

NGHIÊN CỨU CẤU HÌNH TỐI ƯU TRỰC CHỊU DAO ĐỘNG XOẮN CHO TRƯỜNG HỢP TẦN SỐ RIÊNG THỨ NHẤT VÀ THỨ HAI

Trần Đức Trung, Bùi Hải Lê*, Trần Minh Thúy

Viện Cơ khí, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội, số 1 Đại Cồ Việt, Hai Bà Trưng, Hà Nội

*Email: le.buihai@mail.hust.edu.vn

Đến Tòa soạn: 24/11/ 2013; Chấp nhận đăng: 14/3/2014

TÓM TẮT

Trong bài báo này, các tác giả sử dụng nguyên lý cực đại Pontryagin của lý thuyết điều khiển các quá trình tối ưu để giải quyết bài toán tối ưu hai tần số dao động tự do đầu tiên của trục chịu xoắn. Trong đó, biến điều khiển là đường kính của trục biến đổi dọc theo chiều dài trục, hàm mục tiêu là tần số riêng thứ nhất hoặc thứ hai. Thiết lập được điều kiện cần và đủ của hệ số tỉ lệ cho lời giải tối ưu trong trường hợp tần số riêng thứ i bất kì. Cho ví dụ số với trường hợp tần số thứ nhất và thứ hai. Nghiên cứu quan hệ tương đương giữa cấu hình cũng như tần số tối ưu của các trục có điều kiện biên khác nhau.

Từ khóa: tần số riêng, nguyên lý cực đại Pontryagin, trục chịu xoắn; tối ưu.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Tối ưu tần số dao động có ý nghĩa quan trọng trong kỹ thuật khử rung hoặc tránh cộng hưởng [1 - 5]. Với chiều dài L , khối lượng riêng ρ đã cho thì bài toán dao động xoắn, dao động dọc của thanh và bài toán dao động ngang của dây có chung một phương trình vi phân sóng một chiều, được giải tương tự.

Trong trường hợp dao động xoắn với góc xoay $\bar{\psi} = \bar{\psi}(x;t)$, G – mô đun đàn hồi trượt của vật liệu, J - mô men quán tính độc cực của mặt cắt ngang, phương trình dao động có dạng:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[GJ(x) \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \right] - J(x) \rho \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial t^2} = 0 \quad (1a)$$

và trong trường hợp dao động dọc của thanh hay dao động ngang của dây căng với $\bar{\psi}(x,t)$ là chuyển vị tương ứng và hằng số vật liệu là E – mô đun đàn hồi chịu kéo nén, đặc trưng hình học của mặt cắt ngang sẽ là F – diện tích, thì, phương trình dao động có dạng:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[EF(x) \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \right] - F(x) \rho \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial t^2} = 0 \quad (1b)$$

Sau khi loại bỏ yếu tố thời gian t nhờ thay $\bar{\psi} = \varphi(x) \sin \omega t$ vào (1a) ta có phương trình dạng dao động riêng cho bài toán xoắn (hai bài toán còn lại cũng tương tự):

$$\frac{d}{dx} \left[GJ(x) \frac{d\varphi}{dx} \right] + J(x) \rho \omega^2 \varphi = 0 \quad (2)$$

ở đây $J(x)$ thay đổi trong một miền hữu hạn. Sự thay đổi mặt cắt ngang này có thể vì hai lí do.

Thứ nhất có thể là theo ý muốn con người để nhận được giá trị max hay min của tần số riêng.

Thứ hai là do kích thước mặt cắt dùng trong tính toán là kích thước danh nghĩa do đó giá trị tần số riêng tính được cũng chỉ là danh nghĩa. Giá trị thực của tần số là bất định và thuộc miền $[\min, \max]$ phụ thuộc vào dung sai kích thước mặt cắt ngang.

