_{k-1}} \cdot F^a_k \end{aligned} \tag{1.12}$$

Thay (1.12) vào (1.10) ta nhận được (1.7), nghĩa là "tần số riêng" của hai hệ con trùng nhau. Cũng vậy, đưa (1.12) vào (1.11) nhận được:

$$\begin{aligned} x'^a_k &= \left(\frac{1}{H^a_k} + \frac{1}{H^a_{k-1}}\right)\phi'^a_{k+1} + \left(1 + \frac{H^a_{k-1} + H^a_k}{H^a_{k-1}} \cdot \frac{\omega^2}{\omega^2_{ak}}\right) x'^a_{k+1} - \frac{F^a_k}{H^a_{k-1}} \\ \phi'^a_k &= \left(1 - \frac{H^a_{k-1} + H^a_k}{H^a_k} \cdot \frac{\omega^2}{\omega^2_{ak}}\right)\phi'^a_{k+1} - \omega^2 \theta^a_k \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega^2_{ak}}\right) x'^a_{k+1} - \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega^2_{ak}}\right) F^a_k \end{aligned} \tag{1.13}$$

So sánh (1.9) và (1.13) ta thấy nếu

$$\delta = \frac{\omega^2}{\omega_{ak}^2} \ll 1 \tag{1.14}$$

thì trạng thái ở mặt cắt biểu diễn qua nhau là giống nhau, nghĩa là mô hình loại a có thể thay bằng mô hình loại b, nói một cách khác, ta chia mô hình loại a ghép vào các khối lượng bên cạnh, các tham số mới được xác định từ (1.12).

Thay (1.6) vào (1.7) nhận được

$$\omega_{ak}^2 = \frac{C_k^a + C_{k-1}^a}{m_k^a - i \cdot \dfrac{\mu_k^a}{\omega}} + i\omega \cdot \frac{\rho_k^a + \rho_{k-1}^a}{m_k^a - i \cdot \dfrac{\mu_k^a}{\omega}} \tag{1.15}$$

Trong thực tế, các hệ số cản thường nhỏ và thỏa mãn

$$\begin{aligned} \mu_k^a &\ll \omega m_k^a \\ \rho_k^a &\ll \frac{C_k^a}{\omega} \end{aligned} \tag{1.16}$$

Với những giả thiết này, từ (1.6) và công thức thứ nhất của (1.12) ta có

$$m_k^b - i \cdot \frac{\mu_k^b}{\omega} = \frac{C_{k-1}^a}{C_{k-1}^a + C_k^a} \left(m_k^a - i \cdot \frac{\mu_k^a}{\omega} \right)$$

và nhận được

$$m_k^b = \frac{C_{k-1}^a}{C_k^a + C_{k-1}^a} \cdot m_k^a; \qquad \mu_k^b = \frac{C_{k-1}^a}{C_K^a + C_{k-1}^a} \cdot \mu_k^a \tag{1.17}$$

Tương tự, từ công thức thứ hai của (1.12)

$$m_{k+1}^b = \frac{C_{k-1}^a}{C_k^a + C_{k-1}^a} \cdot m_k^a; \qquad \mu_{k+1}^b = \frac{C_{k-1}^a}{C_k^a + C_{k-1}^a} \cdot \mu_k^a \tag{1.18}$$

Ngoại lực được phân theo

$$F_{k+1}^b = \frac{C_{k-1}^a}{C_k^a + C_{k-1}^a} \cdot F_k^a; \qquad F_{k+1}^b = \frac{C_k^a}{C_k^a + C_{k-1}^a} \cdot F_k^a \tag{1.19}$$

Độ cứng của phần tử đàn hồi và hệ số cản tương đối được tính từ đẳng thức thứ ba của (1.12)

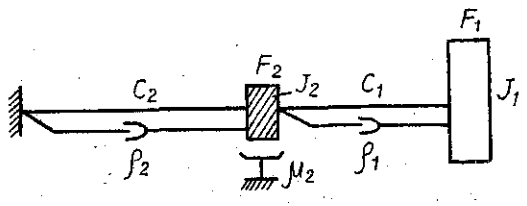
$$C_k^b = \frac{C_k^a C_{k-1}^a}{C_k^a + C_{k-1}^a}\ ; \quad \rho_k^b = \left[\frac{\rho_k^a}{(C_k^a)^2} + \frac{\rho_{k-1}^a}{(C_{k-1}^a)^2} \right] \cdot \left[\frac{C_k^a C_{k-1}^a}{C_k^a + C_{k-1}^a} \right]^2 \tag{1.20}$$

Các tham số khối lượng, hệ số cản tuyệt đối cũng như lực ngoài được ghép với phần tử bên cạnh. Trường hợp một đầu bị ngàm (lò xo bị gắn chặt một đầu), phần tham số gắn cho nó được bỏ qua.

