Tạp chí Cơ học Journal of Mechanics, NCNST of Vietnam T. XIX, 1997, No 3 (59 - 64)

MỘT DẠNG MỚI CỦA PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG CỦA CƠ HỆ KHÔNG HÔLÔNÔM

ĐỖ SANH

1. Mở đầu

Phương trình chuyển động của các cơ hệ không hôlônôm thường được viết trong dạng phương trình với nhân tử [2, 3] hoặc dạng phương trình chứa các phản lực liên kết theo sơ đồ của Nguyên lý Phù hợp [4].

Theo cách thứ hai, các phản lực được xác định độc lập đối với phương trình chuyển động và nhờ đó nhận được biểu thức giải tích của chúng từ một phương trình đại số. Điều này cho phép nhận biết lớp các phản lực liên kết, nó có ý nghĩa quan trọng đối với việc khảo sát lý thuyết, ví dụ đối với bài toán điều khiển chuyển động hay ổn định chuyển động. Tuy nhiên theo sơ đồ tính toán này sẽ gặp phải khó khăn trong việc khống chế sai số đối với việc thực hiện các phương trình liên kết mà trong nhiều bài toán, điều đó lại là mục tiêu quan trọng như trong bài toán chuyển động chương trình [4].

Trong bài báo này đề xuất một dạng phương trình chuyển động của cơ hệ không hôlônôm mà khi sử dụng phương pháp số để giải nó rất thuận tiện.

2. Một dạng phương trình chuyển động của hệ không hôlônôm

Khảo sát cơ hệ, vị trí của nó được xác định nhờ các tọa độ hôlônôm q_i $(i = \overline{1, n})$. Biểu thức động năng của hệ có dạng:

$$T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}\,\dot{\mathbf{q}}, \tag{2.1}$$

trong đó $\dot{\mathbf{q}}$ là ma trận $n \times 1$ của các vận tốc suy rộng, còn $\dot{\mathbf{q}}^T$ là ma trận chuyển vị của nó. Đó là ma trận $1 \times n$, có dạng sau:

$$\dot{\mathbf{q}}^T = \|\dot{q}_1\ \dot{q}_2\ \dots\ \dot{q}_n\|, \tag{2.2}$$

$\mathbf{A}$ là ma trận quán tính, nó là ma trận xác định dương cấp $n \times n$, có hạng bằng n, các yếu tố của nó là hàm của các tọa độ suy rộng.

Các lực suy rộng của các lực hoạt động ứng với các tọa độ suy rộng q_i được ký hiệu là Q_i $(i = \overline{1, n})$. Gọi $\mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ là ma trận các lực suy rộng. Đó là

$$\mathbf{Q}^T = \|Q_1\ Q_2\ \dots\ Q_n\|. \tag{2.3}$$

Cơ hệ có biểu thức động năng (2.1) và lực suy rộng (2.3) gọi tắt là hệ hôlônôm. Như đã biết phương trình chuyển động của hệ hôlônôm được viết trong dạng [5]

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\,\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \tag{2.4}$$

ở đó $\mathbf{G}$ là ma trận cấp $n \times 1$, các yếu tố của nó được xác định nhờ ma trận quán tính $\mathbf{A}(\mathbf{q})$.

Giả sử các liên kết đặt lên cơ hệ có phương trình dạng:

$$\mathbf{b}\,\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}_0 = \mathbf{0}, \tag{2.5}$$

ở đó $\mathbf{b}$ là ma trận $s \times n$, có hạng bằng s, $\mathbf{b}_0$ là ma trận $s \times 1$. Các yếu tố của các ma trận này trong trường hợp tổng quát là hàm đã biết của các tọa độ, vận tốc và thời gian, tức

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad \mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_0(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}),$$

$\ddot{\mathbf{q}}$ là ma trận $n \times 1$, các yếu tố của nó là các gia tốc mở rộng.

Cơ hệ có hàm động năng (2.1), lực mở rộng (2.3) chịu liên kết (2.5) gọi tắt là hệ không hôlônôm.

Theo Nguyên lý Phù hợp phương trình chuyển động của hệ không hôlônôm có thể được viết trong dạng sau:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\,\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{R}, \tag{2.6}$$

ở đó $\mathbf{R}$ là ma trận $(n \times 1)$ của các phản lực liên kết (2.5) cần được xác định để chuyển động của hệ không hôlônôm được mô tả bằng phương trình (2.6) có nghiệm nằm trên đa tạp (2.5).

