Tạp chí Khoa học và Công nghệ ***49*** *(3) (2011) 121-132*

DAO ĐỘNG TỰ CHẤN CỦA BẢN MỎNG CHỮ NHẬT TRÊN NỀN ĐÀN HỒI HAI HỆ SỐ NỀN

Hoàng Văn Đa, Trần Đình Sơn

Trường Đại học Mỏ địa chất Hà Nội

Đến Toà soạn ngày: 25/10/2009

1. MỞ ĐẦU

Trong bài báo này các tác giả sẽ nghiên cứu dao động tự chấn của bản mỏng chữ nhật trên nền đàn hồi hai hệ số nền. Xây dựng thuật toán tìm nghiệm tiệm cận của bài toán trong xấp xỉ thứ nhất hoàn thiện. Xét sự ổn định của nghiệm dừng, của dao động tự chấn của bản mỏng chữ nhật. Mô hình tính toán này có thể dùng cho tất cả các hệ ôtônôm.

Kết quả cho thấy rằng tần số riêng của hệ đang xét tăng một lượng đáng kể so với mô hình nền đàn hồi một hệ số nền mà từ trước tới nay ta vẫn sử dụng. Bài toán đã thay đổi về mặt định tính, tất cả các điều kiện cộng hưởng, điều kiện ổn định của nghiệm dừng đều thay đổi và hệ số nền thứ hai đã làm giảm biên độ của dao động tự chấn. Đó là các kết quả mà chúng tôi đã thu nhận được.

2. ĐẶT BÀI TOÁN VÀ PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG

Xét bản mỏng chữ nhật chiều dài là *c*, chiều rộng là *b*, đặt trên nền đàn hồi hai hệ số nền theo mô hình của Pacternac [1]. Bản chụi liên kết tựa 4 cạnh. Hệ toạ độ được chọn như hình vẽ, hình 1. Khi đó chuyển động của bản theo phương thẳng đứng được mô tả bằng phương trình sau [1].

$$D\nabla^4 W - K_2\nabla^2 W + K_1 W + \rho\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \varepsilon F(\theta, W, \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, ...). \tag{2.1}$$

trong đó: ρ là mật độ khối lượng trên một đơn vị diện tích của bản, để đơn giản ta giả thiết $\rho = 1$. D là độ cứng chống uốn của bản.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \tag{2.2}$$

K_1, K_2 là hệ số nền thứ nhất, thứ hai, ε là tham số bé dương.

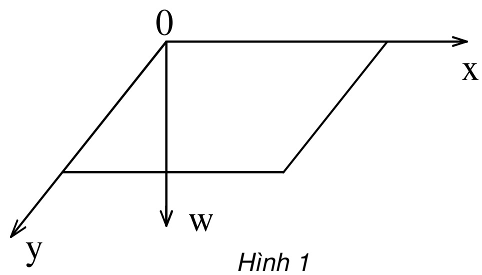
F là hàm giải tích đối với các biến $(W, \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, ...)$ và tuần hoàn với chu kỳ là 2π theo $\theta = \theta(t)$. ∇ là toán tử tuyến tính Laplace với hệ số hằng, $W = W(x, y, t)$ cần xác định.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \nabla^4 = (\nabla^2)^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}. \tag{2.3}$$

Điều kiện biên của bản tựa tuyến tính 4 cạnh được biểu diễn bằng các biểu thức sau.

$$W\Big|_{x=0,b} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\Big|_{x=0,b} = 0, \tag{2.4}$$

$$W\Big|_{y=0,c} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\Big|_{y=0,c} = 0.$$



Hình 1

3. DAO ĐỘNG TỰ DO CỦA BẢN

Từ phương trình (2.1), trong trường hợp dao động tự do của bản ta có thể viết được phương trình dưới dạng mà hàm F vế phải không chứa tường minh yếu tố thời gian t.

$$D\nabla^4 W - K_2 \nabla^2 W + K_1 W + \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \varepsilon F(W, \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, ...). \tag{3.1}$$

Khi $\varepsilon = 0$, ta có phương trình suy biến sau

$$D\nabla^4 W - K_2 \nabla^2 W + K_1 W + \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \tag{3.2}$$

với các điều kiện biên (2.4), phương trình (3.2), nghiệm có dạng

$$W_0(x, y, t) = \sum_{r,s=1}^{\infty} A_{rs} Z_{rs}(x, y) \cos(\omega_{rst} + \psi_{rs}), \tag{3.3}$$

$$Z_{rs} = \sin\frac{r\pi x}{b} \sin\frac{s\pi y}{c}. \tag{3.4}$$

trong đó: A_{rs}, ψ_{rs} là các hằng số được xác định từ những điều kiện đầu; ω_{rs} là tần số riêng, xác định bằng cách thay (3.3) vào phương trình (3.2), sau khi tính toán đơn giản ta có được.

