Tạp chí Cơ học Journal of Mechanics, NCNST of Vietnam T. XIX, 1997, No 3 (9 - 18)

TÍNH TOÁN VỎ TRỤ COMPOSITE LỚP LƯỢN SÓNG

ĐÀO HUY BÍCH *, VŨ KHẮC BẢY **
ĐÀO VĂN DŨNG *, TRẦN ÍCH THỊNH ***, PHẠM CHÍ VĨNH *

Kết cấu dưới dạng vỏ trụ hở bán kính R, chiều dài L và độ dày h bằng vật liệu composite lớp, liên kết cứng theo đường sinh chịu tác động của các tải trọng, vỏ lượn sóng dọc theo đường sinh.

1. Một vài nét về lý thuyết mô đun hiệu quả của composite lớp

Composite lớp bao gồm nhiều bó tuần hoàn theo tọa độ x_3, mỗi bó bao gồm nhiều lớp, mỗi lớp là vật liệu đàn hồi có thể dị hướng và không thuần nhất. Lý thuyết mô đun hiệu quả dẫn đến quan hệ ứng suất - biến dạng

$$\sigma_{ij} = h_{ijk\ell}\varepsilon_{k\ell} \tag{1.1}$$

trong đó

$$h_{ijk\ell} = \langle C_{ijk\ell}\rangle + \langle C_{ijm3}C^{-1}_{m3n3}\rangle\langle C^{-1}_{n3p3}\rangle^{-1}\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3k\ell}\rangle - \langle C_{ijm3}C^{-1}_{m3n3}C_{n3k\ell}\rangle$$

$h_{ijk\ell}$ - tenxơ mô đun hiệu quả, $C_{ijk\ell}$ - ten xơ mô đun của các thành phần,

$\langle\ldots\rangle$ - dấu ngoặc chỉ giá trị trung bình của đại lượng tương ứng, $\langle f\rangle = \int\limits_0^1 f(\xi)d\xi$.

Nếu lớp là trực hướng, các thành phần độc lập khác không của ten xơ mô đun hiệu quả có dạng:

$$\begin{aligned}
h_{1111} &= \langle C_{1111}\rangle + \frac{1}{\langle 1/C_{3333}\rangle}\Big\langle\frac{C_{1133}}{C_{3333}}\Big\rangle^2 - \Big\langle\frac{C^2_{1133}}{C_{3333}}\Big\rangle,\\
h_{2222} &= \langle C_{2222}\rangle + \frac{1}{\langle 1/C_{3333}\rangle}\Big\langle\frac{C_{2233}}{C_{3333}}\Big\rangle^2 - \Big\langle\frac{C^2_{2233}}{C_{3333}}\Big\rangle,\\
h_{3333} &= \frac{1}{\langle 1/C_{3333}\rangle},\\
h_{1122} &= \langle C_{1122}\rangle + \frac{1}{\langle 1/C_{3333}\rangle}\Big\langle\frac{C_{1133}}{C_{3333}}\Big\rangle\Big\langle\frac{C_{2233}}{C_{3333}}\Big\rangle - \Big\langle\frac{C_{1133}C_{2233}}{C_{3333}}\Big\rangle,\\
h_{1133} &= \frac{1}{\langle 1/C_{3333}\rangle}\Big\langle\frac{C_{1133}}{C_{3333}}\Big\rangle, \quad h_{2233} = \frac{1}{\langle 1/C_{3333}\rangle}\Big\langle\frac{C_{2233}}{C_{3333}}\Big\rangle,\\
h_{1212} &= \langle C_{1212}\rangle, \quad h_{1313} = \frac{1}{\langle 1/C_{1313}\rangle}, \quad h_{2323} = \frac{1}{\langle 1/C_{2323}\rangle}.
\end{aligned}$$

Sử dụng lý thuyết mô đun hiệu quả vào bài toán ứng suất phẳng suy rộng (tấm hoặc vỏ mỏng)

$$\sigma_{33} = 0 \text{ trên toàn độ dày (hướng } x_3)$$
$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \text{ trên mặt } x_3 = \pm h/2$$

ta có quan hệ ứng suất biến dạng:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \Big(h_{1111} - \frac{h_{1133}^2}{h_{3333}}\Big)\varepsilon_{11} + \Big(h_{1122} - \frac{h_{1133}h_{2233}}{h_{3333}}\Big)\varepsilon_{22},\\
\sigma_{22} &= \Big(h_{1122} - \frac{h_{1133}h_{2233}}{h_{3333}}\Big)\varepsilon_{11} + \Big(h_{2222} - \frac{h_{2233}^2}{h_{3333}}\Big)\varepsilon_{22},\\
\sigma_{12} &= 2h_{1212}\varepsilon_{12}.
\end{aligned}
$$

