# THUẬT TOÁN ĐA THỨC XÁC ĐỊNH CHU TRÌNH HAMILTON TRONG LỚP ĐỒ THỊ $\sigma_2 \geq n-1$

**Vũ Đình Hòa[1], Nguyễn Hữu Xuân Trường[2],[*]**

[1]*Khoa CNTT, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội*

[2]*Khoa HTTTKT, Học viện Tài chính*

[*]Email: Truongnhx82@gmail.com

Đến Tòa soạn: 17/6/2012; Chấp nhận đăng: 7/11/2013

**TÓM TẮT**

Cho trước một đồ thị đơn vô hướng với $n$ đỉnh, ta kí hiệu $\sigma_2$ là tổng bậc bé nhất của các cặp đỉnh không kề nhau trong $G$.

Trong [1], các tác giả đã khảo sát đồ thị $n$đỉnh thỏa mãn điều kiện $d(x)+d(y)=n-1$ cho mọi cặp đỉnh không kề nhau $x$và $y$và chứng minh rằng đồ thị có chu trình Hamilton (chu trình đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị) khi và chỉ khi $n$ lẻ và $2 < \alpha < \frac{n+1}{2}$, ở đó $\alpha$ là chỉ số ổn định trong (số lớn nhất các đỉnh đôi một không kề nhau). Trong bài báo này chúng tôi khảo sát các lớp đồ thị rộng hơn là các lớp đồ thị thỏa mãn $\sigma_2 \geq n-1$. Chúng tôi chứng minh rằng khi đồ thị thỏa mãn $\sigma_2 \geq n-1$ thì nó có chu trình Hamilton trừ một số lớp đồ thị đặc biệt có thể nhận biết trong thời gian đa thức.

*Từ khóa:* chu trình Hamilton, NPC, tough, $\sigma_2(G)$.

## 1. MỞ ĐẦU

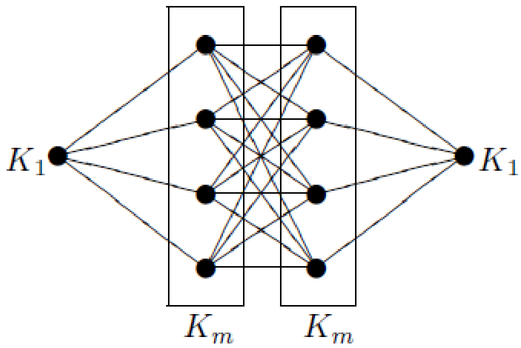
Trong bài báo này chúng ta sử dụng khái niệm và kí hiệu về đồ thị như trong [2], riêng đồ thị *đầy đủ* với $n$ đỉnh thì kí hiệu là $K_n$. Ta chỉ khảo sát các đồ thị đơn vô hướng. Đồ thị được gọi là *đồ thị Hamilton* nếu nó cóchu trình Hamilton(chu trình chứa tất cả các đỉnh của đồ thị). Cho trước đồ thị $G=(V,E)$, trong đó $V$ là tập đỉnh và $E$ là tập cạnh, ta luôn kí hiện $n$ là số đỉnh của $G$, với $x \in V(G)$kí hiệu $d(x)$ là bậc của đỉnh $x$ (số đỉnh kề với $x$ trong $G$), và với $\alpha$ ta kí hiệu là chỉ số ổn định trong của $G$ (là số lớn nhất các đỉnh đôi một không kề nhau). Ta định nghĩa:

$$\sigma_2(G) := \begin{cases} \min\{d(x)+d(y) \mid x,y \in V(G) \text{ và } xy \notin E(G)\}, & khi\ \alpha \geq 2 \\ \infty, & khi\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Đôi khi ta có thể viết $\sigma_2$ thay cho $\sigma_2(G)$ nếu không xảy ra nhầm lẫn.

Với hai đồ thị rời nhau $G_1$và $G_2$, ta kí hiệu $G_1 * G_2$là đồ thị có tập đỉnh là $V(G_1) \cup V(G_2)$ và tập cạnh là $E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{xy \mid x \in V(G_1),\ y \in V(G_2)\}$. Chẳng hạn: $K_2 * K_3 = K_5$, $\bar{K}_{n_1} * \bar{K}_{n_2} = K_{n_1,n_2}$ ($\bar{G}$ là đồ thị *bù* của $G$, tức là $V(\bar{G}) = V(G)$ và $xy \in E(\bar{G}) \Leftrightarrow xy \notin E(G)$).