Như đã biết [4], phản lực $\mathbf{R}$ được xác định từ hệ phương trình đại số

$$\mathbf{B}\,\mathbf{R} + \mathbf{B}_0 = \mathbf{0}, \tag{2.7}$$

$$\mathbf{D}\,\mathbf{R} = \mathbf{0}. \tag{2.8}$$

Từ đây tính được

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \tag{2.9}$$

Thay (2.9) vào (2.6) ta nhận được

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\,\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{R}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \tag{2.10}$$

Phương trình (2.10) với điều kiện đầu

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0; \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0 \tag{2.11}$$

cho nghiệm dạng

$$\mathbf{q}^* = \mathbf{q}(t, \mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0); \quad \dot{\mathbf{q}}^* = \dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0), \tag{2.12}$$

nó mô tả chuyển động của hệ không hôlônôm.

Thay (2.12) vào (2.9) ta tính được phản lực liên kết

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(t, \mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0). \tag{2.13}$$

Do sai số tính toán, đặc biệt trong việc tính toán ma trận $\mathbf{B}$, ở đó cần phải tính ma trận ngược của ma trận quán tính [4], nên nghiệm (2.12) có thể không thỏa mãn phương trình liên kết (2.5), tức liên kết (2.5) không được thực hiện chính xác. Lúc đó

$$\mathbf{b}(\mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}}^*, t)\,\ddot{\mathbf{q}}^* + \mathbf{b}_0(\mathbf{q}^*, \dot{\mathbf{q}}^*, t) = \boldsymbol{\varepsilon} \neq \mathbf{0}. \tag{2.14}$$

Điều cần lưu tâm ở đây là rất khó khăn khống chế sai số $\boldsymbol{\varepsilon}$ theo sai số của sơ đồ tính toán khi giải (2.7), (2.8) và (2.10).

Để tránh khó khăn này ta lưu ý đến phương trình (2.8), nó được xây dựng từ điều kiện lý tưởng của liên kết (2.5).

Như đã biết [4], ma trận $\mathbf{D}$ cấp $(k \times n)$, ở đó $k = n - s$. Hạng của ma trận này bằng k. Các yếu tố của ma trận $\mathbf{D}$ là các hệ số trong biểu thức gia tốc mở rộng khi biểu diễn chúng qua các gia tốc mở rộng độc lập. Chú ý rằng $\mathbf{D} = \mathbf{D}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$.

Từ phương trình (2.6) ta có:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{q})\,\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{G}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \tag{2.15}$$

và khi thay nó vào (2.8) ta nhận được

$$\mathbf{A}_0(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\,\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{C}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \tag{2.16}$$

ở đó

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{D}\,\mathbf{A}; \quad \mathbf{C} = \mathbf{D}(\mathbf{Q} + \mathbf{G}). \tag{2.17}$$

Phương trình (2.16) và (2.5) sẽ mô tả chuyển động của cơ hệ không hôlônôm.

Vì hạng của ma trận $\mathbf{D}$ bằng k, hạng của ma trận $\mathbf{A}$ bằng n nên hạng của ma trận $\mathbf{A}_0$ bằng k. Theo giả thiết ma trận $\mathbf{b}$ có hạng s $(s + k = n)$ nên từ các phương trình (2.16), (2.5) với điều kiện đầu (2.11) ta tìm được nghiệm của chúng

$$\mathbf{q}^* = \mathbf{q}^*(t, \mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0). \tag{2.18}$$

Nghiệm (2.18) được tìm trực tiếp từ hệ các phương trình (2.16) và (2.5) trong đó (2.5) chính là phương trình liên kết. Vì lý do đó sai số phạm phải khi thực hiện liên kết (2.5) cũng chính là sai số khi giải phương trình chuyển động của cơ hệ. Bằng cách như vậy có thể thiết lập mối quan hệ giữa sai số giải phương trình chuyển động và sai số thực hiện liên kết.

Chú ý. Nếu liên kết đặt lên cơ hệ có dạng phi tuyến đối với vận tốc, hoặc dạng tuyến tính đối với vận tốc thì chuyển động của cơ hệ sẽ được mô tả bằng hệ phương trình vi phân cấp hai và hệ phương trình vi phân cấp một. Trong trường hợp hệ hôlônôm với tọa độ suy rộng thừa thì chuyển động của hệ được mô tả bằng hệ phương trình vi phân - đại số.