Theo phương pháp hình thức hóa tần số như một biến trạng thái suy rộng được trình bày trong [1] ta có thể phát biểu bài toán điều khiển tối ưu sau:

Cho hệ phương trình động lực với các biến trạng thái φ, M, ω :

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M}{GJ(x)} \\ \frac{dM}{dx} = -J(x) \rho \omega^2 \varphi \\ \frac{d\omega}{dx} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Điều kiện điểm đầu cố định và điểm cuối là liên kết đàn hồi có độ cứng $\frac{1-\eta}{\eta} r$ có dạng

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0 \\ \eta M(L) + (\eta - 1)r\varphi(L) &= 0 \\ \eta &\in [0,1] \end{aligned} \quad (4)$$

$\eta = 0$ ứng với đầu phải cố định, $\eta = 1$ ứng với đầu phải tự do, r tham số độ cứng

Xác định luật điều khiển $J(x)$, $(0 \leq x) \leq L$ thỏa mãn điều kiện:

$$J_1(x) \leq J(x) \leq J_2(x) \quad (5)$$

Phiếm hàm Maier ở trạng thái cuối đạt:

$$c\omega(L) = \min (c = \pm 1) \quad (6)$$

ở đây $c = 1$ ứng với $\omega(L) = \min$, $c = -1$ ứng với $\omega(L) = \max$.

2. ỨNG DỤNG NGUYÊN LÝ CỰC ĐẠI PONTRYAGIN ĐỂ TÌM ĐIỀU KIỆN CẢN TỐI ƯU

Trong phần này chúng ta lần lượt thực hiện các bước:

- Xây dựng hàm Hamilton từ (3) với các biến trạng thái liên hợp bổ xung P_φ, P_M, P_ω :

$$H = P_\varphi \frac{M}{GJ(x)} - P_M J(x) \rho \omega^2 \varphi \quad (7)$$

- Viết hệ phương trình vi phân liên hợp:

$$\begin{cases} \frac{dP_\varphi}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = J(x) \rho \omega^2 P_M \\ \frac{dM}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial M} - \frac{M}{GJ(x)} P_\varphi \\ \frac{dP_\omega}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial \omega} = 2J(x) \rho \omega^2 \varphi P_M \end{cases} \quad (8)$$

Với điều kiện hoành ở hai điểm đầu, cuối của quá trình động lực thỏa mãn điều kiện:

$$P_\varphi(L) \delta\varphi(L) + P_M(L) \delta M(L) + P_\omega(L) \delta\omega(L) - P_\varphi(0) \delta\varphi(0) - P_M(0) \delta M(0) - P_\omega(0) \delta\omega(0) + c \delta\omega(L) = 0 \quad (9)$$

Xét tới (4) ta có:

$$P_\varphi(L) \delta\varphi(L) + P_M(L) \delta M(L) + P_\omega(L) \delta\omega(L) - P_M(0) \delta M(0) - P_\omega(0) \delta\omega(0) + c \delta\omega(L) = 0$$

$$\eta \delta M(L) + (\eta - 1)r \delta\varphi(L) = 0$$

Hay:

$$P_\varphi(L) \delta\varphi(L) - \frac{\eta - 1}{\eta} r P_M(L) \delta\varphi(L) - P_M(0) \delta M(0) - P_\omega(0) \delta\omega(0) + (P_\omega(L) + c) \delta\omega(L) = 0$$

Các biến phân $\delta M(0), \delta\omega(0), \delta\omega(L)$ là độc lập nên ta có:

$$P_M(0) = P_\omega(0) = P_\omega(L) + c = 0 \quad (10a)$$

Còn các biến phân $\delta M(L), \delta\varphi(L)$ phải thỏa mãn hệ phương trình thuần nhất

$$P_M(L) \delta M(L) + P_\varphi(L) \delta\varphi(L) = 0$$

$$\eta \delta M(L) + (\eta - 1)r \delta\varphi(L) = 0$$

Từ đó

$$\eta P_\varphi - (\eta - 1)r P_M = 0 \quad (10b)$$

Thay kí hiệu cho biến liên hợp:

$$\begin{cases} P_\varphi = -M_H \\ P_M = \varphi_H \end{cases} \quad (11)$$

Cho:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_H}{dx} = \frac{M_H}{GJ(x)} \\ \frac{dM_H}{dx} = -J(x)\rho\omega^2\varphi_H \\ \frac{dP_\omega}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial\omega} = 2J(x)\rho\omega^2\varphi_M \end{cases} \quad (12)$$