$$\omega_{rs}^2 = \{ D[(\frac{r\pi}{b})^2 + (\frac{s\pi}{c})^2]^2 + K_2[(\frac{r\pi}{b})^2 + (\frac{s\pi}{c})^2] + K_1 \}. \tag{3.5}$$

Từ (3.5) dễ dàng nhận thấy rằng tần số riêng của hệ đang xét đã tăng một lượng đáng kể do tính đến hệ số nền thứ hai K_2 mà từ trước tới nay ta thường bỏ qua khi xét cơ hệ theo mô hình thông thường của nền đàn hồi. Bài toán đã thay đổi về mặt định tính, nghiệm dừng, điều kiện ổn định của nghiệm và đường cong cộng hưởng cũng thay đổi tất cả. Đó là kết quả mới cần lưu tâm quan sát.

Giả sử hệ không kích động, trong trường hợp đơn tần tồn tại dao động không tắt dần với tần số dao động $\omega_{11}(r=s=1)$ và không có nội cộng hưởng với tần số đó, tức là

$$(\omega_{rs} - n\omega_{11}) \neq 0 \qquad (n = 1,2,...; r,s = 1,2,...). \tag{3.6}$$

$$\omega_{11}^2 = \{ D[(\frac{\pi}{b})^2 + (\frac{\pi}{c})^2]^2 + K_2[(\frac{\pi}{b})^2 + (\frac{\pi}{c})^2] + K_1 \}. \tag{3.7}$$

Khi đó nghiệm riêng của phương trình (3.1) tìm dưới dạng sau

$$W(x,y,t) = aZ_{11}(x,y)\cos\varphi + \varepsilon U_1(x,y,a,\varphi) + \varepsilon^2 U_2(x,y,a,\varphi) + \varepsilon^3 ..., \tag{3.8}$$

U_1, U_2 là các hàm tuần hoàn chu kỳ 2π còn a, ψ được xác định từ hệ phương trình vi phân.

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \varepsilon^3 ... \quad , \\ \frac{d\psi}{dt} &= \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \varepsilon^3 ... \quad . \end{aligned} \tag{3.9}$$

Ở đây:

$$\varphi = (\omega_{11}t + \psi), \quad Z_{11}(x,y) = \sin\frac{\pi x}{b}\sin\frac{\pi y}{c}, \quad Z_{rs}(x,y) = \sin\frac{r\pi x}{b}\sin\frac{s\pi y}{c}. \tag{3.10}$$

Bây giờ chúng ta phải tính một số đại lượng trong phương trình (3.1), chú ý đến (3.9), trong xấp xỉ thứ nhất ta có được.

$$* \ \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{da}{dt} Z_{11}\cos\varphi - aZ_{11}\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon\frac{\partial U_1}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dt} + ... \quad ,$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \varepsilon A_1 Z_{11}\cos\varphi - a\omega_{11}Z_{11}\sin\varphi - a\varepsilon B_1 Z_{11}\sin\varphi + \varepsilon\frac{\partial U_1}{\partial\varphi}\omega_{11} + ... \quad . \tag{3.11}$$

$$* \ \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = -\varepsilon A_1 Z_{11}\sin\varphi\omega_{11} - \frac{da}{dt}\omega_{11}Z_{11}\sin\varphi - a\omega_{11}Z_{11}\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} - \frac{da}{dt}\varepsilon B_1 Z_{11}\sin\varphi -$$

$$-\varepsilon a B_1 Z_{11}\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon\frac{\partial^2 U_1}{\partial\varphi^2}\omega_{11}^2 + ... \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = -2\varepsilon A_1 Z_{11}\omega_{11}\sin\varphi - 2\varepsilon a B_1 Z_{11}\omega_{11}\cos\varphi - a\omega_{11}^2 Z_{11}\cos\varphi + \varepsilon\omega_{11}^2\frac{\partial^2 U_1}{\partial\varphi^2} + ..., \tag{3.12}$$

$$* \ \nabla^2 W = a\cos\varphi\frac{\partial^2 Z_{11}}{\partial x^2} + a\cos\varphi\frac{\partial^2 Z_{11}}{\partial y^2} + \varepsilon\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \varepsilon\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + \varepsilon^2 ... \quad ,$$

$$\nabla^2 W = -a\cos\varphi(\frac{\pi^2}{b} + \frac{\pi^2}{c})Z_{11} + \varepsilon\nabla^2 U_1 + \varepsilon^2 \dots \,. \quad (3.13)$$

$$* \ \nabla^4 W = a\cos\varphi\nabla^4 Z_{11} + \varepsilon\nabla^2 U_1 + \varepsilon\nabla^4 U_1 + \varepsilon^2 \dots \quad ,$$

$$\nabla^4 W = a\cos\varphi[(\frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{c^2})]Z_{11} + \varepsilon\nabla^4 U_1 + \varepsilon^2 \dots \,. \quad (3.14)$$