Đưa vào các mô đun kỹ thuật:

$$
\begin{aligned}
&G = h_{1212},\\
&\frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2} = h_{1111} - \frac{h_{1133}^2}{h_{3333}}, \quad \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2} = h_{2222} - \frac{h_{2233}^2}{h_{3333}},\\
&\nu_2 = \frac{h_{1122}h_{3333} - h_{1133}h_{2233}}{h_{1111}h_{3333} - h_{1133}^2}, \quad \nu_1 = \frac{h_{1122}h_{3333} - h_{1133}h_{2233}}{h_{2222}h_{3333} - h_{2233}^2},\\
&E_1\nu_2 = E_2\nu_1.
\end{aligned}
$$

Các hệ thức trên có dạng:

$$
\sigma_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2}(\varepsilon_{11} + \nu_2\varepsilon_{22}), \quad \sigma_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2}(\varepsilon_{22} + \nu_1\varepsilon_{11}), \quad \sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12}. \tag{1.2}
$$

2. Vỏ trụ composite

a) Các hệ thức cơ bản

Chọn hệ trục tọa độ: x - theo đường sinh vỏ trụ, y - hướng tiếp tuyến với cung tròn, z - hướng theo pháp tuyến và ký hiệu u, v, w là chuyển vị của mặt giữa theo các hướng x, y, z tương ứng.

Biến dạng của vỏ được xác định bởi:

$$
\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^0 - z\chi_{11}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}^0 - z\chi_{22}, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^0 - z\chi_{12},
$$

trong đó:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{11}^0 &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \chi_{11} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\\
\varepsilon_{22}^0 &= \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R}, & \chi_{22} &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\\
\varepsilon_{12}^0 &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\Big), & \chi_{12} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

Ứng suất được xác định theo (1.2)

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2}(\varepsilon_{11}^0 + \nu_2\varepsilon_{22}^0) - \frac{E_1 z}{1-\nu_1\nu_2}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big),\\
\sigma_{22} &= \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2}(\varepsilon_{22}^0 + \nu_1\varepsilon_{11}^0) - \frac{E_2 z}{1-\nu_1\nu_2}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big),\\
\sigma_{12} &= 2G\varepsilon_{12}^0 - 2Gz\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

Các thành phần nội lực và mô men:

$$N_1 = \frac{E_1 h}{1-\nu_1\nu_2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu_2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\nu_2}{R}w\Big), \quad N_2 = \frac{E_2 h}{1-\nu_1\nu_2}\Big(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu_1\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{w}{R}\Big),$$

$$N_{12} = Gh\Big(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\Big), \tag{2.3}$$

$$M_1 = -\frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big), \quad M_2 = -\frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big),$$

$$M_{12} = -\frac{Gh^3}{6}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\,. \tag{2.4}$$

Các thành phần này thỏa mãn các phương trình:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial y} + X = 0,\\ &\frac{\partial N_{12}}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + Y = 0,\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + \frac{N_2}{R} + Z = 0 \tag{2.6}$$

và phương trình tương thích

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big[\frac{N_1 - \nu_1 N_2}{E_1 h}\Big] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big[\frac{N_2 - \nu_2 N_1}{E_2 h}\Big] - \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\Big[\frac{N_{12}}{Gh}\Big] + \frac{1}{R}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \tag{2.7}$$

b) Thiết lập hệ phương trình giải theo ứng suất

Đưa vào hàm ứng suất

$$N_1 = h\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\,, \quad N_2 = h\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\,, \quad N_{12} = -h\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}$$

hệ phương trình (2.5) thỏa mãn đồng nhất khi $X = Y = 0$.

Phương trình (2.7) đưa về:

$$\frac{1}{E_2}\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} + \Big(\frac{1}{G} - 2\frac{\nu_1}{E_1}\Big)\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{1}{E_1}\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \tag{2.8}$$

Thay (2.4) vào (2.6) dẫn đến:

$$D_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + D_2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - Z - \frac{h}{R}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0 \tag{2.9}$$

trong đó:

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}\,, \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}\,, \quad D_3 = D_1\nu_2 + 2D_k, \quad D_k = \frac{Gh^3}{12}$$

c) Thiết lập hệ phương trình giải theo chuyển vị

Nhờ (2.3), (2.4) đưa hệ phương trình (2.5), (2.6) về ba phương trình đối với ba thành phần chuyển vị u, v, w:

$$\frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+G\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\Big(\frac{E_1\nu_2}{1-\nu_1\nu_2}+G\Big)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{E_1\nu_2}{R(1-\nu_1\nu_2)}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{X}{h}=0,$$
$$G\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\Big(\frac{E_2\nu_1}{1-\nu_1\nu_2}+G\Big)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{E_2}{R(1-\nu_1\nu_2)}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{Y}{h}=0, \tag{2.10}$$
$$-D_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-2D_3\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}-D_2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\frac{E_2 h}{1-\nu_1\nu_2}\cdot\frac{1}{R}\Big(\frac{\partial v}{\partial y}+\nu_1\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{w}{R}\Big)+Z=0.$$