$$\eta M_H(L) + (\eta - 1)r\varphi_H(L) = 0 \quad (13)$$

So sánh hệ (3), (4) và (12), (13) có thể kết luận về quan hệ giữa các biến trạng thái và biến liên hợp thông qua một hệ số tỉ lệ k :

$$\begin{cases} kM_H = M \\ k\varphi_H = \varphi \end{cases} \quad (14)$$

Và dấu của k có thể xác định được bằng cách lấy tích phân phương trình cuối trong (12) có tính tới (13b)

$$\int_0^L P_\omega dx = P_\omega(L) - P_\omega(0) = -c = \frac{2\rho\omega^2}{k} \int_0^L J(x)\phi^2 dx \quad (15)$$

Với kết quả (14), (15) nhận được, bài toán điều khiển tối ưu xác định luật điều khiển $J(x)$, ($0 \leq x \leq L$) thỏa mãn điều kiện (5) cho hệ động lực có các biến trạng thái M, ϕ, ω với điều kiện ở điểm đầu, cuối (4) để cực tiểu (6) có điều kiện cần tối ưu:

$$H = -k\left(\frac{M^2}{GJ(x)} + J(x)\rho\omega^2\phi^2\right) = \max, \quad k = -\frac{2\rho\omega^2}{c} \int_0^L J(x)\phi^2 dx \quad (16)$$

Ta cũng lưu ý là trong các biểu thức chưa hề có nói đến đó là tần số riêng thứ mấy và tích phân hữu hạn trong (15) luôn dương. Điều đó có nghĩa là điều kiện cần tối ưu nhận được là cho tần số riêng bất kì. Mặt khác do dạng dao động riêng phụ thuộc vào một hằng số bất định ví dụ giá trị $M(0)$ hay $\varphi(L)$ nên điều kiện (15) có thể sử dụng dưới dạng:

$$H = \text{sign}(c)\left(\frac{M^2}{GJ(x)} + J(x)\rho\omega^2\phi^2\right) = \max, \quad M(0) = 1. \quad (17)$$

3. THUẬT TOÁN

$J_1(x) = J_1 = \text{const}, J_2(x) = J_2 = \text{const}, c = 1$ (hoặc -1), chia L thành 19 đoạn với các nút $0, \dots, 20$.

Bước 1: Chọn $J(x) = J_1$. Giải hệ phương trình vi phân bằng phương pháp số:

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dx} = \frac{M}{GJ(x)} \\ \frac{dM}{dx} = -J(x)\rho\omega^2\phi \end{cases} \quad (18)$$

Với các điều kiện:

$$\varphi(0) = 0, M(0) = 1, \eta M(L) + (\eta - 1)r\varphi(L) = 0 \quad (19)$$

Để có các giá trị tại các nút $\phi_i, M_i, (i = 0, \dots, n-1, n = 20)$ và ω :

Bước 2: Với các giá trị ϕ_i, M_i và ω thay vào: $H = \text{sign}(c) \left(\frac{M^2}{GJ(x)} + J(x)\rho\omega^2\phi^2 \right)$

Với các giá trị $J(x) = J_1 + j\Delta, (j = 0, \dots, 9)$ để xác định $J(x)$ ứng với $H = \max$.

Bước 3: Trở lại bước 1 với các giá trị $J(x)$ xác định được cho các nút. Điều kiện dừng chương trình khi ở hai bước lặp liên tục tần số thay đổi ít hơn độ chính xác chấp nhận $\Delta\omega \leq \varepsilon$.

4. VÍ DỤ SỐ

Xét trục chịu xoắn có đường kính $d_i \in [0,05 \div 0,1]$ m, tổng chiều dài trục L chia thành n đoạn bậc có chiều dài bằng nhau, $G = 0,769E11$ Pa, $\rho = 8000\text{kg/m}^3$. Các trường hợp được khảo sát bao gồm:

- Trường hợp 1 (TH1): $L = 2$ m, $n = 40$, $\eta = 0$ (đầu phải cố định), $c = -1$ (hàm mục tiêu $\omega_1 = \max$). Hàm mục tiêu (16) sẽ là:

$$H = -k \left(\frac{M^2}{GJ(x)} + J(x)\rho\omega_1^2\phi^2 \right) = \max, \quad k = 2\rho\omega_1^2 \int_0^L J(x)\phi^2 dx$$