Lưu ý là phép kết nối * không có tính chất kết hợp. Chẳng hạn, với số nguyên $m \geq 1$ thì $K_1 * K_m * K_m * K_1$là đồ thị được biểu diễn trong hình 1.




*Hình 1.* Đồ thị $K_1 * K_m * K_m * K_1$.

Đồ thị $G = (V, E)$ được gọi là *tough* hay *1-tough* nếu như với mọi tập đỉnh con $S \neq \emptyset$ của $G$ ta có số thành phần liên thông $\omega(G - S)$ của đồ thị $G - S$(là đồ thị thu được từ $G$ khi bỏ tập đỉnh $S$ cùng các cạnh có một đỉnh trong $S$) không vượt quá số phần tử của $S$. Hiển nhiên điều kiện *tough* [3] là một điều kiện cần cho sự tồn tại chu trình Hamilton trong $G$. Ngoài ra một đồ thị *tough* thì hiển nhiên là 2-liên thông. Bài toán xác định một đồ thị cho trước có thỏa mãn điều kiện tough hay không được phát biểu như sau:

**NOT-1-TOUGH**

*Instance*: $G = (V, E)$ là đồ thị vô hướng

*Question*: Tồn tại hay không tập con $S$ của $V$ mà $\omega(G - S) \geq |S|$?

Bài toán này đã được chứng minh trong [4] cũng như bài toán *HC* (chu trình Hamilton) dưới đây đã được chứng minh trong [5, 6] là các bài toán *NPC*.

**HC (HAMILTONIAN CYCLE)**

*Instance*: $G$ là đồ thị vô hướng

*Question*: Tồn tại chu trình Hamilton trong $G$?

Trong [7] độ phức tạp của bài toán *HC2* (bài toán *HC* trong lớp đồ thị thỏa mãn$\sigma_2 \geq n$) được đánh giá theo biến $t$.

**HC2**

*Instance*: Cho trước số thực $t$ và đồ thị $G$ thỏa mãn $\sigma_2 \geq tn$.

*Question*: $G$ có chu trình Hamilton hay không ?

Một số tác giả [8, 9]… khảo sát chu trình dài nhất (có thể không phải Hamilton) trong đồ thị. Gần đây, một số tác giả [10 - 12]… đã khảo sát bài toán chu trình Hamilton trong các lớp đồ thị đặc biệt. Trong [13] đã có nghiên cứu về cấu trúc của đồ thị và chu trình dài nhất của nó. Trong [1], các tác giả đã khảo sát đồ thị $n$ đỉnh thỏa mãn điều kiện $d(x) + d(y) = n - 1$ cho mọi cặp đỉnh không kề nhau $x$ và $y$ và chứng minh rằng đồ thị có chu trình Hamilton (chu trình đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị) khi và chỉ khi $n$ lẻ và $2 < \alpha < \frac{n+1}{2}$, ở đó $\alpha$ là chỉ số ổn định trong (số lớn nhất các đỉnh đôi một không kề nhau). Sau đây chúng ta khảo sát lớp đồ thị tổng quát hơn là các đồ thị $n$đỉnh thỏa mãn $\sigma_2 \geq n - 1$ và chứng minh bài toán *HC* trong lớp các đồ thị này thuộc lớp *P* cũng như xây dựng thuật toán xác định chu trình Hamilton trong chúng.

## 2. KẾT QUẢ

Trong [14], Ore đã chứng minh:

**Định lí 2.1.** *Nếu $\sigma_2 \geq n \geq 3$ thì G là đồ thị Hamilton.*

Từ định lí 2.1 ta hiển nhiên có:

**Định lí 2.2.** *HC2$(t \geq 1)$ là bài toán thuộc lớp P.*

Tuy nhiên, với *t*< 1 thì độ phức tạp của bài toán *HC2* lại khác hẳn [7] :

**Định lí 2.3.** *HC2 $(t < 1)$ là bài toán NPC.*

Trong lớp đồ thị tough, Jung [3] mở rộng kết quả của Ore như sau:

**Định lí 2.4.** *Cho $G$ là một đồ thị tough với $n \geq 11$ đỉnh. Nếu $\sigma_2 \geq n - 4$ thì $G$ là đồ thị Hamilton.*

Tuy vậy, bài toán kiểm tra một đồ thị cho trước có phải là đồ thị tough/not-tough là bài toán có độ phức tạp cao [4].

