Tạp chí Cơ học Journal of Mechanics, NCNST of Vietnam T. XIX, 1997, No 3 (52 - 58)

PHƯƠNG PHÁP THUẦN NHẤT HÓA TRONG BÀI TOÁN CẦU RỖNG COMPOSITE ĐÀN HỒI NHIỀU LỚP

PHẠM THỊ TOAN

Lời giới thiệu

Trong [4], đã sử dụng phương pháp thuần nhất hóa đối với vật liệu composite đưa về vật liệu thuần nhất tương đương (lý thuyết mô đun hiệu quả), sử dụng các hệ thức xác định này vào khảo sát các bài toán cụ thể.

Trong bài báo này chúng ta nghiên cứu các bài toán tĩnh và động trong môi trường vật liệu composite nhiều lớp có dạng cầu rỗng. Xét cầu rỗng bán kính trong a, bán kính ngoài b bằng vật liệu composite đàn hồi gồm nhiều lớp vật liệu tạo thành bởi các bó trong mỗi bó có N vật liệu khác nhau ($N \geq 1$). Trong khoảng $[a, b]$ có M bó và ta giả thiết M khá lớn. Cấu trúc của môi trường là tựa tuần hoàn. Gọi $h = h_1 + h_2 + \cdots + h_N$ là chiều dày của một bó vật liệu, $H = b - a$ là chiều dày của cầu rỗng.

Ta giả thiết rằng chu kỳ h của cấu trúc tựa tuần hoàn là rất nhỏ khi so sánh với H. Bằng cách sử dụng phương pháp thuần nhất hóa ta đưa về giải truy hồi một loạt bài toán với vật liệu thuần nhất, cho phép xác định nghiệm xấp xỉ với độ chính xác tùy ý.

1. Đặt bài toán

Trước tiên ta xét bài toán tĩnh, để đơn giản ta giả thiết rằng các vật liệu trong mỗi lớp là đàn hồi đẳng hướng. Điều kiện trên biên của cầu rỗng:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p_0 \quad \text{khi} \quad r = a, \\ \sigma_{rr} &= 0 \quad\quad \text{khi} \quad r = b. \end{aligned}$$

Để khảo sát bài toán ta sử dụng hệ tọa độ cầu r, θ, φ. Do cầu đối xứng, chịu tải đối xứng tâm nên các đại lượng xác định chỉ là hàm của r. Các thành phần chuyển dịch

$$u_r = u_r(r), \quad u_\theta = u_\varphi = 0. \tag{1.1}$$

Đặt $u = u_r(r)$ do (1.1), trạng thái ứng suất và biến dạng của môi trường được xác định theo các công thức

$$\begin{aligned} &\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)\frac{du}{dr} + 2\lambda\frac{u}{r}\ ; \quad \tau_{r\theta} = \tau_{\theta\varphi} = \tau_{\varphi r} = 0, \\ &\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda\frac{du}{dr} + 2(\lambda + \mu)\frac{u}{r}\ , \\ &e_{rr} = \frac{du}{dr}\ , \quad e_{\theta\theta} = e_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r}\ , \quad e_{\theta\varphi} = e_{r\theta} = e_{\varphi r} = 0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

ở đây λ và μ là hàm của r.

Các thành phần ứng suất trên phải thỏa mãn phương trình cân bằng sau:

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{2}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0. \tag{1.3}$$

Thay thế (1.2) vào (1.3) ta nhận được phương trình xác định dịch chuyển u:

$$\frac{d}{dr}\Big[L_1(r)\frac{du}{dr} + L_2(r)u\Big] + L_3(r)\frac{du}{dr} + L_4(r)u = 0 \tag{1.4}$$

và điều kiện biên dẫn đến:

$$\begin{aligned} L_1(r)\frac{du}{dr} + L_2(r)u &= -p_0 \quad \text{khi} \quad r = a, \\ L_1(r)\frac{du}{dr} + L_2(r)u &= 0 \quad \text{khi} \quad r = b, \end{aligned} \tag{1.5}$$

trong đó

$$L_1(r) = \lambda(r) + 2\mu(r); \quad L_2(r) = \frac{2\lambda(r)}{r}$$
$$L_3(r) = \frac{4\mu(r)}{r}; \quad L_4(r) = -\frac{4\mu(r)}{r^2}.$$