- Trường hợp 2 (TH2): $L = 2$ m, $n = 40$, $\eta = 0$ (đầu phải cố định), $c = -1$ (hàm mục tiêu $\omega_2 = \max$). Hàm mục tiêu (16) sẽ là:

$$H = -k \left(\frac{M^2}{GJ(x)} + J(x)\rho\omega_2^2\phi^2 \right) = \max, \quad k = 2\rho\omega_2^2 \int_0^L J(x)\phi^2 dx$$

- Trường hợp 3 (TH3): $L = 1$ m, $n = 20$, $\eta = 1$ (đầu phải tự do), $c = -1$ (hàm mục tiêu $\omega_1 = \max$). Hàm mục tiêu (16) sẽ là:

$$H = -k \left(\frac{M^2}{GJ(x)} + J(x)\rho\omega_1^2\phi^2 \right) = \max, \quad k = -2\rho\omega_1^2 \int_0^L J(x)\phi^2 dx$$

- Trường hợp 4 (TH4): $L = 1$ m, $n = 20$, $\eta = 0$ (đầu phải cố định), $c = -1$ (hàm mục tiêu $\omega_1 = \max$). Hàm mục tiêu (16) sẽ là:

$$H = -k \left(\frac{M^2}{GJ(x)} + J(x)\rho\omega_1^2\phi^2 \right) = \max, \quad k = -2\rho\omega_1^2 \int_0^L J(x)\phi^2 dx$$

Các kết quả được đưa ra trong phần này bao gồm các giá trị tần số riêng thứ nhất ω_1 , tần số riêng thứ hai ω_2 , hiệu số giữa các tần số riêng $\omega_2 - \omega_1$ và tổng thể tích trục V của trục.

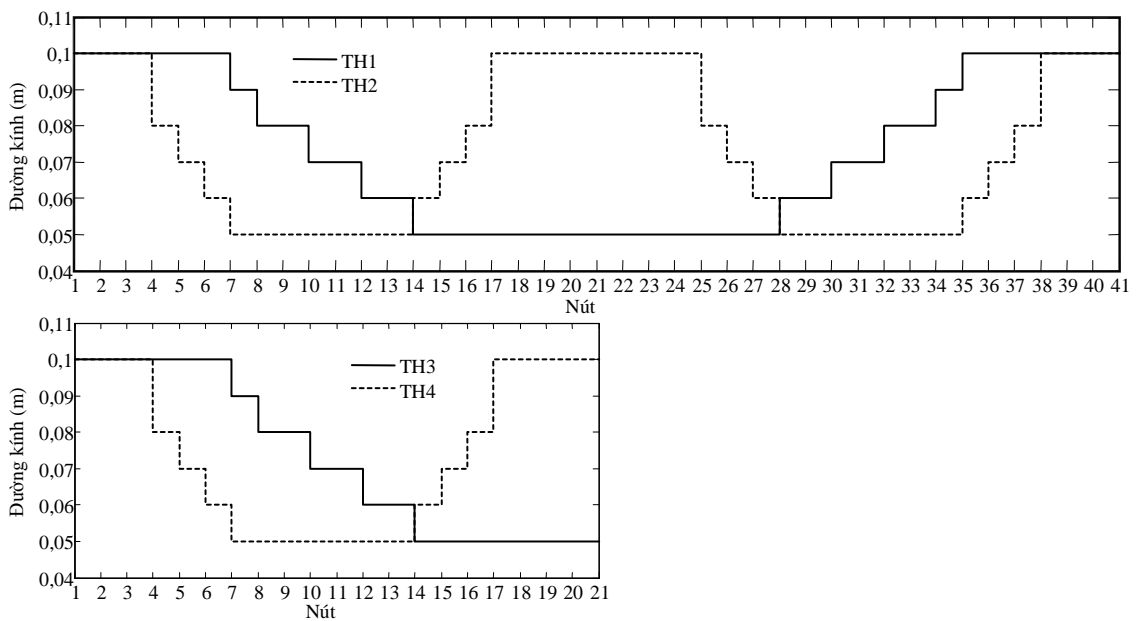
Từ bảng 1 và hình 1 có thể thấy:

- Với TH1 và TH3: Cấu hình tối ưu và thể tích của TH3 đúng bằng 50 % của TH1, giá trị tần số ω_1 của hai trường hợp này là bằng nhau. Nghĩa là, để giải bài toán cực đại tần số thứ nhất của trục chịu điều kiện biên ngàm - ngàm (TH1) chỉ cần giải bài toán cực đại tần số thứ nhất của trục chịu điều kiện biên ngàm - tự do và có chiều dài bằng 50 % của TH1. Từ cấu hình tối ưu

của TH3 có thể suy ra cấu hình tối ưu của TH1 có dạng đối xứng và chiều dài gấp đôi, suy ra cấu hình của các trục có điều kiện biên ngàm - ngàm hoặc ngàm - tự do với các trường hợp tối ưu tần số cao hơn và chiều dài gấp nhiều lần hơn so với TH3,...

Bảng 1. Kết quả tính toán tần số riêng và thể tích trục.

Trường hợp	ω_1 (rad/s)	ω_2 (rad/s)	$\omega_2 - \omega_1$ (rad/s)	V (m ³)
TH1	9093	11470	2377	0.00906
TH2	2334	17851	15517	0.00921
TH3	9093	13877	4784	0.00453
TH4	17851	22423	4572	0.00461

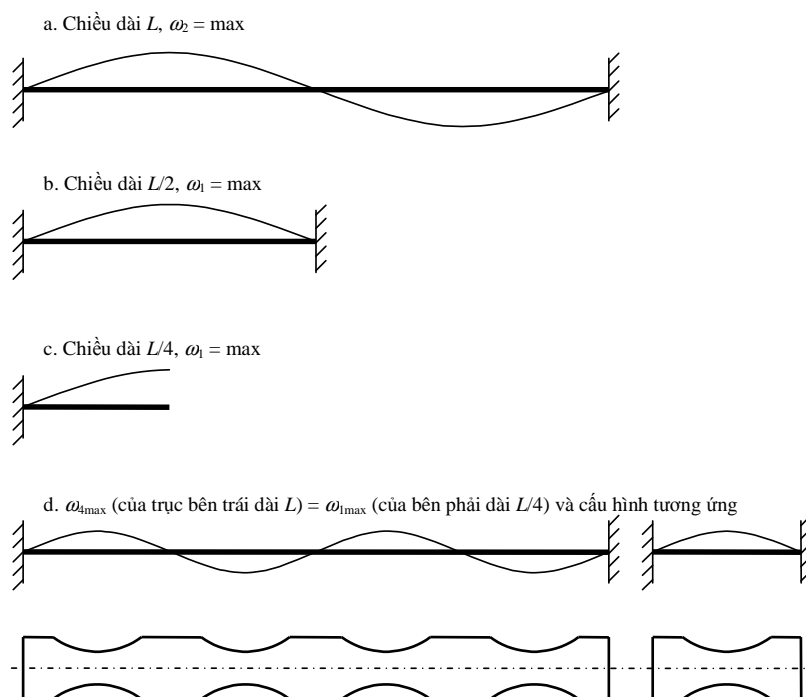


Hình 1. Cấu hình tối ưu của các trường hợp khảo sát.

- Với TH2 và TH4: Có thể nhận xét tương tự khi cấu hình tối ưu và thể tích của TH4 đúng bằng 50% của TH2, giá trị tần số ω_1 của TH4 bằng ω_2 của TH2.

- Sự tương đồng về cấu hình tối ưu và giá trị tần số tối ưu có thể được giải thích nhờ xét đến các dạng riêng tương đồng của các trường hợp khảo sát. Ví dụ như trên Hình 2:

+ Chúng ta có thể thấy những quan hệ các tần số và nhịp thanh cho những giải pháp tối ưu. Trường hợp (a) ứng với cực đại cho tần số thứ hai, dạng dao động là hai nửa bước sóng và nút sóng ở giữa nhịp thanh $U(L/2) = 0$. Coi nút sóng đó là điều kiện liên kết đầu phải của phần nửa thanh trái thì dạng dao động ở phần đó là nửa bước sóng (b) và giá trị tần số thứ nhất dao động của nửa thanh $L/2$ cố định hai đầu đó bằng giá trị tần số thứ hai cho thanh dài L cố định hai đầu ở trên. Đó cũng là tần số thứ nhất cho thanh dài $L/4$ với đầu phải tự do $M(L/4) = 0$ (c).