**Định lí 2.5.***NOT-1-TOUGH is NP-complete.*

Trên cơ sở các định lí 2.4, Định lí 2.5 và Định lí 2.3 thì nhiều khả năng bài toán *HC* thuộc *P* chỉ có thể trong các lớp đồ thị thỏa mãn $\sigma_2 \geq n - \epsilon$với $\epsilon = 1, 2, 3$mà thôi. Trong [1], Đỗ Như An và Bùi Đức Dương đã chỉ ra là:

**Định lí 2.6.** *Nếu $d(x) + d(y) = n - 1$ cho mọi cặp đỉnh không kề nhau $x$ và $y$, thì $G$ là đồ thị Hamilton khi và chỉ khi $n$ lẻ và $2 < \alpha < \frac{n+1}{2}$.*

Kết quả [1] chỉ có tính lí thuyết, vì bản thân bài toán xác định chỉ số ổn định trong$\alpha$ cũng được biết là bài toán *NPC* [5, 6]. Sau đây chúng ta khảo sát cấu trúc các đồ thị rộng hơn là lớp các đồ thị thỏa mãn $\sigma_2 \geq n - 1$ và xây dựng thuật toán thời gian đa thức xác định chu trình Hamilton trong lớp đồ thị này. Trước hết, ta mở rộng kết quả của Định lí 2.4. cho cả các trường hợp $n \leq 11$ như sau:

**Định lí 2.7.** *Cho $G$ là một đồ thị tough với $n \geq 3$ đỉnh. Nếu $\sigma_2 \geq n - 1$ thì $G$ là đồ thị Hamilton.*

Dựa trên định lí 2.7 ta sẽ có định lí sau về cấu trúc các đồ thị thỏa mãn $\sigma_2 \geq n - 1$.

**Định lí 2.8.** *Cho $G$ là một đồ thị với $n \geq 3$ đỉnh thỏa mãn $\sigma_2 \geq n - 1$. Khi đó xảy ra một trong các trường hợp sau:*

1. *$G$ là đồ thị 1-tough.*
2. *Tồn tại $n_1, n_2 \geq 1$ sao cho $n = n_1 + n_2 + 1$ và $G = K_1 * (K_{n_1} \cup K_{n_2})$.*
3. *$n$ là số lẻ và $\overline{K}_{\frac{n+1}{2}} * \overline{K}_{\frac{n-1}{2}} \subseteq G \subseteq \overline{K}_{\frac{n+1}{2}} * K_{\frac{n-1}{2}}$.*

## 3. CÁC BỔ ĐỀ VÀ CHỨNG MINH

Trong phần này, ta xét một đồ thị $G$ với *n* đỉnh và một chu trình $C$ trong $G$. Ta quy định một chiều đi trên $C$. Giả sử $H$là một thành phần liên thông trong $V(G)-V(C)$ và $N_C(H)$ là tập hợp các láng giềng trên $C$ của các đỉnh thuộc $H$ và được đánh số liên tiếp trên $C$ lần lượt kí hiệu là $v_1, v_2 \dots v_k$. Với mỗi đỉnh $v \in C$ ta kí hiệu $v^+$ là đỉnh trên $C$ tiếp theo $v$ với chiều đi cho trước. Ta kí hiệu đoạn đường trên $C$ bắt đầu từ một đỉnh $u \in C$ và kết thúc tại $v \in C$ $(u \neq v)$ theo chiều đã quy định bởi $C^+[u,v]$, đoạn đường theo chiều ngược lại cũng từ $u$ đến $v$ trên $C$ kí hiệu là $C^-[u,v]$. Một dãy cung nối hai đỉnh trên $C$là một đường đi nối 2 đỉnh đó và chỉ chứa các đỉnh trong là các đỉnh của $G-C-H$. Đặc biệt, một cạnh nối 2 đỉnh trên $C$ cũng là một dãy cung.