Giải các phương trình (2.8), (2.9) (theo ứng suất) hoặc (2.10) (theo chuyển vị) cùng với các điều kiện biên cho phép nhận được nghiệm của bài toán.

d) Vỏ lượn sóng

Nếu vỏ lượn sóng theo chiều trục x có dạng hình sin

$$z=H\sin\frac{\pi x}{\ell}$$

thì theo Seydel ta có thể đưa về vỏ tương đương với các mô đun như sau:

$$D_1'=\frac{\ell}{s}D_1,\quad D_2'=E_2I,\quad D_3'=\frac{s}{\ell}(1-\nu_1)D_3,\quad G'=\frac{s}{\ell}(1-\nu_1)G,\quad \nu_2'=\nu_2-\nu_1\nu_2 \tag{2.11}$$

$$\frac{\nu_1'}{D_1'}=\frac{\nu_2'}{D_2'},\quad I=\frac{hH^2}{2}\left[1-\frac{0,81}{1+2,5\Big(\dfrac{H}{2\ell}\Big)^2}\right]$$

trong đó: ℓ - chu kỳ lượn sóng, H - độ cao sóng, s - chiều dài cung hình sin

$$s=\int_0^{\ell}\sqrt{1+\frac{\pi^2H^2}{\ell^2}\cos^2\frac{\pi x}{\ell}}\,dx$$

e) Tải trọng

Tải trọng phân ra hai loại

- tải trọng bình thường
- tải trọng gió

* Tải trọng bình thường tùy theo cách đặt lực mà phân ra thành các thành phần tương ứng.

* Tải trọng gió được tính theo TCVN 2737 - 1995

$$p=p_0\times k\times c$$

p_0 - áp lực gió lấy theo bản đồ phân vùng
k - hệ số tính đến sự thay đổi của áp lực gió theo độ cao
c - hệ số khí động.

3. Phương pháp giải bài toán

A) Giải theo ứng suất

Viết lại hai phương trình (2.8), (2.9) cho vỏ lượn sóng:

$$\frac{1}{E_2'}\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+\Big(\frac{1}{G'}-2\frac{\nu_1'}{E_1'}\Big)\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{1}{E_1'}\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0, \tag{3.1}$$

$$D_1'\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2D_3'\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_2'\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-Z-\frac{h}{R}\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2}=0. \tag{3.2}$$

Chọn gốc tọa độ tại điểm giữa vòm và đặt $L = 2a$, $\pi R = 2b$.

a) Trường hợp vòm dưới dạng vỏ trụ hai đầu tự do, hai cạnh đáy bị gắn cứng (ngàm chặt), ta có các điều kiện biên sau:

Tại $x = \pm a$ (tự do)

$$N_1 = 0, \quad N_{12} + \frac{M_{12}}{R} = 0, \quad M_1 = 0, \quad Q_1 + \frac{\partial M_{12}}{\partial y} = 0 \tag{3.3}$$

Thay các biểu thức của nội lực và mô men, các điều kiện biên này có dạng

Tại $x = \pm a$ (tự do)

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad -h\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{2D'_k}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0,\\ -D'_1\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu'_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) = 0, \quad -\Big[D'_1\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \big(D'_1\nu'_2 + 4D'_k\big)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\Big] = 0.\end{gathered} \tag{3.3'}$$

Tại $y = \pm b$ (ngàm)

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad u = 0, \quad v = 0. \tag{3.4}$$

Sử dụng các công thức (2.3) các điều kiện biên này có dạng

Tại $y = \pm b$ (ngàm)

$$\begin{aligned}&w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0,\\ &u = \frac{1}{h}\int\Big(\frac{N_1}{E'_1} - \frac{\nu'_2 N_2}{E'_2}\Big)dx = \int\Big(\frac{1}{E'_1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{\nu'_2}{E'_2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\Big)dx = 0,\\ &v = \int\Big(\frac{N_2}{hE'_2} - \frac{\nu'_1}{hE'_1}N_1 + \frac{w}{R}\Big)dy = \int\Big(\frac{1}{E'_2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\nu'_1}{E'_1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{w}{R}\Big)dy = 0.\end{aligned} \tag{3.4'}$$

b) Trường hợp vòm dưới dạng vỏ trụ hai đầu tựa, hai cạnh đáy bị gắn cứng ta có điều kiện biên sau:

Tại $y = \pm b$ vẫn có điều kiện (3.4) (hoặc (3.4')), còn tại $x = \pm a$:

$$\begin{gathered}w = 0\\ M_1 = 0, \quad N_1 = 0, \quad N_{12} = 0\end{gathered} \tag{3.5}$$

hay là

$$\begin{gathered}w = 0,\\ -D'_1\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu'_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) = 0, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = 0.\end{gathered} \tag{3.5'}$$

Bây giờ sử dụng phương pháp Bubnov-Galerkin để giải hệ phương trình (3.1), (3.2) với điều kiện biên (3.3'), (3.4') hoặc điều kiện biên (3.4'), (3.5') tùy giả thiết về gắn vòm.

Đặt

$$w = \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} A_{mn}X_m(x)Y_n(y), \quad \varphi = \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} B_{mn}U_m(x)V_n(y) \tag{3.6}$$

Chọn các hàm $X_m(x)$, $Y_n(y)$, $U_m(x)$, $V_n(y)$ là các hàm độc lập tuyến tính sao cho thỏa mãn các điều kiện biên.

Thay vào các phương trình (3.1), (3.2) ta được:

$$\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} B_{mn}\Big[\frac{1}{E_1'}U_m^{(4)}V_n + \Big(\frac{1}{G'} - 2\frac{\nu_1'}{E_1'}\Big)U_m''V_n'' + \frac{1}{E_1'}U_mV_n^{(4)}\Big] + \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} A_{mn}\frac{1}{R}X_m''Y_n \equiv \Phi = 0, \tag{3.7}$$

$$\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} A_{mn}\big(D_1'X_m^{(4)}Y_n + 2D_3'X_n''Y_n'' + D_2'X_mY_n^{(4)}\big) - Z - \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{h}{R}B_{mn}U_m''V_n \equiv W = 0, \tag{3.8}$$

Nhân phương trình (3.7) với U_iV_j và phương trình (3.8) với X_iY_j rồi lấy tích phân trên toàn vật thể ta được

$$\begin{gathered}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\Phi U_iV_jdxdy = 0 \\ \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} WX_iY_jdxdy = 0 \quad (i,j = 1,2,\dots N)\end{gathered} \tag{3.9}$$

Đây là hệ $2N \times N$ phương trình để xác định $2N \times N$ hệ số A_{mn}, B_{mn} $(m, n = 1, 2, \dots, N)$

Việc chọn các hàm U_i, V_j, X_i, Y_j một mặt phải thỏa mãn điều kiện biên, mặt khác còn phụ thuộc vào dạng tải trọng tác dụng lên vòm. Ta xét hai trường hợp đặc trưng:

(i) Vòm chịu tác dụng của áp lực đều

Việc chọn dạng của hàm w và φ cũng chia ra hai trường hợp:

* Hai đầu tựa, cạnh đáy ngàm:

$$\begin{aligned} w &= \sum_{m=1}^{n}\sum_{n=1}^{N} A_{mn}\Big(\frac{x^2}{a^2}-1\Big)^{m+3}\Big(1+(-1)^{n+1}\cos\frac{n\pi y}{b}\Big) \\ \varphi &= \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} B_{mn}\Big(1+(-1)^{m+1}\cos\frac{m\pi x}{a}\Big)\cos\frac{n\pi y}{b}\end{aligned} \tag{3.10}$$

như vậy ta đã chọn:

$$\begin{aligned} X_m(x) &= \Big(\frac{x^2}{a^2}-1\Big)^{m+3}, \qquad & Y_n(y) &= 1+(-1)^{n+1}\cos\frac{n\pi y}{b} \\ U_m(x) &= 1+(-1)^{m+1}\cos\frac{m\pi x}{a}, & V_n(y) &= \cos\frac{n\pi y}{b}\end{aligned}$$

* Hai đầu tự do, cạnh đáy ngàm:

$$\begin{aligned} w &= \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} A_{mn}X_mY_n = \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} A_{mn}\Big[1+\Big(\frac{x^2}{a^2}-1\Big)^{m+3}\Big]\Big(1+(-1)^{n+1}\cos\frac{n\pi y}{b}\Big), \\ \varphi &= \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} B_{mn}U_mV_n = \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} B_{mn}\Big(1+(-1)^{m+1}\cos\frac{m\pi x}{a}\Big)\cos\frac{n\pi y}{b}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