Do cấu trúc vật liệu, các hàm $\lambda(r)$, $\mu(r)$ tuần hoàn với chu kỳ h trong khoảng $[a, b]$. Dịch chuyển u và ứng suất σ_{rr} phải thỏa mãn điều kiện liên tục trên biên của các lớp

$$[u] = 0 \quad \text{khi} \quad r = r_i,$$

$$\Big[L_1(r)\frac{du}{dr} + L_2 u\Big] = 0 \quad \text{khi} \quad r = r_i,$$

ở đây $i = 1, 2, \dots, NM$ và

$$[f] = f(r+0) - f(r-0). \tag{1.6}$$

2. Phương pháp giải

Đưa vào hai biến mới: biến nhanh $\xi = \dfrac{r}{h}$ và biến chậm $\bar{r} = \dfrac{r}{H}$.

Đặt $\varepsilon = \dfrac{h}{H} \ll 1$, khi đó các hàm $\lambda(\xi)$, $\mu(\xi)$ là tuần hoàn với chu kỳ 1 trong khoảng $\left[\dfrac{a}{h}, \dfrac{b}{h}\right]$, biến ξ biến thiên trên một nhân tuần hoàn $1 \geq \xi \geq 0$.

Bằng cách sử dụng hai biến mới ξ, $\bar{r}$ ta có thể viết (1.4) dưới dạng sau (để cho gọn, ta bỏ dấu gạch ngang trên biến chậm $\bar{r}$)

$$\frac{d}{dr}\Big[L_1(\xi)\frac{du}{dr} + L_2(\xi, r)u\Big] + L_3(\xi, r)\frac{du}{dr} + L_4(\xi, r)u = 0, \tag{2.1}$$

trong đó $\xi = \dfrac{r}{\varepsilon}$,

$$L_1(\xi) = \lambda(\xi) + 2\mu(\xi), \quad L_2(\xi, r) = \frac{2\lambda(\xi)}{r}, \quad L_3(\xi, r) = \frac{4\mu(\xi)}{r}, \quad L_4(\xi, r) = -\frac{4\mu(\xi)}{r^2}. \tag{2.2}$$

Điều kiện biên (1.5) và điều kiện liên tục (1.6) trở thành

$$L_1(\xi)\frac{du}{dr}+L_2(\xi,r)u=\begin{cases}-p_0.H & \text{khi } r=\dfrac{a}{H},\\ 0 & \text{khi } r=\dfrac{b}{H},\end{cases} \tag{2.3}$$

$$[u]=0 \quad \text{khi} \quad r=\frac{r_i}{H},$$

$$\Big[L_1(\xi)\frac{du}{dr}+L_2(\xi,r)u\Big]=0 \quad \text{khi} \quad r=\frac{r_i}{H}. \tag{2.4}$$

Do cấu trúc vật liệu là tựa tuần hoàn nên nghiệm u có thể viết dưới dạng chuỗi, theo [1]

$$u=\sum_{q=0}^{\infty}\varepsilon^q\sum_{i=0}^{q}N_{qi}(\xi,r)\frac{d^{(i)}V(r)}{dr^i}. \tag{2.5}$$

Các hàm $N_{qi}(\xi,r)$ là hàm tuần hoàn của biến ξ với chu kỳ bằng 1 trong đó $N_{00}=1$, $N_{qi}(0,r)=N_{qi}(1,r)$.

Ta cần tính các đạo hàm sau

$$\frac{du}{dr}=\sum_{q=0}^{\infty}\varepsilon^q\sum_{i=0}^{q+1}\Big[\frac{dN_{(q+1)i}}{d\xi}+\frac{dN_{qi}}{dr}+N_{q(i-1)}\Big]V^{(i)},$$

