*Tạp chí Khoa học và Công nghệ **49** (2) (2011) 1-7*

TỐI ƯU HÓA VỎ TRỤ VÀ TẤM TRÒN CÓ GÂN TĂNG CƯỜNG BẰNG NGUYÊN LÍ CỰC ĐẠI PONTRYAGIN

Trần Minh[1], Nguyễn Lê Hải[2]

[1]*Học viện Kĩ thuật Quân sự*

[2]*Học viện Kĩ thuật Quân sự*

Đến Tòa soạn ngày: 10/9/2010

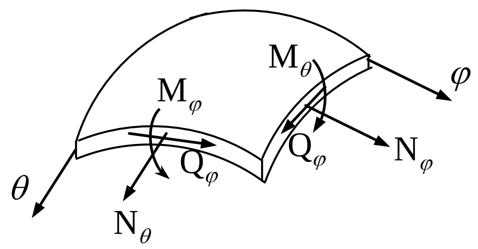
1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Sử dụng các phương pháp quy hoạch toán học để giải bài toán tối ưu được ứng dụng khá rộng rãi trong các lĩnh vực kĩ thuật và trong các bài toán kinh tế. Tuy nhiên, đối với các bài toán đối xứng trục trong cơ học, ứng dụng nguyên lí cực đại Pontryagin [1, 7] cho phép ta đạt đến kết quả nhanh gọn hơn. Dưới đây ta xét bài toán tối ưu hóa vỏ trụ, tấm tròn có gân tăng cường bằng nguyên lí cực đại Pontryagin.

2. BÀI TOÁN TỐI ƯU VỎ TRỤ CÓ CỐT

2.1. Đặt bài toán

Bất kì kết cấu vỏ đối xứng trục chịu tải trọng đối xứng ở trạng thái giới hạn nào, theo N. V. Akhvledianhi [6] đều có 3 bậc tự do. Đối với vỏ trụ chịu tải trọng đối xứng, bài toán đơn giản đi rất nhiều.



Hình 1. Phân tố vỏ chịu tải trọng đối xứng trục

Hệ phương trình cân bằng của phân tố vỏ trụ (hình 1) chịu tải trọng đối xứng theo [5] được viết dưới dạng:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\left(N_\varphi r_0\right)}{\partial\varphi} - N_\theta r_1\cos\varphi - r_0 Q_\varphi + r_0 r_1 Y = 0;\\
&N_\varphi r_0 + N_\theta r_1 \sin\varphi + \frac{\partial\left(Q_\varphi r_0\right)}{\partial\varphi} + r_0 r_1 Z = 0;\\
&\frac{\partial\left(M_\varphi r_0\right)}{\partial\varphi} - M_\theta r_1\cos\varphi - r_0 r_1 Q_\varphi = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

trong đó: N_φ, N_θ - nội lực tác dụng theo phương kinh tuyến và phương vòng; M_φ, M_θ - mômen uốn tác dụng theo phương kinh tuyến và phương vòng; Q_φ - lực cắt; r_0 - bán kính mặt cắt vành khuyên đang xét có tọa độ φ; r_1 - bán kính cong theo phương kinh tuyến; Y, Z - các thành phần ngoại lực. Đưa hệ (1) về dạng phương trình vi phân đạo hàm thường:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\left(N_\varphi\right)}{d\varphi} = \varphi_1 = r_0^{-1}\left(-N_\varphi r_0' + N_\theta r_1\cos\varphi - r_0 Q_\varphi - r_0 r_1 Y\right);\\
&\frac{d\left(Q_\varphi\right)}{d\varphi} = \varphi_2 = r_0^{-1}\left(-Q_\varphi r_0' - N_\varphi r_0 - N_\theta r_1 \sin\varphi - r_0 r_1 Z\right);\\
&\frac{d\left(M_\varphi\right)}{d\varphi} = \varphi_3 = r_0^{-1}\left(-M_\varphi r_0' + M_\theta r_1\cos\varphi + r_0 r_1 Q_\varphi\right).
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Khi đó ta có bài toán điều khiển tối ưu [1]:

$$\left.\begin{aligned}
&x_{i,t} = \varphi_i\left(x_1, x_2, ..., x_n; u_1, u_2, ..., u_n\right);\\
&J = x_0 = \int_0^T \varphi_0 dt \to \min, \quad u \in \Omega.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

trong đó $x_1, x_2, ..., x_n$ - tọa độ của hệ; $u_1, u_2, ..., u_n$ - biến điều khiển. Trong trường hợp này: $N_\varphi, Q_\varphi, M_\varphi$, J - đóng vai trò tọa độ; N_θ, M_θ, và các thông số của cốt là các biến điều khiển; Ω - miền điều khiển cho phép.