Thay các đại lượng (3.12), (3.13), (3.14) vào phương trình (3.1) ta có

$$Da\cos\varphi[(\frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{c^2})]^2 Z_{11} + D\varepsilon\nabla^4 U_1 + K_2 a\cos\varphi(\frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{c^2})Z_{11} - K_2\varepsilon\nabla^2 U_1 + K_1 a\cos\varphi Z_{11} +$$

$$+ k_1\varepsilon U_1 - 2\varepsilon A_1\omega_{11} Z_{11}\sin\varphi - 2\varepsilon B_1 a\omega_{11}\cos\varphi Z_{11} - a\omega_{11}^2 Z_{11}\cos\varphi + \varepsilon\omega_{11}^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial\varphi^2} =$$

$$= \varepsilon F(a\cos\varphi Z_{11}, a\cos\varphi\frac{\partial Z_{11}}{\partial x}, a\cos\varphi\frac{\partial Z_{11}}{\partial y} \dots)\,. \quad (3.15)$$

$$\{\, D[(\frac{\pi}{b})^2 + (\frac{\pi}{c})^2]^2 + K_2[(\frac{\pi}{b})^2 + (\frac{\pi}{c})^2] + K_1 \,\}\, a\cos\phi Z_{11} - a\omega_{11}^2 Z_{11}\cos\phi + \varepsilon D\nabla^4 U_1$$

$$+\varepsilon\omega_{11}^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial\phi^2} - K_2\varepsilon\nabla^2 U_1 + \varepsilon K_1 U_1 = \varepsilon(2A_1\omega_{11}\sin\phi + 2aB_1\omega_{11}\cos\phi)Z_{11}$$

$$+\varepsilon F(a\cos\phi Z_{11}, a\cos\phi\frac{\partial Z_{11}}{\partial x}, a\cos\phi\frac{\partial Z_{11}}{\partial y} \dots).$$

Dễ dàng nhận thấy rằng sau khi đơn giản phương trình trên còn lại như sau.

$$D\nabla^4 U_1 - K_2\nabla^2 U_1 + K_1 U + \omega_{11}^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial\phi^2} = (2A_1\omega_{11}\sin\phi + 2aB_1\omega_{11}\cos\phi)Z_{11}$$

$$+ F(a\cos\varphi Z_{11}, a\cos\varphi\frac{\partial Z_{11}}{\partial x}, a\cos\varphi\frac{\partial Z_{11}}{\partial y} \dots)\,, \quad (3.16)$$

Hàm $U_1 = U_1(x, y, a, \varphi)$ cần thoả mãn các điều kiện biên

$$U_1\Big|_{x=0,b} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}\Big|_{x=0,b} = 0 \quad , \quad U_1\Big|_{y=0,c} = 0 \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\Big|_{y=0,c} = 0 \quad . \quad (3.17)$$

Đặt

$$F_1 = F(a\cos\varphi Z_{11}, a\cos\varphi\frac{\partial Z_{11}}{\partial x}, a\cos\varphi\frac{\partial Z_{11}}{\partial y} \dots)\,. \quad (3.18)$$

Cần xác định hàm $U_1 = U_1(x, y, a, \varphi)$.

Bây giời khai triển hàm $U_1(x, y, a, \varphi)$ và hàm $F_1(x, y, a, \varphi)$ theo các hàm riêng $\{Z_{rs}(x,y)\}$.

$$U_1(x, y, a, \varphi) = \sum_{r,s=1}^{\infty} U_{1rs}(a, \varphi) Z_{rs})x, y), \tag{3.19}$$

Với cách khai triển này hàm U_1 thoả mãn điều kiện biên (3.17), $U_{1rs}(a, \varphi)$ cần được xác định.

$$F_1 = \sum_{r,s=1}^{\infty} F_{1rs}(a, \varphi) Z_{rs}(x, y), \tag{3.20}$$

$$F_{1rs}(a, \varphi) = \frac{\int_0^b \int_0^c F_{11} Z_{rs} dxdy}{\int_0^b \int_0^c Z_{rs}^2 dxdy}, \tag{3.21}$$

đã được xác định vì hàm F_1 đã biết.