Các bổ đề sau được chứng minh và sử dụng trong [8, 9, 13]. Do chứng minh chúng khá đơn giản và đã trở thành chuẩn [2] (luôn bằng cách mở rộng $C$ thành chu trình dài hơn) nên chúng ta không chứng minh lại các bổ đề này ở đây.

**Bổ đề 3.1.** *Nếu $C$là chu trình dài nhất trong $G$ thì* $N_C(H) \cap N_C(H)^+ = N_C(H) \cap N_C(H)^- = \emptyset$.

**Bổ đề 3.2.** *Nếu $G$ là chu trình dài nhất trong $G$ thì không có dãy cung nối 2 đỉnh của $N_C(H)^+$. Tương tự, không có dãy cung nối 2 đỉnh của $N_C(H)^-$.*

**Bổ đề 3.3.** *Nếu $C$ là chu trình dài nhất trong $G$ và nếu $v_i, v_j \in N_C(H)$ với $i \neq j$ thì không có $z \in C^+[v_i, v_j]$ sao cho đồng thời có $v_i^+z^+, v_j^+z \in E(G)$.*

**Bổ đề 3.4.** *Nếu $C$ là chu trình dài nhất trong $G$ và đồ thị $G$ là 2-liên thông, $\sigma_2 \geq n-1$ thì $\forall v \in N_C(H)^+, V(C) - N_C(H)^+ \subseteq N(v)$.*

*Chứng minh.* Xét một đỉnh $h \in H$ và $v \in N_C(H)^+$ tùy ý. Theo Bổ đề 3.1 và Bổ đề 3.2 ta có:

$$d(v) \leq |V(G-C-H)| + (|V(C)| - |N_C(H)^+|) = |V(G)| - |V(H)| - |N_C(H)|,$$
$$d(h) \leq |V(H) - 1| + |N_C(h)| \leq |V(H) - 1| + |N_C(H)|. \quad (3.1)$$

và suy ra $d(v) + d(h) \leq |V(G)| - 1 = n-1$. Do $v \notin N_C(H)$ nên $vh \notin E(G)$, ta có:

$$n-1 \leq \sigma_2 \leq d(v) + d(h) \leq n-1,$$

nên xảy ra đẳng thức và các bất đẳng thức trong (3.1) cũng phải là đẳng thức. Từ đó suy ra $N(v) = V(G-C-H) \cup V(C - N_C(H)^+)$ và do đó $\forall v \in N_C(H)^+, V(C) - N_C(H)^+ \subseteq N(v)$.

Bây giờ ta chứng minh cho các định lí đã nêu trên.

*Chứng minh.* (Định lí 2.7.) Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử $G$ là một đồ thị với $n \geq 3$ đỉnh, tough, không có chu trình Hamilton và thỏa mãn $\sigma_2 \geq n-1$. Xét $C$là một chu trình dài nhất trong $G$(tồn tại do $G$là 2-liên thông) và $H$là một thành phần liên thông của $G-C$. Ta đánh số các đỉnh của $N_C(H)$ theo một chiều trên $C$là $v_1, v_2 \dots, v_k$. Áp dụng Bổ đề 3.4 cho đồ thị $G$2-liên thông với $\sigma_2 \geq n-1$ ta có $N_C(H)^+ = N_C(H)^-$. Thật vậy, giả sử ngược lại là $N_C(H)^+ \neq N_C(H)^-$ thì luôn tồn tại $v_i, v_{i+1} \in N_C(H)$ sao cho $v_i^+ \neq v_{i+1}^-$. Chọn $z = v_{i+1}^-$, theo Bổ đề 3.4, áp dụng cho $v = v_i^+$ ta có $v_i^+z^+ \in E(G)$ và áp dụng cho $v = v_{i+1}^+$ ta có $v_{i+1}^+z \in E(G)$, mâu thuẫn với Bổ đề 3.3. Mâu thuẫn đó chứng tỏ $N_C(H)^+ = N_C(H)^-$. Với $S = N_C(H)$ thì, theo Bổ đề 3.2, $G-S$ có ít nhất *k* + 1 thành phần liên thông là $H$và

$\{G_1\}, \{G_2\} \dots, \{G_k\}$, trong đó thành phần liên thông $G_i$ chứa đỉnh $v_i^+$ ($G_i \neq G_j$ với $i \neq j$ do Bổ đề 3.2). Số thành phần liên thông $G - S$ nhiều hơn $|S| = k$, mâu thuẫn với giả thiết $G$là tough. Vậy $G$là đồ thị Hamilton.