$$\frac{d}{dr}[L_2u]=\sum_{q=0}^{\infty}\varepsilon^q\sum_{i=0}^{q+1}\Big[\frac{d}{d\xi}(L_2N_{(q+1)i})+\frac{d}{dr}(L_2N_{qi})+L_2N_{q(i-1)}\Big]V^{(i)},$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}\Big[L_1\frac{du}{dr}\Big]=&\sum_{q=-1}^{\infty}\varepsilon^q\sum_{i=0}^{q+2}\Big\{\frac{d}{d\xi}\Big[L_1\frac{dN_{(q+2)i}}{d\xi}\Big]+\frac{d}{dr}\Big[L_1\frac{dN_{(q+1)i}}{d\xi}\Big]\\&+L_1\frac{dN_{(q+1)(i-1)}}{d\xi}+\frac{d}{d\xi}\Big[L_1\frac{dN_{(q+1)i}}{dr}\Big]+\frac{d}{dr}\Big[L_1\frac{dN_{qi}}{dr}\Big]+L_1\frac{dN_{q(i-1)}}{dr}\\&+\frac{d}{d\xi}\big[L_1N_{(q+1)(i-1)}\big]+\frac{d}{dr}\big[L_1N_{q(i-1)}\big]+L_1N_{q(i-2)}\Big\}V^{(i)},\end{aligned} \tag{2.6}$$

trong đó $V^{(i)}=\dfrac{d^{(i)}V(r)}{dr^i}$, $i=0,1,2,\dots$, $q=-1,0,1,2,\dots$, $N_{qi}=0$ với $i<0$ hoặc $q<0$, $N_{qi}=0$ với $i>q$.

Thay thế các hệ thức (2.6) vào (2.1), cân bằng các hệ số cùng bậc với ε, ta dẫn đến phương trình sau đây để xác định các hàm địa phương $N_{qi}(\xi,r)$:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\xi}\Big[L_1\frac{dN_{(q+2)i}}{d\xi}\Big]+\frac{d}{d\xi}\Big[L_1N_{(q+1)(i-1)}+L_1\frac{dN_{(q+1)i}}{dr}+L_2N_{(q+1)i}\Big]\\&+L_1\Big[\frac{dN_{(q+1)(i-1)}}{d\xi}+2\frac{dN_{q(i-1)}}{dr}+N_{q(i-2)}+\frac{d^2N_{qi}}{dr^2}\Big]+\frac{d}{dr}(L_2N_{qi})\\&+N_{q(i-1)}(L_2+L_3)+L_3\frac{dN_{(q+1)i}}{d\xi}+L_3\frac{dN_{qi}}{dr}+L_4N_{qi}=h_{qi}.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Các hàm N_{qi} phải thỏa mãn điều kiện liên tục $[N_{qi}]=0$ khi $\xi=\xi_n=\dfrac{h_1+h_2+\cdots+h_n}{h}$

$$\Big[L_1\Big(\frac{dN_{(q+1)i}}{d\xi}+\frac{dN_{qi}}{dr}+N_{q(i-1)}\Big)+L_2N_{qi}\Big]=0 \quad \text{khi} \quad \xi=\xi_n,\ n=1,2,\dots,N-1. \tag{2.8}$$

Để có phương pháp duy nhất tìm nghiệm của phương trình (2.7) đối với các hàm địa phương mức $(q+2)$ liên tục và tuần hoàn, ta coi rằng tất cả các hàm địa phương dưới mức $(q+2)$ có tính chất sao cho:

$$h_{qi} = \Big\langle L_1\Big[\frac{dN_{(q+1)(i-1)}}{d\xi} + 2\frac{dN_{q(i-1)}}{dr} + N_{q(i-2)} + \frac{d^2N_{qi}}{dr^2}\Big]\Big\rangle + \big\langle\frac{d}{dr}(L_2N_{qi})\big\rangle$$
$$+ \langle N_{q(i-1)}(L_2+L_3)\rangle + \langle L_4N_{qi}\rangle + \big\langle L_3\Big(\frac{dN_{(q+1)i}}{d\xi} + \frac{dN_{qi}}{dr}\Big)\big\rangle, \tag{2.9}$$

trong đó $h_{-11} = h_{-10} = 0$, $q = -1, 0, 1, 2, \dots$, $i = 0, 1, 2, \dots$ $\langle f\rangle = \int\limits_0^1 f(\xi, r)d\xi$.