Thế các đại lượng (3.19), (3.20) vào phương trình (3.16) ta được

$$D\nabla^4 \sum_{r,s=1}^{\infty} U_{1rs}(a, \phi) Z_{rs} - K_2 \nabla^2 \sum_{r,s=1}^{\infty} U_{1rs}(a, \phi) Z_{rs} + K_1 \sum_{r,s=1}^{\infty} U_{1rs}(a, \phi) Z_{rs} + \omega_{11}^2 \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \sum_{r,s=1}^{\infty} U_{1rs}(a, \phi) Z_{rs}$$
$$= (2A_1 \omega_{11} \sin \varphi + 2aB_1 \omega_{11} \cos \varphi) Z_{11} + \sum_{r,s=1}^{\infty} F_{1rs}(a, \varphi) Z_{rs}. \tag{3.22}$$

$$D \sum_{r,s=1}^{\infty} U_{1rs}(a, \phi) [(\frac{r\pi^2}{b^2} + \frac{s\pi^2}{c^2})]^2 Z_{rs} + K_2 \sum_{r,s=1}^{\infty} U_{1rs}(a, \phi) [(\frac{r\pi^2}{b^2} + \frac{s\pi^2}{c^2})] Z_{rs} + K_1 \sum_{r,s=1}^{\infty} U_{1rs}(a, \phi) Z_{rs}$$
$$+ \omega_{11}^2 \sum_{r,s=1}^{\infty} \frac{\partial^2 U_{1rs}}{\partial \varphi^2} Z_{rs} = (2A_1 \omega_{11} \sin \varphi + 2aB_1 \omega_{11} \cos \varphi) Z_{11} + \sum_{r,s=1}^{\infty} F_{1rs}(a, \varphi) Z_{rs}. \tag{3.23}$$

Khi *r = s = 1*, $Z_{rs}(x,y) = Z_{11}(x,y)$. Cân bằng hệ số các hàm riêng $\{Z_{rs}(x,y)\}$ dễ dàng có kết quả sau

$$DU_{111}(a, \phi) [(\frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{c^2})]^2 Z_{rs} + K_2 U_{111}(a, \phi) [(\frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{c^2})] Z_{rs} + K_1 U_{111}(a, \phi) Z_{rs}$$
$$+ \omega_{11}^2 \frac{\partial U_{111}(a, \varphi)}{\partial \varphi^2} Z_{11} = (2A_1 \omega_{11} \sin \varphi + 2aB_1 \omega_{11} \cos \varphi) Z_{11} + F_{111}(a, \varphi) Z_{11}$$

$$\{ D[(\frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{c^2})]^2 + K_2 [(\frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{c^2})]^2 + K_1 \} U_{111} + \omega_{11}^2 \frac{\partial^2 U_{111}}{\partial \phi^2}$$
$$= (2A_1 \omega_{11} \sin \varphi + 2aB_1 \omega_{11} \cos \varphi) + F_{111}(a, \varphi),$$

$$\omega_{11}^2 (\frac{\partial^2 U_{111}}{\partial \varphi^2} + U_{111}) = (2A_1 \omega_{11} \sin \varphi + 2aB_1 \omega_{11} \cos \varphi) + F_{111}(a, \varphi). \tag{3.24}$$

$$(\omega_{11}^2 \frac{\partial^2 U_{1rs}}{\partial \varphi^2} + \omega_{rs}^2 U_{1rs}) = F_{1rs}(a,\varphi), \ (r,s = 1,2\ldots \ \ s = r \neq 1)\,. \tag{3.25}$$

Chúng ta lại khai triển hàm $F_{1rs}(a,\varphi)$ và hàm $U_{1rs}(a,\varphi)$ theo φ, ta có

$$F_{1rs}(a,\varphi) = [\sum_{n=0}^{\infty} g_{1n}^{(r,s)}(a)\cos n\varphi + \sum_{n=0}^{\infty} h_{1n}^{(r,s)}(a)\sin n\varphi]\,, \tag{3.26}$$

$$g_{10}^{(r,s)}(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_{1rs}(a,\varphi)d\varphi, \qquad g_{1n}^{(r,s)}(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F_{1rs}(a,\varphi)\cos n\varphi d\varphi,$$

$$h_{1n}^{(r,s)}(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F_{1rs}(a,\varphi)\sin n\varphi d\varphi. \tag{3.27}$$

$g_{1n}^{(r,s)}(a)$, $h_{1n}^{(r,s)}(a)$ đã được xác định. Bây giờ ta lại khai triển $U_{1rs}(a,\varphi)$ theo φ ta có

$$U_{1rs}(a,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} [V_{1n}^{(r,s)}(a)\cos n\varphi + W_{1n}^{(r,s)}(a)\sin n\varphi], \tag{3.28}$$

$V_{1n}^{(r,s}(a)$, $W_{1n}^{(r,s}(a)$ cần xác định.