*Chứng minh.* (Định lí 2.8) Xét $G$là đồ thị có $n$đỉnh và thỏa mãn $\sigma_2 \geq n-1$. Nếu $G$là tough thì theo Định lí 2.7 $G$là đồ thị Hamilton. Giả sử ngược lại, $G$không tough, nghĩa là tồn tại một tập đỉnh S gồm $k \geq 1$ đỉnh sao cho đồ thị $G - S$ có ít nhất $t \geq k+1$ thành phần liên thông $G_1, G_2, \dots, G_t$. Chọn $i \neq j \leq t$ và hai đỉnh $x \in G_i$ và $y \in G_j$ tùy ý. Khi đó ta có:

$$N(x) \subseteq (V(G_i) - \{x\}) \cup S.$$
$$N(y) \subseteq (V(G_j) - \{y\}) \cup S. \tag{3.2}$$

Suy ra:

$d(x) + d(y) \leq |G_i| + |G_j| + 2k - 2 = (|G_i| + |G_j| + (k-1) + k) - 1 \leq |G_1| + |G_2| + \cdots + |G_t| + |S| - 1 = n - 1$

,

do $\forall s \leq t, G_s$ có ít nhất 1 đỉnh và $t \geq k+1$. Do $xy \notin E$ cho nên $n - 1 \leq d(x) + d(y)$ và các bất đẳng thức trên và của (3.2) phải trở thành đẳng thức. Suy ra:

1. $d(x) = |G_i| + k$, nghĩa là $G_i$ là đồ thị đầy đủ và $x$ kề với mọi đỉnh của $S$.
2. $t = k + 1$,
3. $\forall s \neq i, j$ Đồ thị $G_s$ có đúng 1 đỉnh.

Xảy ra 2 trường hợp

*Trường hợp* $k = 1$

Trong trường hợp này $G = S * (K_{n_1} \cup K_{n_2}) = K_1 * (K_{n_1} \cup K_{n_2})$ với $n_i$ là số đỉnh của $G_i$ $(i = 1, 2)$ thỏa mãn $n = n_1 + n_2 + 1$.

*Trường hợp* $k \geq 2$

Trong trường hợp này, với mỗi $s \leq k+1$ tùy ý, ta có thể chọn $i, j \neq s$ và suy ra $G_s$ có đúng 1 đỉnh. Thay đổi $i$ chạy từ 1 tới $k+1$ suy ra mỗi đỉnh của $G_i$ được nối với tất cả các đỉnh của $S$. Tóm lại, với $i \leq k+1$ tùy ý thì $G_i$ có đúng 1 đỉnh và đỉnh này kề với tất cả các đỉnh của $S$. Ta có $G = S * \overline{K}_{k+1}$, hay là: $\overline{K}_k * \overline{K}_{k+1} \subseteq G \subseteq \overline{K}_k * K_{k+1}$. Khi đó, $n$ lẻ và $k = \frac{n-1}{2}$, do đó:

$$\overline{K}_{\frac{n+1}{2}} * \overline{K}_{\frac{n-1}{2}} \subseteq G \subseteq \overline{K}_{\frac{n+1}{2}} * K_{\frac{n-1}{2}}.$$

## 4. THUẬT TOÁN ĐA THỨC XÁC ĐỊNH CHU TRÌNH HAMILTON CHO LỚP ĐỒ THỊ $\sigma_2 \geq n-1$

### 4.1. Mô tả ý tưởng thuật toán

Rõ ràng chỉ mất khoảng thời gian đa thức để xác định được $G$ thuộc trường hợp 2 hoặc trường hợp 3 trong Định lí 2.8 hay không. Kết hợp với kết quả của Định lí 2.7 ta cóbài toán xác định một đồ thị $G$ thỏa mãn $\sigma_2 \geq n-1$ là Hamilton hay không là bài toán thuộc lớp *P*. Để xây dựng thuật toán xác định một chu trình Hamilton trong $G$, ta phải khảo sát sâu hơn về cấu trúc của đồ thị trong mối tương quan với một chu trình $C$ của nó.