Để minh họa ta xét hai thí dụ sau

Thí dụ Apen [1]

Khảo sát chuyển động cơ hệ có hàm Lagơrăng dạng:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgz$$

chịu liên kết có phương trình dạng

$$\dot{z}^2 - a^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 0.$$

Liên kết này thuộc loại liên kết không hôlônôm phi tuyến đối với vận tốc, nó có thể được viết trong dạng tương đương sau:

$$\dot{z}\,\ddot{z} - a^2(\dot{x}\,\ddot{x} + \dot{y}\,\ddot{y}) = 0.$$

Chọn các tọa độ suy rộng độc lập là x và y. Dễ dàng tính được

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & a^2\dot{x}/\dot{z} \\ 0 & 1 & a^2\dot{y}/\dot{z} \end{Vmatrix}; \quad \mathbf{Q}^T = \|0\;0\;mgz\|.$$

Vì **A** là ma trận hằng nên

$$\mathbf{G} = 0.$$

Theo (2.17) ta tính được

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{D}\,\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & a^2\dot{x}/\dot{z} \\ 0 & 1 & a^2\dot{y}/\dot{z} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} m & 0 & ma^2\dot{x}/\dot{z} \\ 0 & m & ma^2\dot{y}/\dot{z} \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{D}(\mathbf{Q}+\mathbf{G}) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & a^2\dot{x}/\dot{z} \\ 0 & 1 & a^2\dot{y}/\dot{z} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} mga^2\dot{x}/\dot{z} \\ mga^2\dot{y}/\dot{z} \end{Vmatrix}.$$

Theo (2.16) ta có:

$$\begin{Vmatrix} m & 0 & ma^2\dot{x}/\dot{z} \\ 0 & m & ma^2\dot{y}/\dot{z} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} mga^2\dot{x}/\dot{z} \\ mga^2\dot{y}/\dot{z} \end{Vmatrix}.$$

Viết trong dạng khai triển nó có dạng:

$$m\ddot{x} + ma^2\frac{\dot{x}}{\dot{z}}\,\ddot{z} = mga^2\frac{\dot{x}}{\dot{z}}$$
$$m\ddot{y} + ma^2\frac{\dot{y}}{\dot{z}}\,\ddot{z} = mga^2\frac{\dot{y}}{\dot{z}}$$

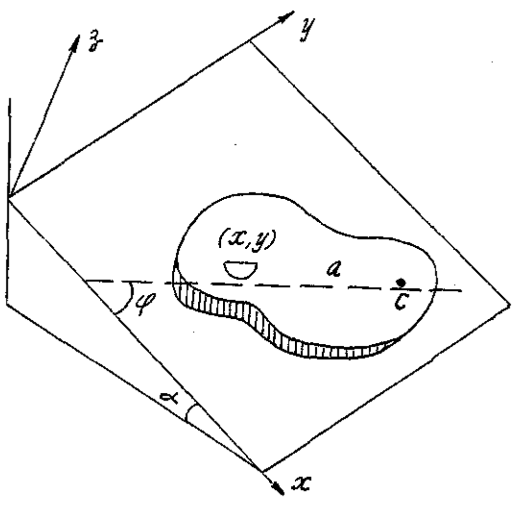
Nó cùng với phương trình liên kết

$$\dot{z}^2 - a^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 0$$

mô tả chuyển động cơ hệ.

Thí dụ xe trượt băng trên mặt phẳng nghiêng [3]

Khảo sát chuyển động của xe trượt băng. Giả thiết điểm tiếp xúc của bánh xe và trọng tâm của xe cùng nằm trong mặt phẳng nghiêng với mặt ngang một góc α. Xem bánh xe như lưỡi dao mỏng, mặt phẳng của nó chứa trọng tâm C của xe. Giả sử xe có khối lượng bằng m, có bán kính quán tính đối với trục qua tiếp điểm bằng ρ. Khoảng cách giữa tiếp điểm và trọng tâm C bằng a (Hình 1).



Hình 1

Chọn tọa độ suy rộng là x, y, φ; ở đó: x, y là tọa độ của tiếp điểm, φ - góc nghiêng giữa trục Ox và đường thẳng qua tiếp điểm và trọng tâm C.

Biểu thức động năng của xe có dạng

$$T = \frac{1}{2}\left[(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) + 2a(\cos\varphi\,\dot{y} - \sin\varphi\,\dot{x})\dot{\varphi}\right].$$

Biểu thức thế năng của xe là

$$\Pi = -mg\sin\alpha\, x.$$

Vì bánh xe được xem như lưỡi dao mỏng, nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng nghiêng và qua C nên vận tốc tiếp điểm có phương qua C. Điều này được biểu thị bằng hệ thức

$$\dot{y} - \mathrm{tg}\varphi\,\dot{x} = 0,$$

nó là phương trình liên kết không hôlônôm tuyến tính đối với vận tốc.