Từ (3.28) khi $r = s = 1$, ta có

$$U_{111}(a,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} [V_{1n}^{(1,1)}(a)\cos n\varphi + W_{1n}^{(1,1)}(a)\sin n\varphi]\,,$$

$$\frac{\partial U_{111}(a,\varphi)}{\partial \varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} [-V_{1n}^{(1,1)}(a) n \sin n\varphi + W_{1n}^{(1,1)}(a) n \cos n\varphi]\,,$$

$$\frac{\partial^2 U_{111}(a,\varphi)}{\partial \varphi^2} = \sum_{n=0}^{\infty} [-n^2 V_{1n}^{(1,1)}(a)\cos n\varphi - n^2 W_{1n}^{(1,1)}(a)\sin n\varphi]. \tag{3.29}$$

Thay (3.29) vào (3.24) dễ dàng có được

$$\omega_{11}^2 \{ \sum_{n=0}^{\infty} [-n^2 V_{1n}^{(1,1)}(a)\cos n\varphi - n^2 W_{1n}^{(1,1)}(a)\sin n\varphi] +$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [V_{1n}^{(1,1)}(a)\cos n\varphi + W_{1n}^{(1,1)}(a)\sin n\varphi]\}$$

$$= 2A_1\omega_{11}\sin\varphi + 2aB_1\omega_{11}\cos\varphi + \sum_{n=0}^{\infty} [\, g_{1n}^{(1,1,)}(a)\cos n\varphi + h_{1n}^{(1,1)}(a)\sin n\varphi]. \tag{3.30}$$

$$\omega_{11}^2 \{ \sum_{n=0}^{\infty} [(1-n^2) V_{1n}^{(1,1)}(a)\cos n\varphi + (1-n^2) W_{1n}^{(1,1)}(a)\sin n\varphi]\} =$$

$$= 2A_1\omega_{11}\sin\varphi + 2aB_1\omega_{11}\cos\varphi \ + \sum_{n=0}^{\infty}[\, g_{1n}^{(1,1,)}(a)\cos n\varphi + h_{1n}^{(1,1)}(a)\sin n\varphi\,]. \qquad (3.31)$$

Khi n = 1, thì dễ dàng thấy rằng vế trái của phương trình (3.31) bằng không với mọi giá trị bất kỳ của $V_{1n}^{(1,1)}(a)$, $W_{1n}^{(1,1)}(a)$, để cho duy nhất ta giả sử $V_{1n}^{(1,1)}(a) = 0$, $W_{1n}^{(1,1)}(a) = 0$, điều đó cũng có nghĩa là hàm $U_{111}(a,\varphi)$ không chứa các điều hoà $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ ta suy ra.

$$< U_{111}(a,\varphi)\cos\varphi >= 0, \quad < U_{111}(a,\varphi)\sin\varphi >= 0\,.$$

Khi đó ta có

$$2A_1\omega_{11}\sin\varphi + 2aB_1\omega_{11}\cos\varphi + g_{11}^{(1,1,)}(a)\cos\varphi + h_{11}^{(1,1)}(a)\sin\varphi = 0\,,$$

$$A_1 = -\frac{h_{11}^{(1,1)}(a)}{2\omega_{11}}, \quad B_1 = -\frac{g_{11}^{(1,1)}(a)}{2a\omega_{11}}\,,$$

thế $g_{11}^{(1,1,)}(a)$, $h_{11}^{(1,1,)}(a)$ từ (3.27) vào các biểu thức trên ta có các công thức xác đinh A_1, B_1

$$A_1 = -\frac{1}{2\pi\omega_{11}}\int_0^{2\pi} F_{111}(a,\varphi)\sin\varphi d\varphi, \quad B_1 = -\frac{1}{2a\pi\omega_{11}}\int_0^{2\pi} F_{111}(a,\varphi)\cos\varphi d\varphi\,. \qquad (3.32)$$

Từ (3.28) ta tính được $\dfrac{\partial^2 U_{1rs}(a)}{\partial\varphi^2}$

$$\frac{\partial^2 U_{1rs}(a)}{\partial\varphi^2} = \sum_{n=0}^{\infty} -[\, n^2 V_{1n}^{(r,s)}(a)\cos n\varphi + n^2 W_{1n}^{(r,s)}(a)\sin n\varphi\,].$$