Hình 2. Ví dụ về cấu hình tối ưu và giá trị tần số tối ưu.

+ Như vậy bài toán tìm giải pháp tối ưu cho tần số thứ $2n$ cực đại của thanh dài L với hai đầu cố định cũng chính là giải pháp tối ưu cho tần số thứ nhất cực đại của thanh hai đầu cố định dài $L/(2n)$ như trên Hình 2.d.

- Các kết quả nghiên cứu trên cũng có thể mở rộng cho cho các trường hợp $c = 1$ (cực tiểu tần số) hay r cho trước với giá trị $\eta \in (0,1)$, nghĩa là đầu bên phải của trục chịu liên kết đàn hồi.

5. KẾT LUẬN

Trong bài báo, bài toán nghiên cứu cấu hình tối ưu trục chịu dao động xoắn cho tần số riêng thứ nhất và thứ hai được trình bày. Các kết quả của bài báo cho thấy có sự tương đồng về cấu hình tối ưu, tần số tối ưu giữa các trục có chiều dài, điều kiện biên và thứ bậc tần số khảo sát khác nhau. Các biến đổi sử dụng nguyên lý cực đại Pontryagin trong bài báo cho phép thiết lập điều kiện tối ưu tần số cho các trục có liên kết bên phải là đàn hồi và đây cũng chính là hướng phát triển tiếp theo của bài báo.

Lời cảm ơn. Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ phát triển khoa học và công nghệ Quốc gia (NAFOSTED) trong đề tài mã số 107.02-2014.02.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- 1 Minh-Quy Le, Duc-Trung Tran and Hai-Le Bui - Optimal Design of a Torsional Shaft System Using Pontryagin's Maximum Principle, *Meccanica* **47** (2012) 1197–1207.

- 2 Trần Đức Trung, Lê Minh Quý và Bùi Hải Lê - Điều kiện cần tối ưu trong bài toán tối ưu tốc độ tới hạn của trục quay, Tuyển tập Hội nghị khoa học toàn quốc Cơ học Vật rắn biến dạng lần thứ mười, Thái Nguyên 12-13/11/2010, 810-815.
- 3 Duc-Trung Tran and Hai-Le Bui - Optimal design of beams in free bending vibration, International Conference on Engineering Mechanics and Automation (ICEMA 2010) Hanoi, July 1-2, 2010, 260-267.
- 4 Tran Duc Trung and Bui Hai Le - Optimal control for eigenfrequencies of a torsional shaft system including TMD effect, Tạp chí Khoa học và Công nghệ **47**(4) (2009) 37-47.
- 5 Trần Đức Trung, Bùi Hải Lê - Thiết kế tối ưu trục chịu dao động xoắn, Tuyển tập công trình Hội nghị Cơ học toàn quốc Kỷ niệm 30 năm Viện Cơ học và 30 năm Tạp chí Cơ học, Hà Nội, ngày 8-9/4/2009, 396-404.

ABSTRACT

APPLICATION OF PONTRYAGIN'S MAXIMUM PRINCIPLE ON OPTIMIZING EIGEN FREQUENCIES OF A TORSIONAL SHAFT

Tran Duc Trung, Bui Hai Le*, Tran Minh Thuy

Hanoi University of Science and Technology, School of Mechanical Engineering

*Email: le.buihai@mail.hust.edu.vn

In this paper, problem of optimizing the two first eigen frequencies of a torsional shaft using Pontryagin's maximum principle, an optimal control one, is presented. Where, control variables are diameters of elements, objective function contains the first or second eigen frequencies of the shaft. Results of the paper allow determining sign of ratio coefficient of optimal condition, the equivalent optimal configurations and eigen frequencies of shafts subjected to different boundary conditions.

Keywords: eigen frequency, Pontryagin's maximum principle, torsional shaft, optimization.