(ii) Vòm chịu tác dụng của gió ngang

* Hai đầu tựa, cạnh đáy ngàm: ta chọn các hàm w, φ dưới dạng

$$\begin{aligned} w &= \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} A_{mn}\Big(\frac{x^2}{a^2}-1\Big)^{m+3}\Big[1+(-1)^{n+1}\cos\frac{n\pi y}{b}+\sin\frac{(4n-1)\pi y}{2b}+\sin\frac{\pi y}{2b}\Big], \\ \varphi &= \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} B_{mn}\Big[1+(-1)^{m+1}\cos\frac{m\pi x}{a}\Big]\Big(\cos\frac{n\pi y}{b}+\sin\frac{(4n-1)\pi y}{2b}+\sin\frac{\pi y}{2b}\Big).\end{aligned} \tag{3.12}$$

* Hai đầu tự do, cạnh đáy ngàm: các hàm này chọn dưới dạng

$$w = \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} A_{mn}\Big[1+\Big(\frac{x^2}{a^2}-1\Big)^{m+3}\Big]\Big[1+(-1)^{n+1}\cos\frac{n\pi y}{b}+\sin\frac{(4n-1)\pi y}{2b}+\sin\frac{\pi y}{2b}\Big],$$

$$\varphi = \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} B_{mn}\Big[1+(-1)^{m+1}\cos\frac{m\pi x}{a}\Big]\Big[\cos\frac{n\pi y}{b}+\sin\frac{(4n-1)\pi y}{2b}+\sin\frac{\pi y}{2b}\Big]\,. \tag{3.13}$$

Sau khi xác định w và φ là nghiệm của bài toán (3.1), (3.2) với điều kiện biên (3.3'), (3.4') hoặc (3.4'), (3.5') ta xác định các thành phần nội lực và mô men

$$N_1 = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\,,\quad N_2 = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\,,\quad N_{12} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \tag{3.14}$$

$$M_1 = -D_1'\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu_2'\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big)\,,\ M_2 = -D_2'\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu_1'\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)\,,\ M_{12} = -2D_k'\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\,.$$

Các thành phần ứng suất tại từng điểm của vỏ được tính theo công thức (2.2), sau một vài phép biến đổi dẫn đến

$$\sigma_{11} = \frac{N_1}{h}+\frac{12zM_1}{h^3}\,,\quad \sigma_{22} = \frac{N_2}{h}+\frac{12zM_2}{h^3}\,,\quad \sigma_{12} = \frac{N_{12}}{h}+\frac{12zM_{12}}{h^3}\,. \tag{3.15}$$

B) Giải theo chuyển vị

Ký hiệu các đại lượng không thứ nguyên

$$\alpha = \frac{x}{R}\,,\quad \varphi = \frac{y}{R}\,,\quad \overline{w} = \frac{w}{h}\,,\quad \overline{u} = \frac{u}{h}\,,\quad \overline{v} = \frac{v}{h}\,,$$

$$A_1 = \nu_1' + (1-\nu_1'\nu_2')\frac{G'}{E_1'}\,,\quad A_2 = \nu_2' + (1-\nu_1'\nu_2')\frac{G_1'}{E_2'}\,,\quad B_1 = (1-\nu_1'\nu_2')\frac{G'}{E_1'}\,,$$

$$B_2 = (1-\nu_1'\nu_2')\frac{G'}{E_2'}\,,\quad H = \frac{D_3'}{D_1'}\,,\quad K = \frac{D_2'}{D_1'} = \frac{E_2'}{E_1'}\,,\quad C = \frac{h^2}{12R^2}\,,$$

$$\overline{X} = -\frac{X(1-\nu_1'\nu_2')R^2}{E_1'h^2}\,,\quad \overline{Y} = -\frac{Y(1-\nu_1'\nu_2')R^2}{E_2'h^2}\,,\quad \overline{Z} = -\frac{Z(1-\nu_1'\nu_2')R^2}{E_1^2h^2}\,,$$

Hệ phương trình (2.10) cho vỏ lượn sóng đưa về dạng:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial\alpha^2}+A_1\frac{\partial^2\overline{v}}{\partial\alpha\partial\varphi}+B_1\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial\varphi^2}-\nu_2'\frac{\partial\overline{w}}{\partial\alpha}=\overline{X},\\
&\frac{\partial^2\overline{v}}{\partial\varphi^2}+A_2\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial\alpha\partial\varphi}+B_2\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial\overline{w}}{\partial\varphi}=\overline{Y},\\
&-C\Big(\frac{\partial^4\overline{w}}{\partial x^4}+2H\frac{\partial^4\overline{w}}{\partial\alpha^2\partial\varphi^2}+K\frac{\partial^4\overline{w}}{\partial\varphi^4}\Big)+\nu_1'\frac{\partial\overline{u}}{\partial\alpha}+\frac{\partial\overline{v}}{\partial\varphi}-\overline{w}=\overline{Z}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Đây là hệ phương trình đạo hàm riêng tuyến tính không thuần nhất, nghiệm tổng quát của chúng bằng nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng cộng với một nghiệm riêng của hệ không thuần nhất.