**Định lí 4.1.** *Cho $G$ là đồ thị 1-tough, n đỉnh và $\sigma_2 \geq n-1$. $C$ là một chu trình bất kỳ trong $G$, $H$ là một thành phần liên thông trong đồ thị $G-C$. Giả sử các đỉnh của $N_C(H)$ được đánh số theo một chiều quay trên $C$ thứ tự là $v_1, v_2 \dots, v_k$. Nếu $C$ có không quá $n-1$ đỉnh thì sẽ xảy ra một trong các trường hợp sau:*

*1. Tồn tại $i \leq k$ sao cho $v_i^+ = v_{i+1}$,*

*2. Tồn tại $v_i^+ v_j^+ \in E(G)$ cho $i \neq j$ nào đó,*

*3. Tồn tại $z \in V(G-C-H)$, khi đó $z$ kề với tất cả các đỉnh $v_i^+$,*

*4. Tồn tại $i \leq k$ sao cho $v_i^+ \neq v_{i+1}^-$.*

*Chứng minh*. Giả sử 1., 2. không xảy ra. Nếu tồn tại $z \in V(G-C-H)$, ta phải chứng minh $z$ kề với tất cả các đỉnh $v_i^+$, và nếu 1., 2. và 3. không xảy ra, ta chứng tỏ là 4. xảy ra. Thật vậy, xét một đỉnh $h \in H$ và $v \in N_C(H)^+$ tùy ý. Do 1., 2. không xảy ra, ta có:

$$d(v) \leq |V(G-C-H)| + (|V(C)| - |N_C(H)^+|) = |V(G)| - |V(H)| - |N_C(H)|,$$
$$d(h) \leq |V(H)| - 1 + |N_C(h)| \leq |V(H)| - 1 + |N_C(H)|. \tag{4.3}$$

và suy ra $d(v) + d(h) \leq |V(G)| - 1 = n - 1$. Do $v \notin N_C(H)$ nên $vh \notin E(G)$, ta có:

$$n - 1 \leq \sigma_2 \leq d(v) + d(y) \leq |V(H)| - 1 \leq n - 1,$$

nên xảy ra đẳng thức và các bất đẳng thức trong (4.3) cũng phải là đẳng thức. Từ đó suy ra là:

$$N(v) = V(G-C-H) \cup V(C - N_C(H)^+),$$
$$N(h) = N_C(H) \cup (V(H) - \{h\}). \tag{4.4}$$

Nếu tồn tại $z \in V(G-C-H)$, theo đẳng thức (4.4) thì $z$ kề với mọi đỉnh $v \in N_C(H)^+$, hay $z$ kề với mọi đỉnh $v_i^+$.

Nếu 1., 2., 3. không xảy ra,khi đó $G-C-H$ là đồ thị rỗng. Nếu không xảy ra 4. thì $N_C(H)^+ = N_C(H)^-$. Với $S = N_C(H)$, do 2. và 3., $G-S$ có ít nhất $k+1$ thành phần liên thông là $H$ và $\{v_1^+\}, \{v_2^+\}, \dots, \{v_k^+\}$. Số thành phần liên thông của $G-S$ nhiều hơn $|S| = k$, mâu thuẫn với giả thiết $G$ là tough. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Nhận thấy rằng khi 1. và 2. không xảy ra thì tập đỉnh $\{v_1^+, v_2^+, \dots v_k^+\}$ là tập đỉnh độc lập và theo đẳng thức (4.4) thì các đỉnh $v_i^+$ kề với mọi đỉnh của $C - N_C(H)^+$. Tương tự ta cũng có các đỉnh $v_i^-$ kề với mọi đỉnh của $C - N_C(H)^-$. Trong trường hợp 1., 2., 3. không xảy ra thì xảy ra 4., tức là tồn tại $i \leq k$ sao cho $v_i^+ \neq v_{i+1}^-$,khi đó $v_{i+1}^+$ kề $v_{i+1}^-$, và $v_{i+1}$ kề $v_i^+$.