§2. VÍ DỤ

Xét hệ dao động xoắn hai bậc tự do, với các tham số cho như hình 2.
$J_1 = 3,5\ Kpcms^2$; $J_2 = 0,2\ Kpcms^2$; $C_1 = C - 2 = 10^4\ Kpcm$
Lực tác dụng

$$F_1 = \begin{cases} 0 & \text{với } t < 0 \\ F_{10} & \text{với } t \geq 0 \end{cases} \qquad F_2 = \begin{cases} 0 & \text{với } t < 0 \\ F_{20} & \text{với } t \geq 0 \end{cases}$$

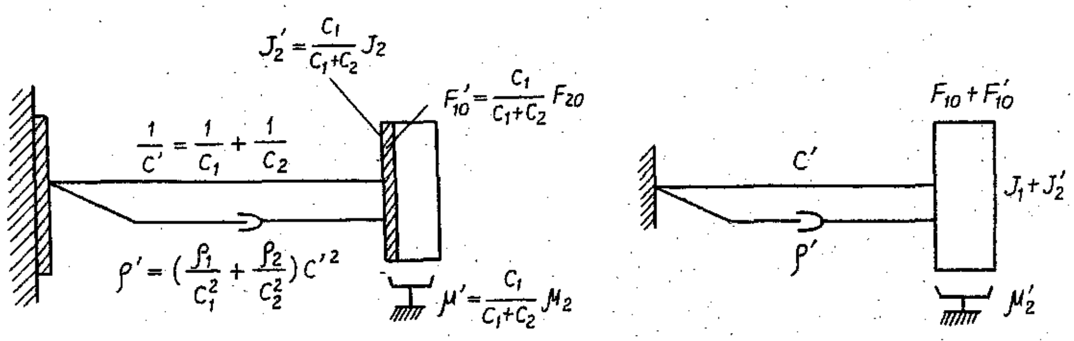


Hình 2

Dễ dàng tìm được tần số riêng của hệ

$f_1 = 5,95\,\mathrm{Hz}$; $f_2 = 50,71\,\mathrm{Hz}$. $(\omega_1 = 37,39\,;\ \ \omega_2 = 318,65)$

Chia khối lượng J_2 ra hai bên, thay đổi độ cứng của 2 phần tử đàn hồi, các tham số này được tính theo (1.17), (1.18), (1.19), (1.20) ta nhận được hệ một bậc tự do với các tham số cho theo hình 3.



Hình 3

Phương trình dao động của mô hình hai bậc tự do là:

$$
\begin{aligned}
&J_1\ddot{\varphi}_1 + \rho_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + C_1(\varphi_1 - \varphi_2) = F_{10} \\
&J_2\ddot{\varphi}_2 + \mu_2\dot{\varphi}_2 + \rho_2\dot{\varphi}_2 + C_2\varphi_2 - \rho_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - C_1(\varphi_1 - \varphi_2) = F_{20}
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Đặt

$$\mu_2 + \rho_2 = \sigma_2\,; \quad \tau_1 = \sqrt{\frac{C_1}{J_1}}\cdot t\,; \quad \frac{J_2}{J_1} = \mu$$

$$\frac{\sqrt{\frac{C_2}{J_2}}}{\sqrt{\frac{C_1}{J_1}}} = \varepsilon\,; \quad 2D_1 = \frac{\rho_1}{\sqrt{C_1 J_1}}\,; \quad 2D_2 = \frac{\sigma_2}{\sqrt{C_2 J_2}}$$