Có thể viết phương trình liên kết trong dạng tương đương sau

$$\ddot{y} - \mathrm{tg}\varphi\,\ddot{x} - (\dot{x} + \dot{y}\,\mathrm{tg}\,\varphi)\dot{\varphi} = 0.$$

Đầu tiên ta tính các ma trận **A**, **Q** và **G**. Dễ dàng nhận được

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} m & 0 & -ma\sin\varphi \\ 0 & m & ma\cos\varphi \\ -ma\sin\varphi & ma\cos\varphi & m\rho^2 \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{Q}^T = \|mg\sin\alpha\ 0\ 0\|, \qquad \mathbf{G}^T = \|-ma\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2\ \ -ma\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2\ \ 0\|.$$

Chọn các tọa độ suy rộng độc lập là x và φ. Ta có

$$\mathbf{D} = \begin{Vmatrix} 1 & \mathrm{tg}\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Theo công thức (2.17) ta tính được

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{D\,A} = \begin{Vmatrix} 1 & \mathrm{tg}\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} m & 0 & -ma\sin\varphi \\ 0 & m & ma\cos\varphi \\ -ma\sin\varphi & ma\cos\varphi & m\rho^2 \end{Vmatrix}$$
$$= \begin{Vmatrix} m & \mathrm{tg}\varphi & 0 \\ -ma\sin\varphi & ma\cos\varphi & m\rho^2 \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{D}(\mathbf{Q} + \mathbf{G}) = \begin{Vmatrix} 1 & \mathrm{tg}\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} mg\sin\alpha - ma\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 \\ -ma\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} mg\sin\alpha - \dfrac{ma}{\cos^2\varphi}\dot{\varphi}^2 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

Phương trình (2.16) có dạng sau

$$\begin{Vmatrix} m & m\mathrm{tg}\,\varphi & 0 \\ -ma\sin\varphi & ma\cos\varphi & m\rho^2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\varphi} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} mg\sin\alpha - ma\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Khi triển khai ta nhận được:

$$- m\ddot{x} + m\operatorname{tg}\varphi\,\ddot{y} = mg\sin\alpha - \frac{ma}{\cos^2\varphi}\dot{\varphi}^2,$$
$$- ma\sin\varphi\,\ddot{x} + ma\cos\varphi\,\ddot{y} + m\rho^2\ddot{\varphi} = 0$$

chúng cùng với phương trình

$$\dot{y} - \operatorname{tg}\varphi\,\dot{x} = 0$$

mô tả chuyển động cơ hệ.

3. Kết luận

- Phương trình chuyển động của cơ hệ được viết trong dạng (2.16), (2.5) được thiết lập theo sơ đồ không phải tính toán ma trận ngược của ma trận quán tính hay nhân tử Lagơrăng. Điều này rất quan trọng đối với các cơ hệ phức tạp, ví dụ hệ nhiều vật, ở đó chiều của ma trận quán tính rất lớn.

- Có thể thiết lập mối quan hệ giữa sai số thực hiện liên kết với sai số tính nghiệm của phương trình chuyển động của cơ hệ. Điều này có ý nghĩa lớn đối với các bài toán điều khiển chuyển động cơ hệ theo chương trình.

Công trình này được thực hiện với sự tài trợ của Chương trình nghiên cứu Nhà nước trong Khoa học tự nhiên

Địa chỉ:

Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội

Nhận ngày 8/8/1997

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Appell P. Example de mouvement d'un point assujetti à une liason exprimee par une relation non lineare entre les composante de la vitesse, Rendiconti del circolo matematico de Palermo, V.32, 1911.
2. Dobronravov V. V. Cơ sở cơ học của các hệ không hôlônôm (tiếng Nga). NXB Vyshaja shkola" Moskva, 1970
3. Neimark J. I., Phuphaev N. A. Động lực học của các hệ không hôlônôm (tiếng Nga), NXB Nauka, Mockva 1967.
4. Đỗ Sanh. Về chuyển động của các hệ cơ học chịu liên kết. Luận án Tiến sỹ khoa học, Hà Nội 1984.
5. Do Sanh. A form of equations of motion of a mechanical system. Tạp chí Cơ học, NCNST, T.XVII, số 3, 1995.

SUMMARY

A NEW FORM OF EQUATIONS OF MOTION OF NONHOLONOMIC MECHANICAL SYSTEMS

In the paper it is given a new form of equations of motion of nonholonomic mechanical systems. The obtained equations are written in a matrix form and in order to establish them it is unnecessary to calculate the inverse matrix of the matrix of inertia. It is important that it is possible to obtain the relation between the error of realizing constraints and that of computing the solution of equations of motion of the system under consideration.