Thay biểu thức trên vào (3.25) ta có

$$\omega_{11}^2 \sum_{n=0}^{\infty}[-n^2 V_{1n}^{(r,s)}(a)\cos n\varphi - n^2 W_{1n}^{(r,s)}(a)\sin n\varphi]$$

$$+\omega_{rs}^2 \sum_{n=0}^{\infty}[V_{1n}^{(r,s)}(a)\cos n\varphi + W_{1n}^{(r,s)}(a)\sin n\varphi]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}[\, g_{1n}^{(r,s)}(a)\cos n\varphi + h_{1n}^{(r,s)}(a)\sin n\varphi\,]\,,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(\omega_{rs}^2 - n^2\omega_{11}^2)V_{1n}^{(r,s)}(a)\cos n\varphi + (\omega_{rs}^2 - n^2\omega_{11}^2)W_{1n}^{(r,s)}(a)\sin n\varphi]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}[\, g_{1n}^{(r,s)}(a)\cos n\varphi + h_{1n}^{(r,s)}(a)\sin n\varphi\,]\,,$$

$$V_{1n}^{(r,s)}(a) = \frac{g_{1n}^{(r,s)}(a)}{(\omega_{rs}^2 - n^2\omega_{11}^2)} \quad , \quad W_{1n}^{(r,s)}(a) = \frac{h_{1n}^{(r,s)}(a)}{(\omega_{rs}^2 - n^2\omega_{11}^2)}\;. \qquad (3.33)$$

$$U_{1rs}(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_{1n}^{(r,s)}(a)\cos n\varphi + h_{1n}^{(r,s)}(a)\sin n\varphi}{(\omega_{rs}^2 - n^2\omega_{11}^2)} , \tag{3.34}$$

$$U_1(x, y, a, \varphi) = \sum_{r,s=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [\frac{g_{1n}^{(r,s)}(a)\cos n\varphi + h_{1n}^{(r,s)}(a)\sin n\varphi}{(\omega_{rs}^2 - n^2\omega_{11}^2)}]Z_{rs}(x,y) , \tag{3.35}$$

$$W(x, y, z) = aZ_{11}(x, y)\cos\varphi + \varepsilon \sum_{r,s=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [\frac{g_{1n}^{(r,s)}(a)\cos n\varphi + h_{1n}^{(r,s)}(a)\sin n\varphi}{(\omega_{rs}^2 - n^2\omega_{11}^2)}]Z_{rs}, \tag{3.36}$$

khi $r = s = 1$ thì $n \neq 1$.

Như vậy trong xấp xỉ thứ nhất hoàn thiện nghiệm của phương trình (3.1) $W(x, y, z)$ đã được xác định.

Bây giờ xét một ví dụ đơn giản, giả sử hàm F vế phải của (3.1) có dạng

$$F = -2h\frac{\partial W}{\partial t} - K_1W^3 - \frac{K_2}{2}[(\frac{\partial W}{\partial x})^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (\frac{\partial W}{\partial y})^2\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}] , h > 0. \tag{3.37}$$

Áp dụng các công thức (2.32), sau khi tính toán đơn giản ta nhận được

$$\frac{da}{dt} = -\varepsilon ah ,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -\varepsilon\frac{9}{128\omega_{11}}[-\frac{1}{2}K_2\pi^4(\frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4}) + 3K_1]a^2 .$$

$$a = a_0e^{-\varepsilon ht},$$

$$\psi = \frac{9}{256h\omega_{11}}[\frac{1}{2}K_2\pi^4(\frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4}) - 3K_1]e^{-2\varepsilon ht} + \psi_0 . \tag{3.38}$$

Có nhận xét rằng:

- Nếu $h = 0$, có nghĩa là không có lực cản (cản nhớt) thì biên độ $a = a_0 = const$, dao động tự do không tắt dần, $h \neq 0$ có lực cản thì biên độ $a \to 0$ khi $t \to \infty$, dao động tắt dần. Các tính chất này không phụ thuộc vào hệ số nền thứ nhất K_1 và thứ hai K_2.