Đưa được (2.1) về dạng

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1'' + 2D_1\varphi_1' + \varphi_1 - 2D_1\varphi_2' - \varphi_2 = \frac{F_{10}}{C_1} \\
&\mu\varphi_2'' + (2D_1 + 2\mu\varepsilon D_2)\varphi_2' + (1 + \mu\varepsilon^2)\varphi_2' - 2D_1\varphi_1' - \varphi_1 = \frac{F_{10}}{C_1}
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Theo Weigant [5] nghiệm $\varphi_1(\tau_1)$ của (2.2) sẽ là

$$\varphi_1(\tau_1) = \frac{F_1}{\mu C_1}\cdot\sum_{k=1}^{4} A_k \cdot \frac{e^{\lambda_k\tau_1} - 1}{\lambda_k} + \frac{F_{20}}{\mu C_1}\cdot\sum_{k=1}^{4} B_k \cdot \frac{e^{\lambda_i\tau_1} - 1}{\lambda_k} \tag{2.3}$$

ở đây λ_k là nghiệm của phương trình đặc trưng

$$\Delta(\lambda) = (\lambda^2 + 2D_1\lambda + 1)\{\mu\lambda^2 + 2(D_1 + \mu\varepsilon D_2)\lambda + 1 + \mu\varepsilon^2\} - (1 + 2D_1\lambda)^2 = 0$$

và

$$\begin{aligned} &\frac{h_1(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{1}{\mu}\cdot\sum_{k=1}^{4}\frac{A_k}{\lambda-\lambda_k}\,; \quad \frac{h_2(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{1}{\mu}\cdot\sum_{k=1}^{4}\frac{B_k}{\lambda-\lambda_k} \\ &h_1(\lambda) = \mu\lambda^2 + 2(D_1 + \mu\varepsilon D_2)\lambda + 1 + \mu\varepsilon^2 \\ &h_2(\lambda) = 1 + 2D_1\lambda \end{aligned} \tag{2.4}$$

Phương trình dao động hệ một bậc tự do trên hình 3 là

$$\varphi'' + 2D\varphi' + \varphi = F_{10} + F'_{20} \tag{2.5}$$

với

$$\rho = \mu'_2 + \rho', \quad C = C', \quad J = J_1 + J'_2, \quad 2D = \frac{\rho}{\sqrt{C.J}}, \quad \tau_2 = \sqrt{\frac{C}{J}}\cdot t$$

Nghiệm của (2.5) sẽ là

$$\varphi(\tau_2) = \frac{F_{10} + F'_{20}}{C}\cdot\left\{\left(1 - \frac{e^{-D\tau_2}}{\sqrt{1-D^2}}\right)\cos(\sqrt{1-D^2}\tau_2 - \gamma)\right\} \tag{2.6}$$

$$\sin\gamma = D$$

Ta so sánh nghiệm (2.3) và (2.6) trong hai trường hợp đặc biệt sau:
a) Trường hợp có cản và khi $\tau \to \infty$ $(\tau_1, \tau_2 \to \infty)$, ta có

$$\begin{aligned} \varphi_1(\infty) &= \frac{F_{10}}{\mu C_1}\cdot\sum_{k=1}^{4} -\left(\frac{A_k}{\lambda_k}\right) + \frac{F_{20}}{\mu C_1}\cdot\sum_{k=1}^{4} -\left(\frac{B_k}{\lambda_k}\right) \\ &= \frac{F_{10}}{C_1}\cdot\frac{h_1(0)}{\lambda(0)} + \frac{F_{20}}{\lambda(0)} = \frac{F_{10}}{C_1}\cdot\frac{1+\mu\varepsilon^2}{\mu\varepsilon^2} + \frac{F_{20}}{C_1}\cdot\frac{1}{\mu\varepsilon^2} \\ &= \frac{1}{C_1}(2F_{10} + F_{20}) \end{aligned}$$

$$\varphi(\infty) = \frac{F_{10} + F'_{20}}{C} = \frac{1}{C_1}(2F_{10} + F_{20})$$

Hai kết quả này trùng nhau.
b) Trường hợp bỏ qua cản $(D_1 = D_2 = 0)$
Từ (2.3), (2.4), (2.5) nhận được