Xét trường hợp một đầu vỏ trụ tròn bị ngàm tại φ=0, các đại lượng $N_\varphi, Q_\varphi, M_\varphi, J$ coi như cho trước. Khi đó ta có trường hợp đối xứng trục.

Phương trình cân bằng sẽ có dạng:

$$\frac{d^2 M_\varphi}{dz^2} + \frac{N_\theta}{R} - P = 0 \tag{4}$$

trong đó, z là phương dọc theo đường sinh.

Đối với vỏ có cốt, bài toán tối ưu đặt ra là: ***cho trước đặc trưng hình học vỏ và tải trọng, yêu cầu xác định cách bố trí cốt và số lượng cốt sao cho tổng trọng lượng cốt là nhỏ nhất***.

2.2. Thuật toán

Nếu cho cánh tay đòn của cặp nội lực không đổi, thì các hệ số cốt liệu theo phương dọc và phương chu vi được xác định theo công thức sau [6]:

$$\mu_1 = \frac{|M_\varphi|}{\delta\sigma_b h}; \;\; \mu_2 = \frac{|N_\theta|}{\sigma_b h}. \tag{5}$$

σ_b - giới hạn bền của cốt; h - chiều cao mặt cắt; δ = constant - cánh tay đòn của cặp nội lực.

Thể tích cốt được viết dưới dạng [6]:

$$V = \int_0^L (\mu_1 + \mu_2)dz \tag{6}$$

Theo kí hiệu của lí thuyết điều khiển, có thể viết (6) như sau:

$$x_0(L) = \int_0^L (|x_1| + \delta|u|)dz \tag{7}$$

trong đó $u = N_\theta$ - điều khiển biến đổi trong khoảng $0 \le u \le pR$. L- chiều dài vỏ.

Áp dụng nguyên lí cực đại Pontryagin [1,7], đưa phương trình (4) về dạng:

$$\dot{x}_1 = x_2; \;\; \dot{x}_2 = P - \frac{u}{R}; \quad \dot{x}_0 = |x_1| + \delta|u|. \tag{8}$$

Với các điều kiện biên: $x_0(0) = x_1(0) = x_2(0) = 0.$ Dấu giá trị tuyệt đối của x_1 và u bỏ qua vì $u \ge 0$, và từ $u \le pR$ cùng điều kiện ban đầu suy ra $\dot{x}_2 \ge 0$ và $\dot{x}_1 \ge 0$. Từ đó ta có hàm Hamilton:

$$H = \psi_0(x_1 + \delta u) + \psi_1 x_2 + \psi_2\left(P - {u}/{R}\right) = \max. \tag{9}$$

và hệ phương trình liên hợp:

$$\dot{\psi}_0 = 0; \;\; \dot{\psi}_1 = -\psi_3; \;\; \dot{\psi}_2 = -\psi_1 \tag{10}$$

Với điều kiện biên tương ứng: $\psi_1(L) = \psi_2(L) = 0; \;\; \psi_0(L) = -1,$ điều đó có nghĩa là:

$$\psi_0 = -1; \;\; \psi_1 = -L + z; \;\; \psi_2 = -0,5(L - z)^2 \tag{11}$$

như vậy, hàm Hamilton sẽ được đưa về dạng:

$$H_1 = (L - z)x_2 - 0,5(L - z)p - x_1 + \left[\frac{(L - z)^2}{(2a)} - \delta\right]u. \tag{12}$$

Lời giải tối ưu theo [1, 7] tìm được khi H_1 = max theo u. Khảo sát cực trị hàm H_1, ta nhận được kết quả:

$$u = \begin{cases} 0 \;\; \text{khi} \;\; (L - z)^2 \le 2\delta R \\ PR \;\; \text{khi} \;\; (L - z)^2 > 2\delta R \end{cases} \tag{13}$$

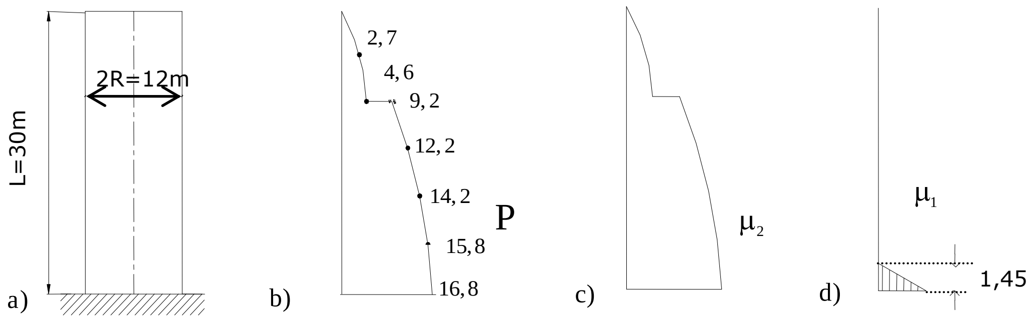
Từ (7) suy ra mô men uốn có phụ thuộc sau:

$$x_1 = \begin{cases} \int\limits_{z_0}^{z} dz \int\limits_{z_0}^{z} P dz & \text{khi } (L-z)^2 \le 2\delta R; \\ 0 & \text{khi } (L-z)^2 > 2\delta R \end{cases} \tag{14}$$

$$z_0 = L - \sqrt{2R\delta}$$

2.3. Tính toán số

Xét ống trụ tròn kiểu ống xylô dùng để chứa vật liệu dạng hạt (hình 1a). Vật liệu nền là bêtông mác 300, cốt bằng thép CT3. Lời giải tối ưu được thực hiện bằng ngôn ngữ Matlab cho trên hình 1b, 1c, 1d)

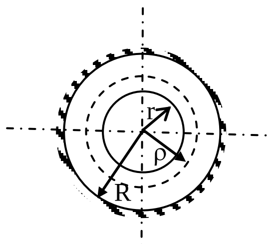


Hình 2. Mô hình ống xy lô, biểu đồ mô men và tải trọng

a)-kích thước hình học; b)-tải trọng; c)- cốt vòng; d)- cốt dọc

3. BÀI TOÁN TỐI ƯU TẤM TRÒN CÓ CỐT

3.1. Đặt bài toán



Hình 3. Tấm tròn vành khuyên bị ngàm xung quanh (ρ-bán kính bất kì)

Xét tấm tròn bị ngàm biên ngoài, có bán kính trong r, bán kính ngoài R, chịu tác dụng bởi xung phân bố đều, với vận tốc ban đầu v_0 (hình 3). Sử dụng định lí Martin [8], khi giải bài toán tối ưu tấm chịu tác dụng bởi xung phân bố đều, được đưa về tấm chịu tải trọng tĩnh:

$$q = \frac{\pi \int_r^R \rho m v_0^2 d\rho}{2\pi \bar{u}} = \frac{m v_0^2 \left(R^2 - r^2\right)}{4 r \bar{u}}. \tag{15}$$

trong đó $\bar{u}$ - độ võng cho phép tại biên tấm.

Giả sử tấm được bố trí gân tăng cường theo phương chu vi và phương hướng kính. Khi đó, bài toán tối ưu được đặt ra như sau: ***Xác đinh cách bố trí cốt tăng cường của tấm, sao cho hàm mục tiêu*** [6]:

$$J = \int_r^R \left(\left|M_0\right| + \left|M_r\right|\right)\rho d\rho \;\to\; \min \tag{16}$$

vì $M_r \le 0$ nên dấu tuyệt đối của số hạng thứ 2 có thể không cần viết.

3.2. Thuật toán

Phương trình dao động của tấm tròn được viết dưới dạng [3]:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left[D\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)\right] + \gamma p^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \cdot \tag{17}$$

trong đó: *U(r,t)* - độ võng, $D = \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}$ - độ cứng trụ; ν - hệ số Poát-xông, γ - khối lượng riêng, ρ - bán kính tấm, h - bề dày tấm; p - tần số dao động riêng.

Các thành phần nội lực được tính theo các biểu thức:

$$\left.\begin{aligned} M_r &= -D\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{\nu}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho}\right); \\ M_r &= -D\left(\nu\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho}\right); \\ Q_r &= \int_r^R 2\pi\rho q d\rho. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Để giải bài toán trên bằng nguyên lí cực đại Pontryagin [1,7], do đối xứng trục, ta đặt biến như sau:

$$M_r = -x_1;\;\; M_0 = u;\;\; x_0 = \int_r^\rho \left(|u| + x_1\right)\rho d\rho \tag{19}$$

và đưa bài toán về dạng chính tắc của lí thuyết điều khiển tối ưu:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_0 &= \left(|u| + x_1\right)\rho, \\ \dot{x}_1 &= -\frac{x_1 + u}{\rho} - \frac{Q_r}{\rho}, \\ \dot{Q}_r &= \gamma h p^2 u \rho. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Dấu chấm biểu thị đạo hàm theo ρ. Theo nguyên lí cực đại Pontryagin, ta thiết lập hàm Hamilton khi cho tần số dao động riêng p = constant [4]:

$$H = \psi_0\left(|u| + x_1\right)\rho - \psi_1\left(\frac{x_1 + u}{\rho} + \frac{Q_r}{\rho}\right). \tag{21}$$

trong đó ψ_0, ψ_1 thoả mãn hệ phương trình liên hợp sau:

$$\dot{\psi}_0 = 0;\ \dot{\psi}_0 = \psi_0\rho + \psi_1\rho^{-1}. \tag{22}$$

Giải các phương trình (22) với điều kiện hoành [2]: $\psi_0(R) = -1;\ \psi_1(R) = 0.$ Thay lời giải nhận được vào hàm Hamilton (21), ta nhận được:

$$H = -(R - 2\rho)|u|... \tag{23}$$

Sau dấu ba chấm là các số hạng không chứa điều khiển nên có thể bỏ qua [3].

Khảo sát hàm Hamilton (23), ta nhận được lời giải tối ưu:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Khi } r \le \rho \le R\ \ u>0,\ M_r=0,\ M_\theta=Q(\rho - r); \\ \text{Khi } \dfrac{R}{2} < \rho \le R\ \ u=0,\ M_\theta=0,\ M_r = \dfrac{Q_0}{3}\left(\dfrac{r^3}{\rho} - \rho^2\right). \end{array}\right\} \tag{24}$$

Từ (22), ta dễ dàng nhận được các thông số tối ưu.

Nhận xét: Khi r = 0, ta nhận được lời giải tương tự trong [2] đối với tấm tròn chịu tải trọng bất kì: bên trong vòng tròn bán kính R/2 - đặt cốt vòng, bên ngoài vòng tròn đặt cốt hướng tâm. Khi $r \ge R/2$ - trên tấm tối ưu chỉ đặt cốt hướng tâm.

4. KẾT LUẬN

Đối với các bài toán đối xứng trục, lời giải tối ưu nhận được khá dễ dàng nếu áp dụng nguyên lí cực đại Pontryagin.

Từ kết quả số nhận được, ta thấy ở đáy vỏ trụ luôn luôn xuất hiện miền hiệu ứng biên đối với mômen (hình 1d). Đối với ống ngắn hiệu ứng đó có thể xuất hiện trên toàn bộ vỏ, điều đó ngược với lí thuyết tính vỏ mỏng: *luôn luôn tồn tại miền phi mômen khi nghiên cứu trạng thái ứng suất trong vỏ mỏng.*

Vị trí và cách đặt cốt tăng cường cho tấm tròn tối ưu, phụ thuộc vào bán kính của tấm.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Trần Minh, Trần đức Trung - Điều khiển tối ưu, lí thuyết và ứng dụng trong cơ học, NXB QĐND, Hà Nội, 2010.
2. Trần Minh, Lê Kim Sơn - Tối ưu hoá tấm tròn chịu dao động uốn, Tuyển tập công trình Hội nghị khoa học toàn quốc Cơ học VRBD, Đồ Sơn, 2004.
3. Trần Minh, Nguyễn Công Hiệu - Ứng dụng nguyên lí cực đại Pontryagin trong bài toán phân tích dao động tự do của tấm tròn, Tạp chí KH&KT, HV KTQS (113) (2005).

4. Tran minh, Tran Duc Trung - Multi-Objective Optimization of Round Plate under Bending Vibration. Proceedings of the National Conference on Engineering Mechanics and Automation, 2006, Hanoi, Vietnam.
5. M. I. Reitman - The analysis of equation of elastic-plastic shells. Arch. Mech. Stos. (3) (1997).
6. Н. В. Ахвледиани - К расчету железобетонных оболочек вращения по методу предельного равновесия, Сообщение АН ГССР **18** (2) (1987).
7. М. И. Рейтман - Оптимальное проектирование оболочек с помощью приципа максимума Л. С. Понтрягина. МТТ, ЛВ (3) (1971).
8. И. Ф. Троцкий - Оптимальные процессы колебаний механических систем. Лен.: "Машиностроение", 1976.

SUMMARY

OPTIMIZATION OF RIBBED CYLINDRICAL SHELLS AND ROUND RIBBED PLATES USING PONTRYAGIN MAXIMUM PRINCIPLE

An application of the modern control theory – Pontryagin maximum principle – for solving the problem of optimizing ribbed cylindrical shells and round ribbed plates is presented in this paper. By changing the equilibrium equations in form of high-order partial differential equations into system of canonical ones, the optimum solution is to establish the Hamilton function and investigate its extreme. The calculation results show that the weight of the optimal reinfoced concrete shells and round plates can be considerably decreased.