Đặt

$$S_{qi} = \Big\langle L_1\frac{dN_{(q+1)i}}{d\xi} + L_1\frac{dN_{qi}}{dr} + L_1N_{q(i-1)} + L_2N_{qi}\Big\rangle. \tag{2.10}$$

Bài toán truy hồi cho chuyển dịch có thể viết dưới dạng:

$$h_{00}V + h_{01}V^{(1)} + h_{02}V^{(2)} + X^{\{q\}} = 0, \tag{2.11}$$

$$S_{00}V + S_{01}V^{(1)} + Y^{\{q\}} = \begin{cases} -p_0 & \text{khi } r = \dfrac{a}{H}, \\ 0 & \text{khi } r = \dfrac{b}{H}, \end{cases}$$

trong đó

$$X^{\{q\}} = \sum_{q=0}^{\infty}\varepsilon^q\sum_{i=2}^{q+2}h_{qi}V^{(i)}, \quad X^{\{0\}} = 0,$$
$$Y^{\{q\}} = \sum_{q=0}^{\infty}\varepsilon^q\sum_{i=0}^{q+1}S_{qi}V^{(i)}, \quad Y^{\{0\}} = 0. \tag{2.12}$$

Việc tìm nghiệm của phương trình (2.1), (2.2) dưới dạng (2.5) đưa về giải hai dãy bài toán truy hồi. Bài toán thứ nhất là dãy các bài toán biên của lý thuyết đàn hồi thuần nhất (2.11), (2.12). Bài toán thứ hai là dãy bài toán giải liên tiếp phương trình vi phân (2.7) để tìm các hàm địa phương N_{qi}.

3. Xấp xỉ bậc không (lý thuyết mô đun hiệu quả)

Xét trường hợp $q = -1$, khi đó các hệ số của ε^{-1} phải cho bằng 0. Thay $q = -1$, $i = 0, 1$ vào hệ (2.7) ta nhận được

$$h_{-10} = \frac{d}{d\xi}\Big[L_1\frac{dN_{10}}{d\xi} + L_2\Big] = 0, \quad h_{-11} = \frac{d}{d\xi}\Big[L_1\frac{dN_{11}}{d\xi} + L_1\Big] = 0.$$

Điều kiện liên tục $[N_{10}] = 0$, $[N_{11}] = 0$ khi $\xi = \xi_n$.
Điều kiện tuần hoàn $\langle N_{10}\rangle = 0$, $\langle N_{11}\rangle = 0$.
Giải hệ phương trình trên ta nhận được

$$N_{10} = \frac{2}{r}\int\limits_0^{\xi}\Big[\Big\langle\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\Big\rangle\Big\langle\frac{1}{\lambda+2\mu}\Big\rangle^{-1} - \lambda\Big]\frac{d\xi}{\lambda+2\mu}, \quad N_{11} = \int\limits_0^{\xi}\Big[(\lambda+2\mu)^{-1}\Big\langle\frac{1}{\lambda+2\mu}\Big\rangle^{-1} - 1\Big]d\xi. \tag{3.1}$$

Phương trình thuần nhất hóa ứng với $q = 0$ có dạng

$$\Big[\Big\langle L_1 + L_1\frac{dN_{11}}{d\xi}\Big\rangle\Big]\frac{d^2V}{dr^2} + \Big[\Big\langle L_2 + L_3\Big(1 + \frac{dN_{11}}{d\xi}\Big)\Big\rangle + \Big\langle L_1\frac{dN_{10}}{d\xi}\Big\rangle\Big]\frac{dV}{dr}$$
$$+ \Big[\langle L_4\rangle + \Big\langle L_3\frac{dN_{10}}{d\xi} + \frac{d}{dr}\Big(L_2 + L_1\frac{dN_{10}}{d\xi}\Big)\Big\rangle\Big]V = 0. \tag{3.2}$$

Điều kiện biên

$$\Big\langle L_1\frac{dN_{10}}{d\xi} + L_2\Big\rangle V + \Big\langle L_1\frac{dN_{11}}{d\xi} + L_1\Big\rangle\frac{dV}{dr} = \begin{cases} -p_0.H & \text{khi } r = \dfrac{a}{H}\,, \\ 0 & \text{khi } r = \dfrac{b}{H}\,. \end{cases} \tag{3.3}$$

Dựa vào các kết quả của (3.1) ta tính được các hệ số của (3.2) và (3.3). Kết quả nhận được phương trình