## 4.2. Thuật toán

Xét một đồ thị $G$ với $n$ đỉnh thỏa mãn $\sigma_2 \geq n-1$. Thuật toán sau đây sẽ xác định một chu trình Hamilton $C$ của $G$ trong thời gian đa thức. Ý tưởng của thuật toán là ta xây dựng một chu trình $C$ tùy ý trong $G$ với thời gian đa thức, sau đó dựa trên Định lí 4.1 mở rộng $C$ đến khi thu được chu trình Hamilton:

**Bước 1**: Xác định $G$ không là 2-liên thông bằng cách kiểm tra mọi đỉnh $v$ của $G$ xem $G-\{v\}$ có liên thông hay không. Theo Định lí 2.8 thì đỉnh cắt phải là đỉnh có bậc $n-1$. Tiếp đó kiểm tra xem trong trường hợp $G$ là 2-liên thông, thì cũng theo Định lí 2.8, liệu $\overline{K}_{\frac{n+1}{2}} * \overline{K}_{\frac{n-1}{2}} \subseteq G \subseteq \overline{K}_{\frac{n+1}{2}} * K_{\frac{n-1}{2}}$ hay không bằng cách xem $G$ có đúng $\frac{n+1}{2}$ đỉnh bậc $\frac{n-1}{2}$ và tập đỉnh này có phải độc lập hay không. Nếu không thỏa mãn điều kiện này thì $G$ là đồ thị tough theo Định lí 2.7. Ta xây dựng một chu trình $C$ của $G$ bằng cách tìm kiếm theo chiều sâu.

**Bước 2**: Lặp

Nếu $|C| = n$ thì dừng.

Tìm $H$ là một thành phần liên thông của $G - C$.

Lập danh sách $N_C(H)$ tập hợp các láng giềng của $H$trên $C$và đánh số các đỉnh $N_C(H)$ dọc theo $C$lần lượt là $v_1, v_2 \dots, v_k$.

Xét các trường hợp tương ứng với các trường hợp của 1, 2, 3 và 4 của Định lí 4.1. Trong mỗi trường hợp này, ta chỉ ra rằng luôn mở rộng được $C$.

1. Nếu tồn tại $i$: $v_i^+ \in N_C(H)$.

   Tìm $x, y \in H$ tương ứng kề với $v_i$ và $v_i^+$ ($y$ có thể trùng $x$).

   Tìm một đường đi $W$trong $H$từ $x$ đến $y$.

   $C' := (v_i x W y C^+[v_i^+, v_i])$ là chu trình mở rộng của $C$.

2. Nếu $\forall i$: $v_i^+ \notin N_C(H)$ và $\exists i, j$: $v_i^+ v_j^+ \in E(G)$.

   Tìm $x, y \in H$ tương ứng kề với $v_i$ và $v_j$ ($y$ có thể trùng $x$).

   Tìm một đường đi $W$trong $H$từ $x$ đến $y$.

   $C' := (v_i x W y C^-[v_j, v_i^+] C^+[v_j^+, v_i])$ là chu trình mở rộng của $C$.

3. Nếu $\forall i, j$: $v_i^+ \notin N_C(H), v_i^+ v_j^+ \notin E(G)$ và $\exists z \in V(G - C - H)$.

   Chọn $i \neq j$ tùy ý và tìm $x, y \in H$ tương ứng kề với $v_i$ và $v_j$ ($y$ có thể trùng $x$).

   Tìm một đường đi $W$ trong $H$từ $x$ đến $y$.

   $C' := (v_i x W y C^-[v_j, v_i^+] z C^+[v_j^+, v_i])$ là chu trình mở rộng của $C$.

4. Nếu $\forall i, j$: $v_i^+ \notin N_C(H), v_i^+ v_j^+ \notin E(G)$ và $V(G - C - H) = \emptyset$.

   Chọn $i$ mà $v_i^+ \neq v_{i+1}^-$ và tìm $x, y \in H$ tương ứng kề với $v_i, v_{i+1}$ ($y$ có thể trùng $x$).

   Tìm một đường đi $W$ trong $H$từ $x$ đến $y$.

   $C' := (v_i x W y v_{i+1} C^+[v_i^+, v_{i+1}^-] C^+[v_{i+1}^+ v_i])$ là chu trình mở rộng của $C$.

Việc tìm $C$ở Bước 1 cần không quá $O(n^2)$ phép toán. Bước 2 sẽ dừng sau không quá $n - 3$ bước lặp, mỗi bước lặp của Bước 2 sẽ cần không quá $O(n^2)$ phép toán. Do đó, thuật toán trên sẽ kết thúc sau không quá $O(n^3)$ phép toán.