- Có thể chọn mối quan hệ $K_1 = \frac{K_2}{6}(\frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4})\pi^4$ để cho pha dao động $\psi = \psi_0 = const$. Tính chất này cũng không phụ thuộc vào hệ số cản h

4. DAO ĐỘNG TỰ CHẤN CỦA BẢN

Trong trường hợp này bản chịu tác dụng lực thuỷ khí động lực theo phương thẳng đứng với mật độ trên một đơn vị diện tích của bản có dạng [6]

$$f(\dot{W}) = \varepsilon(h_1\dot{W} - h_2\dot{W}^3), \quad h_1 > 0,\ h_2 > 0 \tag{4.1}$$

Phương trình dao động tự chấn có dạng.

$$D\nabla^4 W - K_2\nabla^2 W + K_1 W + \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \varepsilon\{-K_1 W^3 - \frac{K_2}{2}[(\frac{\partial W}{\partial x})^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (\frac{\partial W}{\partial y})^2\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}]$$

$$+ [h_1\dot{W} - h_2\dot{W}^3]\} \tag{4.2}$$

Trong xấp xỉ thứ nhất, nghiệm của phương trình (4.2) là

$$W = a\cos\varphi Z_{11}(x, y)\ , \tag{4.3}$$

$$\varphi = (\omega_{11}t + \psi)\ ,\ \ Z_{11}(x, y) = \sin\frac{\pi x}{b}\sin\frac{\pi y}{b}\ . \tag{4.4}$$

a và ψ được xác định từ phương trình vi phân (3.8). Áp dụng các công thức đã biết, ta có.

$$F_1 = \{-K_1 a^3\cos^3\varphi Z_{11}^3 + \frac{K_2}{2}a^3\cos^3\varphi\pi^4[\frac{1}{b^4}\sin^3\frac{\pi y}{c}\cos^2\frac{\pi x}{b}\sin\frac{\pi x}{b} + \frac{1}{c^4}\sin^3\frac{\pi x}{b}\cos^2\frac{\pi y}{c}\sin\frac{\pi y}{c}]$$

$$+ [-h_1 a\omega_{11}\sin\varphi Z_{11} + h_2 a^3\omega_{11}^3\sin^3\varphi Z_{11}^3]\}. \tag{4.5}$$

$$F_{111}(a,\varphi) = \frac{\int_0^b\int_0^c F_{11}Z_{11}dxdy}{\int_0^b\int_0^c Z_{11}^2 dxdy}\ ,$$

$$F_{111}(a,\varphi) = \int_0^b\int_0^c \{$$

$$\frac{-K_1 a^3\cos^3\varphi Z_{11}^3\sin^4\frac{\pi x}{b}\sin^4\frac{\pi y}{c} + \frac{K_2}{2}a^3\cos^3\varphi\pi^4[\frac{1}{b^4}\sin^4\frac{\pi y}{c}\cos^2\frac{\pi x}{b}\sin^2\frac{\pi x}{b} +}{\int_0^b\int_0^c Z_{11}^2 dxdy} +$$

$$\frac{+\frac{1}{c^4}\sin^4\frac{\pi x}{b}\cos^2\frac{\pi y}{c}\sin^2\frac{\pi y}{c}]}{\int_0^b\int_0^c Z_{11}^2 dxdy} + [$$

$$\frac{-h_1 a\omega_{11}\sin\varphi\sin^2\frac{\pi x}{b}\sin^2\frac{\pi y}{c} + h_2 a^3\omega_{11}^3\sin^3\varphi\sin^4\frac{\pi x}{b}\sin^4\frac{\pi y}{c}}{\int_0^b\int_0^c Z_{11}^2 dxdy}]\}dxdy. \tag{4.6}$$

$$F_{111}(a,\varphi) = -\frac{9}{16}K_1 a^3\cos^3\varphi + [(\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4})\frac{3}{16}\frac{K_2}{2}a^3\cos^3\varphi\pi^4] +$$

$$-h_1 a\omega_{11}\sin\varphi + \frac{9}{16}h_2 a^3\omega_{11}^3\sin^3\varphi]. \quad (4.7)$$

$$A_1 = -\frac{1}{2\pi\omega_{11}}\int_0^{2\pi}F_{111}(a,\varphi)\sin\varphi d\varphi,\ B_1 = -\frac{1}{2a\pi\omega_{11}}\int_0^{2\pi}F_{111}(a,\varphi)\cos\varphi d\varphi\ . \quad (4.8)$$

Sau một số các phép tính đơn giản chúng ta thu được.