Để tìm nghiệm của hệ phương trình thuần nhất ta đặt:

$$\overline{u} = L_1\phi(a,\varphi),\quad \overline{v} = L_2\phi(\alpha,\varphi),\quad \overline{w} = L_3\phi(\alpha,\varphi)$$

L_1, L_2, L_3 và $\overline{L}_1$ là các toán tử tuyến tính cần tìm và ϕ là hàm cần tìm sao cho $\overline{L}_1\phi = 0$. Thay vào hệ phương trình dẫn đến:

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + B_1\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Big)L_1 + \Big(A_1\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\varphi}\Big)L_2 - \Big(\nu_2'\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big)L_3 = 0,$$
$$\Big(A_2\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\varphi}\Big)L_1 + \Big(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + B_2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\Big)L_2 - \Big(\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big)L_3 = 0,$$
$$\Big(\nu_1'\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big)L_1 + \Big(\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big)L_2 - \Big[C\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + 2CH\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\varphi^2} + KC\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4} + 1\Big]L_3 = \overline{L}_1.$$

Từ hai phương trình đầu đưa về:

$$\Big[(1 - \nu_2'A_2)\frac{\partial^3}{\partial\alpha^2\partial\varphi} + B_1\frac{\partial^3}{\partial\varphi^3}\Big]L_1 + \Big[(A_1 - \nu_2')\frac{\partial^3}{\partial\alpha\partial\varphi^2} - B_2\nu_2'\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3}\Big]L_2 = 0,$$

suy ra

$$L_1 = (A_1 - \nu_2')\frac{\partial^3}{\partial\alpha\partial\varphi^2} - B_2\nu_2'\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3}\,, \quad L_2 = (\nu_2'A_2 - 1)\frac{\partial^3}{\partial\alpha^2\partial\varphi} - B_1\frac{\partial^3}{\partial\varphi^3}\,,$$

đem thay vào phương trình thứ hai tính được

$$L_3 = -B_2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} - B_1\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4} + (A_1A_2 - B_2B_1 - 1)\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\varphi^2}\,.$$

Thay các biểu thức của L_1, L_2, L_3, vào phương trình thứ ba và đặt:

$$T_1 = \frac{B_2}{B_1K}\,, \quad T_2 = \frac{1}{B_1K}(1 - A_1A_2 + B_1B_2) + \frac{2B_2H}{B_1K}\,,$$
$$T_3 = \frac{B_2}{B_1} + \frac{2H}{B_1K}(1 - A_1A_2 + B_1B_2) + \frac{1}{K}, \quad T_4 = \frac{2H}{K} + \frac{1}{B_1}(1 - A_1A_2 + B_1B_2)\,,$$
$$T_5 = \frac{B_2}{B_1}\,\frac{1 - \nu_1'\nu_2'}{KC}\,, \quad T_6 = \frac{\nu_1'A_1 + \nu_2'A_2 - A_1A_2 + B_1B_2 - \nu_1'\nu_2'}{B_1KC}\,,$$

ta được

$$\overline{L}_1 = \frac{\partial^8}{\partial\varphi^8} + T_4\frac{\partial^8}{\partial\varphi^6\partial\alpha^2} + T_3\frac{\partial^8}{\partial\alpha^4\partial\varphi^4} + T_2\frac{\partial^8}{\partial\alpha^6\partial\varphi^2} + T_1\frac{\partial^8}{\partial\alpha^8} + T_5\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + T_6\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\varphi^2}\,. \qquad (3.17)$$

Bây giờ giải phương trình

$$\overline{L}_1\phi = 0,$$

tìm hàm ϕ dưới dạng:

$$\phi = \sum_{m=1} f_m(\varphi)\sin(\lambda_m\alpha) \quad \text{với} \quad \lambda_m = \frac{m\pi R}{L}\,.$$

Khi đó hàm $f_m(\varphi)$ phải thỏa mãn phương trình:

$$\frac{d^8f_m}{d\varphi^8} - T_4\lambda_m^2\frac{d^6f_m}{d\varphi^6} + \lambda_m^4T_3\frac{d^4f_m}{d\varphi^4} - (T_2\lambda_m^6 + T_6\lambda_m^2)\frac{d^2f_m}{d\varphi^2} + (T_1\lambda_m^8 + T_5\lambda_m^4)f_m = 0. \qquad (3.18)$$