## 5. KẾT LUẬN

Trong bài báo này chúng tôi đã khảo sát bài toán chu trình Hamilton trong các lớp đồ thị thỏa mãn $\sigma_2 \geq n - 1$. Kết quả đạt được trong bài báo chỉ ra rằng bài toán này thuộc lớp *P* và chúng tôi đã xây dựng giải thuật thời gian đa thức cho phép xác định được chu trình Hamilton trong thời gian $O(n^3)$.

***Lời cảm ơn.*** Các tác giả xin chân thành cảm ơn quỹ NAFOSTED (Vietnam National Foundation for Science and Technology Development) đã tài trợ cho công trình này theo đề tài mã số 102.01-2012.29.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. An Do Nhu and Bui Duc Duong - Some problems about Hamilton cycle in special graphs, Journal of Science and Technology **46** (5A) (2008) 57-66.
2. Diestel R. - Graph Theory, Second Edition, Springer, 2000.
3. Jung H. A. - On maximal circuits in finite graphs, Ann. Discrete Math. **3** (1978) 129-144.
4. D. Bauer, E. Schmeichel and S. L. Hakimi - Recognizing tough is NP-hard, Discrete Applied Mathematics **28** (1990) 101-105.
5. Alan Gibbons - Algorithmic Graph Theory, Published June 27th 1985 by Cambridge University Press.
6. Garey M. R. and Johnson D. S. - Computers and Intractabiligy, Freeman, San Francisco, CA, 1979.
7. Vũ Đình Hòa và Nguyễn Hữu Xuân Trường - Chu trình Hamilton trong đồ thị $\sigma_2^* \geq n$, Tạp chí Tin học và Điều khiển học **28** (2) (2012) 153-160.
8. Bauer D., Morgana A., Schmeichel E. and Veldman H. J. - Long cycle in graphs with large degree sums, Discrete Mathematics **79** (1989/90) 59-70.
9. Hoa Vu Dinh - On the length of longest dominating cycles in graphs, Discrete Mathematics **121** (1993) 211-222.
10. Stefko Miklavic and Primoz Sparl - Hamilton cycle and Hamilton path extendability of Cayley graphs on abelian groups, Journal of Graph Theory, DOI: 10.1002/jgt.20621, 21 JUL 2011.
11. Rao Li - A new sufficient condition for Hamiltonicity of graphs, Information Processing Letters **98** (2006) 159-161.
12. Rahman M. S, Kaykobad M. - On Hamiltonian cycles and Hamiltonian paths, Inform. Process. Lett. **94** (2005) 37-41.
13. Vũ Đình Hòa - Ein Struktursatz fiir 2-fach zusammenhangende Graphen mit groBer Minimalvalenz, Math. Nachr. **128** (1986) 151-160.
14. Ore O. - Note on Hamilton circuits, Amer. Math. Monthly **67** (1960) 55.

## ABSTRACT

POLYNOMIAL ALGORITHM TO DETERMINE HAMILTON CYCLE IN THE CLASS OF GRAPHS SATISFYING $\sigma_2 \geq n-1$

Vu Dinh Hoa[1], Nguyen Huu Xuan Truong[2, *]

[1] *Faculty of Information Technology, Hanoi University of Education*

[2] *Academy of Finace*

[*] Email: Truongnhx82@gmail.com

Given a undirected and simple graph with $n$ vertices, we denote $\sigma_2$ the minimum of degree sum of the pair of nonadjacent vertices in $G$.

In [1] (Tóm tắt viết là [1]?), the authors considered graphs with $n$ vertices satisfying the conditon $d(x) + d(y) = n - 1$ for all nonadjacent vertices $x$ and $y$ and proved that the given graphs have Hamiltonian cycles (cycles containing all vertices of the graphs) iff $n$ is odd and $2 < \alpha < \frac{n+1}{2}$, where $\alpha$ is the independent number (the maximal number of the vertices pairwise non-adjacent). In this paper we consider a large class of graphs which satisfy the inecquality $\sigma_2 \geq n-1$. We prove that all graphs with $\sigma_2 \geq n-1$ have Hamilton cycles except some special graphs recognized by a polynomial algorithm.

*Keywords:* Hamilton cycle, NPC, tough, $\sigma_2(G)$.