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} + \frac{A}{r^2}V = 0 \tag{3.4}$$

và điều kiện biên

$$\frac{dV}{dr} + \frac{B}{r}V = \begin{cases} C & \text{khi } r = \dfrac{a}{H}\,, \\ 0 & \text{khi } r = \dfrac{b}{H}\,, \end{cases} \tag{3.5}$$

trong đó

$$A = \Big\langle\frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle\Big\langle\frac{2\mu - \lambda}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle - \Big\langle\frac{1}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle\Big\langle\frac{4\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle, \quad B = \Big\langle\frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle, \quad C = -p_0H\Big\langle\frac{1}{\lambda + 2\mu}\Big\rangle.$$

Nghiệm của phương trình (3.4) có dạng

$$V = \begin{cases} C_1 r^{\lambda_1} + C_2 r^{\lambda_2} & \text{với } 1 - 4A > 0 \\ r^{-\frac{1}{2}}\big[C_1\sin\big(\sqrt{4A - 1}\,\ln r\big) + C_2\cos\big(\sqrt{4A - 1}\,\ln r\big)\big] & \text{với } 1 - 4A < 0 \\ r^{-\frac{1}{2}}\big[C_1 + C_2\ln r\big] & \text{với } 1 - 4A = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

trong đó $\lambda_{1,2} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{1 - 4A}}{2}$, C_1, C_2 được xác định từ điều kiện biên (3.5). Chuyển vị của vật thể xác định theo lý thuyết xấp xỉ không

$$u = \big(1 + \varepsilon N_{10}\big)V + \varepsilon N_{11}V^{(1)},$$

trong đó N_{10}, N_{11} được xác định theo công thức (3.1), còn V xác định theo (3.6), $V^{(1)} = \dfrac{dV}{dr}$.

4. Bài toán động

Phương trình mô tả chuyển động của cầu rỗng composite đàn hồi nhiều lớp có dạng

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big[L_1\frac{\partial u}{\partial r} + L_2u\Big] + L_3\frac{\partial u}{\partial r} + L_4u = \rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}. \tag{4.1}$$

Điều kiện biên

$$L_1\frac{\partial u}{\partial r} + L_2u = \begin{cases} -p(t) & \text{khi } r = a, \\ 0 & \text{khi } r = b. \end{cases} \tag{4.2}$$

Điều kiện liên tục trên biên của các lớp

$$[u] = 0 \quad \text{khi} \quad r = r_i,$$

$$\left[L_1 \frac{\partial u}{\partial r} + L_2 u\right] = 0 \quad \text{khi} \quad r = r_i, \quad i = 1, 2, \ldots, NM. \tag{4.3}$$

Giả sử rằng $p(t) = p_0 \exp(i\omega t)$, $p_0 = \text{const}$. Khi đó nghiệm của phương trình (4.1) được tìm dưới dạng sau

$$u = U(r) \exp(i\omega t). \tag{4.4}$$

Thay thế (4.4) vào (4.1), (4.2), (4.3) ta nhận được

$$\frac{d}{dr}\left[L_1 \frac{dU}{dr} + L_2 U\right] + L_3 \frac{dU}{dr} + \tilde{L}_4 U = 0. \tag{4.5}$$

Điều kiện biên

$$L_1 \frac{dU}{dr} + L_2 U = \begin{cases} -p_0 & \text{khi} \quad r = a. \\ 0 & \text{khi} \quad r = b. \end{cases} \tag{4.6}$$

Điều kiện liên tục

$$[U] = 0 \quad \text{khi} \quad r = r_i,$$

$$\left[L_1 \frac{dU}{dr} + L_2 U\right] = 0 \quad \text{khi} \quad r = r_i, \tag{4.7}$$

trong đó $L_1(r) = \lambda(r) + 2\mu(r)$;

$$L_2(r) = \frac{2\lambda(r)}{r}, \quad L_3(r) = \frac{4\mu(r)}{r}, \quad \tilde{L}_4 = \rho\omega^2 - \frac{4\mu(r)}{r^2}.$$

Như vậy hệ (4.5) có dạng tương tự như bài toán tĩnh. Ta tìm nghiệm U dưới dạng

$$U = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \sum_{i=0}^{q} N_{qi}(\xi, r) \frac{d^{(i)}V(r)}{dr^i}.$$

Cách làm tương tự như ở mục trước, với xấp xỉ bậc không, phương trình (4.5) có dạng