Phương trình đặc trưng của phương trình này

$$k^8 - T_4\lambda_m^2k^6 + T_3\lambda_m^4k^4 - (T_2\lambda_m^6 + T_6\lambda_m^2)k^2 + T_1\lambda_m^8 + T_5\lambda_m^4 = 0$$

là phương trình bậc 4 đối với k^2, 8 nghiệm tương ứng với k có dạng tổng quát sau:

$$\alpha_m^{(j)} + i\beta_m^{(j)} \quad \text{và} \quad -\alpha_m^{(j)} - i\beta_m^{(j)}, \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

Do vậy, $f_m(\varphi)$ có dạng:

$$\begin{aligned}
&f_m(\varphi) = \\
&C_m^{(1)}(\text{ch}\alpha_m^{(1)}\varphi\cos\beta_m^{(1)}\varphi + \text{sh}\alpha_m^{(1)}\varphi\sin\beta_m^{(1)}\varphi) + C_m^{(2)}(\text{sh}\alpha_m^{(1)}\varphi\cos\beta_m^{(1)}\varphi + \text{ch}\alpha_m^{(1)}\varphi\sin\beta_m^{(1)}\varphi) \\
&+ C_m^{(3)}(\text{ch}\alpha_m^{(2)}\varphi\cos\beta_m^{(2)}\varphi + \text{sh}\alpha_m^{(2)}\varphi\sin\beta_m^{(2)}\varphi) + C_m^{(4)}(\text{sh}\alpha_m^{(2)}\varphi\cos\beta_m^{(2)}\varphi + \text{ch}\alpha_m^{(2)}\varphi\sin\beta_m^{(2)}\varphi) \\
&+ C_m^{(5)}(\text{ch}\alpha_m^{(3)}\varphi\cos\beta_m^{(3)}\varphi + \text{sh}\alpha_m^{(3)}\varphi\sin\beta_m^{(3)}\varphi) + C_m^{(6)}(\text{sh}\alpha_m^{(3)}\varphi\cos\beta_m^{(3)}\varphi + \text{ch}\alpha_m^{(3)}\varphi\sin\beta_m^{(3)}\varphi) \\
&+ C_m^{(7)}(\text{ch}\alpha_m^{(4)}\varphi\cos\beta_m^{(4)}\varphi + \text{sh}\alpha_m^{(4)}\varphi\sin\beta_m^{(4)}\varphi) + C_m^{(8)}(\text{sh}\alpha_m^{(4)}\varphi\cos\beta_m^{(4)}\varphi + \text{ch}\alpha_m^{(4)}\varphi\sin\beta_m^{(4)}\varphi)
\end{aligned}$$

chứa 8 hằng số tùy ý $C_m^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, 8)$.

Nghiệm tổng quát của hệ phương trình thuần nhất (3.16) được xác định bởi

$$\overline{u}^{(0)} = L_1\phi, \quad \overline{v}^{(0)} = L_2\phi, \quad \overline{w}^{(0)} = L_3\phi. \tag{3.19}$$

Bây giờ xác định nghiệm riêng $\overline{u}^*$, $\overline{v}^*$, $\overline{w}^*$. Muốn vậy khai triển các hàm $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ trong (3.16) thành chuỗi Fourier.

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= X_{00} + \sum_{m=1} X_{m0}\cos m\varphi + \sum_{n=1} X_{0n}\cos\lambda_n\alpha + \sum_{m=1}\sum_{n=1} X_{mn}\cos m\varphi\cos\lambda_n\alpha, \\
\overline{Y} &= \sum_{m=1}\sum_{n=1} Y_{mn}\sin m\varphi\sin\lambda_n\alpha, \\
\overline{Z} &= \sum_{n=1} Z_{0n}\sin\lambda_n\alpha + \sum_{m=1}\sum_{n=1} Z_{mn}\cos m\varphi\sin\lambda_n\alpha,
\end{aligned}$$

trong đó:

$$X_{00} = \frac{R}{\pi L}\int_0^{L/R}\int_0^{\pi}\overline{X}d\varphi d\alpha, \qquad X_{m0} = \frac{2R}{\pi L}\int_0^{L/R}\int_0^{\pi}\overline{X}\cos m\varphi d\varphi d\alpha,$$

$$X_{0n} = \frac{2R}{\pi L}\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^{L/R}\overline{X}\cos\lambda_n\alpha d\alpha, \qquad X_{mn} = \frac{4R}{\pi L}\int_0^{L/R}\int_0^{\pi}\overline{X}\cos m\varphi\cos\lambda_n\alpha d\alpha d\varphi,$$

$$Y_{mn} = \frac{4R}{\pi L}\int_0^{L/R}\int_0^{\pi}\overline{Y}\sin m\varphi\sin\lambda_n\alpha d\alpha d\varphi, \qquad Z_{0n} = \frac{2R}{\pi L}\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^{L/R}\overline{Z}\sin\lambda_n\alpha d\alpha,$$

$$Z_{mn} = \frac{4R}{\pi L}\int_0^{L/R}\int_0^{\pi}\overline{Z}\cos m\varphi\sin\lambda_n\alpha d\alpha d\varphi \qquad (m, n = 1, 2, \ldots).$$