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tau_1) = &\frac{F_{10}}{\mu C_1}\cdot\frac{1}{\beta^2-\alpha^2}\cdot\left(\frac{1-\cos(\alpha\tau_1)}{\alpha^2(1-\alpha^2)} - \frac{1-\cos(\beta\tau_1)}{\beta^2(1-\beta^2)}\right) + \\ &+ \frac{F_{20}}{\mu C_1}\cdot\frac{1}{\beta^2-\alpha^2}\cdot\left(\frac{1-\cos(\alpha\tau_1)}{\alpha^2} - \frac{1-\cos(\beta\tau_1)}{\beta^2}\right) \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\varphi(\tau_2) = \frac{F_{10} + F'_{20}}{C}(1 - \cos\tau_2) \tag{2.8}$$

ở đây

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{1+\varepsilon^2+\frac{1}{\mu}}{2} - \sqrt{\frac{1+\varepsilon^2+\frac{1}{\mu}}{2} - \varepsilon^2}} \\ \beta &= \sqrt{\frac{1+\varepsilon^2+\frac{1}{\mu}}{2} + \sqrt{\frac{1+\varepsilon^2+\frac{1}{\mu}}{2} - \varepsilon^2}} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Tính với những giá trị đã cho và lấy cùng thời điểm $\tau = \tau_2$ (chú ý $\frac{\tau_1}{\tau_2} = \sqrt{\frac{C_1}{J_1}} \cdot \sqrt{\frac{J}{C}} = 1,42$) nhận được

$$\varphi_1(\tau) = \frac{F_{10}}{C_1}(2,004 - 2\cos(1,002\tau) + 0,004\cos(8,45\tau) +$$

$$+ \frac{F_{20}}{C_1}(0,98 - 0,98\cos(1,002\tau) + 0,014\cos(8,45\tau)$$

$$\varphi(\tau) = \frac{F_{10}}{C_1}(2 - 2\cos\tau) + \frac{F_{20}}{C-1}(1 - \cos\tau)$$

Hai kết quả này xấp xỉ nhau.
Với nhựng giá trị cản khác nhau vẫn nhận được các xấp xỉ tốt.

§3. KẾT LUẬN

Phương pháp tìm tham số của hệ dao động rút gọn được thực hiện từng bước trên cơ sở so sánh các tần số riêng của từng hệ con (khối lượng và hệ số cứng). Nếu tại khối lượng nào đó tần số riêng của hệ con lớn nhất và ở đó các đặc trưng động lực học không cần quan tâm thì loại bỏ bằng cách chia khối lượng sang hai bên và thay đổi hệ số cứng của phần tử đàn hồi.

Kết quả của nhiều ví dụ cho thấy, nếu δ trong đẳng thức (1.14) bằng 0,1 thì sai số dưới 5%. Đối với hệ phân nhánh, số nhánh được giữ nguyên trong quá trình rút gọn.

Công trình này được hoàn thành với sự tài trợ của chương trình nghiên cứu cơ bản trong lĩnh vực khoa học tự nhiên.

Địa chỉ:
Học Viện Kỹ thuật Quân sự

Nhận ngày 20/12/1994

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Ривин Е. И. Метод уменьшения степеней свободы в расчетных цепных и разветенных системах. Машиностроение Ho ? 1966.
2. Baran J., Marchelek K. Redukcja stopri swobody ukladow dyskretnych Mechanika Teoretyucz-na i stosowana 1971.
3. Phan Nguyen Di. Beitrag zur Reduktion diskreter Schwingunggsketten auf ein Minimalmodel. Dissertation TU Dresden 1973.
4. Fischer U. Stephan W. Mechanische Schwingungen. VEB Fachbuch Verlag Leipzig 1981.
5. Weigand A. Einführung in die Berechnung mechanischer Schwingungen. Band 1, 2 VEB Fachbuch Verlag Leipzig 1967.

ZUSAMMENFASSUNG

APPROXIMATE TECHNIQUE FOR DETERMINING PARAMETERS OF THE MINIATURE MECHANICAL SYSTEMS

In der vorliegenden Arbeit wird die Reduktion eines gegebenen diskreten Schwingungsmodells behandelt, das sich durch ein lineares inhomogenes Differentialgleichungssystem 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschreiben lässt. Die Erregungen können beliebige deterministische Funktionen sein.