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} + \left[A_1 - \frac{B_1}{r^2}\right]V = 0, \tag{4.8}$$

Điều kiện biên (4.6) dẫn đến

$$\frac{dV}{dr} + \frac{A_2}{r} V = \begin{cases} B_2 & \text{khi} \quad r = \dfrac{a}{H}, \\ 0 & \text{khi} \quad r = \dfrac{b}{H}, \end{cases} \tag{4.9}$$

trong đó

$$A_1 = \omega^2 H\langle\rho\rangle\left\langle\frac{1}{\lambda + 2\mu}\right\rangle, \quad B_1 = 2\left\langle\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\right\rangle\left\langle\frac{\lambda - 2\mu}{\lambda + 2\mu}\right\rangle + 4\left\langle\frac{1}{\lambda+2\mu}\right\rangle\left\langle\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+2\mu}\right\rangle,$$

$$A_2 = 2\left\langle\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\right\rangle, \qquad B_2 = -p_0 H\left\langle\frac{1}{\lambda+2\mu}\right\rangle.$$

Nghiệm của phương trình (4.8) có dạng

$$V = r^{-\frac{1}{2}}\Big[C_1 J_\gamma(\sqrt{A_1}\, r) + C_2 Y_\gamma(\sqrt{A_1}\, r)\Big], \tag{4.10}$$

$J_\gamma(\sqrt{A_1}\, r)$ là hàm Betxen loại một

$$J_\gamma(\sqrt{A_1}\, r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Big(\frac{\sqrt{A_1}\, r}{2}\Big)^{\gamma+2k}}{k!\Gamma(\gamma+k+1)},$$

$$Y_\gamma(\sqrt{A_1}\, r) = \frac{J_\gamma(\sqrt{A_1}\, r)\cos\gamma\Pi - J_{-\gamma}(\sqrt{A_1}\, r)}{\sin\gamma\Pi},$$

trong đó $\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{1+4B_1}$, C_1 và C_2 được xác định từ điều kiện biên (4.9).

Chuyển vị u của môi trường sẽ có dạng

$$u = U(r)\exp(i\omega t) = \Big[V(r) + \varepsilon N_{10} V(r) + \varepsilon N_{11} V^{(1)}\Big]\exp(i\omega t),$$

trong đó V được xác định theo công thức (4.10).

5. Kết luận

Bằng cách sử dụng phương pháp thuần nhất hóa ta đã tiến hành thuần nhất hóa các phương trình cân bằng và phương trình chuyển động của cầu rỗng composite lớp đàn hồi. Ưu thế của phương pháp là cho phép xấp xỉ nghiệm với độ chính xác tùy ý, trong đó việc giải nghiệm ở xấp xỉ bậc không sẽ là các dữ liệu ban đầu cho việc xấp xỉ nghiệm ở bậc nhất.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Giáo sư Tiến sỹ Đào Huy Bích đã hướng dẫn hoàn thành bài báo này

Công trình này được thực hiện với sự tài trợ của Chương trình nghiên cứu Cơ bản Nhà nước trong Khoa học tự nhiên

Địa chỉ:
Trường Đại học Giao thông vận tải Hà Nội

Nhận ngày 8/9/1997

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Pobedrja B. E. Cơ học vật liệu composite (tiếng Nga), MGU, 1984.
2. Đào Huy Bích. Lý thuyết đàn hồi. Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, 1979.
3. Phạm Chí Vĩnh. Homogenization and Cylindrical Waves in Composite Media. Tuyển tập công trình khoa học Hội nghị Cơ học Vật rắn biến dạng toàn quốc lần thứ 5, 1976, trang 669-680.
4. Phạm Thị Toan. Các phương trình cơ bản của bài toán tĩnh và động của bản composite nhiều lớp. Tạp chí Cơ học, tập XVIII, số 2, 1996, trang 35-42.

SUMMARY

THE HOMOGENIZATION METHOD IN THE PROBLEM OF A SPHERICAL LAYERED ELASTIC COMPOSITE HOLLOW

In this paper, by using the homogenization method for the partial differential equations we study the statics and dynamics problems of a spherical layered elastic composite hollow.

We can determine the approximate solution with an arbitrary accuracy, by solving a recurrent series of problems with homogeneous material, where the solution of problem in zero degree (the effective modulus theory) is initial data.