Tìm nghiệm riêng dưới dạng:

$$\begin{aligned}
\overline{u}^* &= A_{00}^* + \sum_{m=1} A_{m0}^*\cos m\varphi + \sum_{n=1} A_{0n}^*\cos\lambda_n\alpha + \sum_{m=1}\sum_{n=1} A_{mn}^*\cos m\varphi\cos\lambda_n\alpha, \\
\overline{v}^* &= \sum_{m=1}\sum_{n=1} B_{mn}^*\sin m\varphi\sin\lambda_n\alpha, \\
\overline{w}^* &= \sum_{n=1} C_{0n}^*\sin\lambda_n\alpha + \sum_{m=1}\sum_{n=1} C_{mn}^*\cos m\varphi\sin\lambda_n\alpha.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Thay các biểu thức của $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ và $\overline{u}^*$, $\overline{v}^*$, $\overline{w}^*$ vào hệ phương trình (3.16) dẫn đến các phương trình để xác định các hệ số cần tìm A^*_{00}, A^*_{m0}, A^*_{0n}, A^*_{mn}, B^*_{mn}, C^*_{0n}, C^*_{mn} tức là tìm được nghiệm riêng. Khi đó nghiệm của bài toán sẽ là:

$$\overline{u} = L_1\phi + \overline{u}^*, \quad \overline{v} = L_2\phi + \overline{v}^*, \quad \overline{w} = L_3\phi + \overline{w}^* \tag{3.21}$$

trong các nghiệm này chứa các hệ số chưa xác định $C_m^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, 8)$, các hệ số này xác định bằng cách thỏa mãn điều kiện biên. Chẳng hạn, vỏ được gắn cứng (ngàm) dọc theo đường sinh $\varphi = 0$ và $\varphi = \pi$

$$\overline{w} = 0, \quad \frac{\partial \overline{w}}{\partial \varphi} = 0, \quad \overline{u} = 0, \quad \overline{v} = 0.$$

Ta có đủ hệ thức để xác định 8 đại lượng $C_m^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, 8)$.

Các tác giả đã xây dựng được bộ chương trình tính toán vỏ trụ composite lớp lượn sóng trên PC bằng ngôn ngữ PASCAL theo hai phương pháp nêu trên.

Kết luận

Đã thiết lập hệ kín các phương trình giải theo chuyển vị và theo ứng suất của bài toán vỏ trụ composite lớp lượn sóng và nêu ra các phương pháp nửa giải tích để tìm nghiệm của bài toán trên.

Dễ dàng tính toán bằng số cho các kết cấu vỏ cụ thể với tải trọng và điều kiện biên theo yêu cầu.

Công trình này được thực hiện với sự tài trợ của Chương trình nghiên cứu Cơ bản Nhà nước trong Khoa học tự nhiên

Địa chỉ:
** ĐH Quốc gia Hà Nội,*
*** ĐH Lâm nghiệp, *** ĐH Bách khoa Hà Nội*

Nhận ngày 2/8/1997

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Ambartsumyan S. A. Theory of anisotropic shells. NASA TT F-118, 1964.
2. Christensen R. M. Mechanics of composite materials. John Wiley & Sons, NY 1979.
3. Đào Huy Bích. Về bài toán bản composite lớp đàn hồi dị hướng. Tạp chí Cơ học, T. XVI, No 4, 1994.
4. Kornishin M. S. Nonlinear problem of plates and shells and its solution. Science Edition 1964.
5. Oghibalov P. M., Koltunov M. A. Obolotchki i plastinki. MGU 1969.
6. Robert M. Jones. Mechanics of composite materials. Mc. Graw-Hill Book Company, NY 1975.
7. Seydel E. Schubknickversuche mit Welblechtafeln. DVL-Bericht.
8. Timoshenko S., Woinowsky - Krieger S. Theory of plates and shells. Mc Graw-Hill Book Company, NY 1959.

SUMMARY

CALCULATION OF THE GOFFERED MULTILAYERED COMPOSITE CYLINDRICAL SHELLS

By using the effective modulus theory and Seydel assumptions the governing equations of the goffered multilayered composite cylindrical shell are formulated. Solution to the problem in term of displacements is given by the operator method, while the solution in term of stress function and deflection is obtained by Bubnov-Galerkin method in choosing appropriate forms of these quantities.