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon\,[\frac{h_1}{2} - \frac{27}{128}h_2\omega_{11}^2 a^2]a\,,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{9}{128\omega_{11}}\varepsilon\,[-\frac{1}{2}K_2\pi^4(\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}) + 3K_1]a^2. \quad (4.9)$$

Từ hệ phương trình (4.9) chúng ta tìm nghiệm dừng $a = a_0 = const$, $\psi = \psi_0 = const$, bằng cách

$$[\frac{h_1}{2} - \frac{27}{128}h_2\omega_{11}^2 a^2]a = 0\,, \quad (4.10)$$

$$\frac{9}{128\omega_{11}}[-\frac{1}{2}K_2\pi^4(\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}) + 3K_1]a^2 = 0\,,$$

dễ dàng thấy có hai nghiệm dừng

$$a = a_0 = 0\,,$$

$$a^2 = a_0^2 = \frac{64h_1}{27h_2\omega_{11}^2}\,. \quad (4.11)$$

Cần xét sự ổn định của hai nghiệm này bằng cách đặt vào hệ phương trình (3.9) các đại lượng $a = (a_0 + \delta a)$, $\psi = (\psi_0 + \delta\psi)$. Ta có hệ phương trình biến phân sau đối với các nhiễu động δa, $\delta\psi$.

$$\frac{d}{dt}(\delta a) = \varepsilon\,[\frac{h_1}{2} - \frac{27}{128}h_2\omega_{11}^2 a_0^2] - \frac{27}{64}\varepsilon h_2\omega_{11}^2 a_0^2\,,$$

$$\frac{d}{dt}(\delta\psi) = \frac{9}{64\omega_{11}}\varepsilon\,[-\frac{1}{2}K_2\pi^4(\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}) + 3K_1]\,a_0\,. \quad (4.12)$$

Để cho nghiệm a_0 ổn định thì vế phải phương trình thứ nhất của (4.12) phải nhỏ hơn không. Ta có

$$[\frac{h_1}{2} - \frac{81}{128}h_2\omega_{11}^2 a_0^2] < 0. \quad (4.13)$$

Với $a_0 = 0$, $\frac{d}{dt}(\delta a) = \varepsilon\frac{h_1}{2} > 0$. Vậy nghiệm $a_0 = 0$ là không ổn định

$$\frac{d}{dt}(\delta a) < 0, khi \frac{h_1}{2} < \frac{81}{128} h_2 \omega_{11}^2 a^2 \ \ suy\ ra$$

$$a_0^2 > \frac{64h_1}{81h_2\omega_{11}^2}\ , \tag{4.14}$$

Vậy nghiệm dừng của dao động với biên độ:

$$a^2 = a_0^2 = \frac{64h_1}{27h_2\omega_{11}^2} \tag{4.15}$$

là ổn định.

5. KẾT LUẬN

Xét dao động của bản mỏng chữ nhật theo mô hình hai hệ số nền thì tần số riêng của hệ tăng lên một lượng đáng kể, làm giảm biên độ dao động dừng. Bài toán đã thay đổi về mặt định tính và cả định lượng.

Đã xây dựng được mô hình tính toán tìm nghiệm tiệm cận của bài toán. Trong xấp xỉ thứ nhất hoàn thiện nghiệm đã được xác định.

Xét sự ổn định của nghiệm dừng và tìm được biểu thức xác định biên độ của dao động đó đối với dao động tự chấn của bản.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Hoàng Văn Đa - Dao động của bản mỏng chữ nhật trên nền đàn hồi hai hệ số nền, Tạp chí Cơ học **4** (2) (1982) 6-12.
2. Đào Huy Bích - Lý thuyết dẻo và các ứng dụng, Nhà xuất bản Xây dựng, Hà Nội, 2004, 361 trang.
3. Nguyễn Tiến Khiêm - Cơ sở động lực học công trình. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia, Hà Nội, 2004, 131 trang.
4. Hoang Van Da, Tran Dinh Son, Nguyen Duc Tinh - Asymptotic solution of the high order partial differential equation, Vietnam Journal of Mechanics **31** (2) (2009) pp. 65-74.
5. Mitropolskii Yu. A. Nguyen Van Dao - Applied Asymptotic Method in nonlinear Oscillation, Ukrainian Academy of Sciences, National center for natural science and technology of Vietnam. Kiev - Ha Noi, 1994, 410 pp.

SUMMARY

SELF - EXCITED OSCILLATION OF THE RECTANGULAR THIN PLATE ON THE ELASTIC FLOOR WITH TWO COEFFICIENTS OF THE FLOOR

In this paper, the author has used the asymptotic method to study the seft - excited oscillation of the rectangular thin plate on the elastic floor with two ceoffcients of the floor. The model of the calculation for finding the asymptotic solution of the proplem has been construeted.

In the improved first approximation the partial solution of equation of the considered boundary value proplem is determined, further the stability condition of the stationary oscillation has been investigated.

The partial frequence of the observed system has increased. The amplitude of the stationary oscillation has been decreased. Thus the proplem was changed on the peculiarity. It is an unexpected new result, which we have obtained.

Liên hệ với tác giả:

Trần Đình Sơn,

Trường Đại học Mỏ địa chất.