ĐIỀU KHIỂN ON – OFF TRONG BÀI TOÁN DẦM CHỊU UỐN

Nguyễn Nhật Thăng, Bùi Hải Lê, Trần Đức Trung, Trần Minh Thúy*

Đại học Bách khoa Hà Nội, Số 1 Đại Cồ Việt, Hai Bà Trưng, Hà Nội

*Email: *thuybk2012@yahoo.com*

Đến Tòa soạn: 12/9/2012; Chấp nhận đăng: 7/11/2013

TÓM TẮT

Ứng dụng nguyên lí cực đại Pontryagin xác định quy luật biến đổi của mặt cắt ngang dầm chịu uốn dưới tác dụng của trọng lượng bản thân cho giá trị cực đại của mũi tên võng. Kết quả nghiên cứu cho thấy điều khiển thích hợp có dạng On – Off ứng với dầm có dạng bậc. Xác định điểm chuyển bậc và ảnh hưởng của tải đến vị trí điểm chuyển bậc đó.

Từ khóa: điều khiển On-Off, nguyên lí cực đại Pontryagin, dầm chịu uốn.

1. GIỚI THIỆU

Nguyên lí cực đại là cơ sở cho lí thuyết tối ưu hiện đại với điều kiện cần để cực tiểu hóa hàm mục tiêu Maier chứa biến trạng thái ở thời điểm đầu và cuối $R\left[Y(0), Y(T)\right] = \min$ là hàm Hamilton $H\left(Y, L, P, U, t\right) = \max$ (khi $R\left[Y\left(0\right), Y\left(T\right)\right] = \max$ là hàm Hamilton $H\left(Y, L, P, U, t\right) = \min$):

- *Y(t) là các biến trạng thái của quá trình động lực (tuân theo hệ phương trình vi phân đạo hàm thường theo thời gian t).*
- *L(t) là các biến trạng thái liên hợp (có thể hiểu như những biến nhân tử suy rộng Lagrange trong bài toán cực trị vướng).*
- *P là các tham số không phụ thuộc t*
- *U(t) là điều khiển phụ thuộc thời gian mà ta cần xác định quy luật*
- *t là thời gian*

Như vậy chương trình giải bài toán tối ưu theo quan niệm lựa chọn quy luật điều khiển trong một miền đóng $U^*(t) \le U(t) \le U^{**}(t)$ để đưa trạng thái đối tượng từ thời điểm đầu đến trạng thái cuối tối ưu, nghĩa là làm cực tiểu một hàm mục tiêu chứa các biến trạng thái cuối đó (phiếm hàm Maier) gồm các Modun sau:

Modun giải hệ phương trình vi phân đạo hàm thường (Mgt) với những điều kiện có thể có ở cả hai thời điểm đầu và cuối $Y\left(0\right),\ Y(T)$.

Có thể chỉ cần thỏa mãn gần đúng các điều kiện đó theo mục tiêu bình phương tối thiểu với phương pháp lặp theo chiều ngược của Gradient. Như vậy trong Mgt có Gra (Modun Gradient) và trong Gra có Rkt - Modun giải hệ phương trình vi phân đạo hàm thường có các điều kiện đầu theo phương pháp Runge Kutta.

Modun tìm cực đại hàm một biến (Mcd) thực chất là chọn giá trị điều khiển U trong miền $\left[U^*, U^{**}\right]$. Đơn giản là chia ra 10 giá trị $U^* + k.d$, với k = 0, 1,.. 9, $d = \left(U^{**} - U^*\right)/10$ bằng cách so sánh loại trừ.

Nhận xét

Nếu hàm *H* là một tổng các hàm thì ta chỉ quan tâm đến những số hạng có chứa đại lượng điều khiển. Trường hợp chỉ có một số hạng chứa điều khiển *H = H* (Y, L, P, t) + z(t) U(t)* ta có điều khiển dạng On - Off (điều khiển bang-bang), điều khiển U tại thời điểm t có dạng

$$U(t) = (U^{**} + U^{*})/2 + sign[z(t)](U^{**} - U^{*})/2$$

điều khiển On - Off cũng có thể xuất hiện nều hàm H là lõm , H''(U) > 0.

2. BÀI TOÁN DẦM CÓ ĐỘ CỨNG NHỎ NHẤT (MŨI TÊN VÕNG LỚN NHẤT) CHỊU UỐN DƯỚI TÁC ĐỘNG CỦA TRỌNG LƯỢNG RIÊNG

Dưới đây trình bầy bài toán dạng mặt cắt ngang của dầm biến đổi theo quy luật bậc của điều khiển On – Off với trường hợp R = max ứng với H = min.

2.1. Đặt bài toán

Xác định sơ bộ các tham số đầu vào của đối tượng bằng kinh nghiệm. Coi đó là giải pháp gốc. Ví dụ như sơ bộ có cái dầm chìa nằm ngang dài L, vật liệu thép có modun đàn hồi E, trọng lượng riêng G, mặt cắt ngang hình chữ nhật có diện tích *h.A* = const*.

Xác định một đặc tính đầu ra ví dụ là độ võng đầu tự do V. Xác định tham số đầu vào có thể thay đổi để giảm độ võng, ví dụ lấy cạnh đáy là A(x) trong miền [A*- A*/10, A* + A*/10] để giảm V. Nghĩa là chọn A(x) là điều khiển U(t).

Phát biểu bài toán tối ưu dưới dạng bài toán tìm điều khiển A(X) để đưa một điểm trong không gian trạng thái (chuyển vị V, góc xoay φ, moment uốn M, lực cắt Q) từ điểm đầu có chuyển vị, góc xoay bằng 0 đến điểm cuối có moment uốn, lực cắt triệt tiêu với một khoảng đường là độ dài L của thanh sao cho V(L) = Max.

2.2. Giải bằng Nguyên Lí Cực Đại Pontryagin

Hệ động lực (hệ phương trình vi phân trạng thái) có dạng

$$\begin{aligned} V' &= \varphi \\ \varphi &= -\frac{M}{EcA} \\ M' &= Q \\ Q &= -qA \end{aligned} \qquad (1)$$

Với điều kiện trạng thái đầu và cuối

$$V(0) = \phi(0) = M(L) = Q(L) = 0$$

sao cho

$$V(L) = \max \tag{3}$$

Ở đây c là hằng số trong công thức tính moment quán tính đối với trục ngang của mặt cắt $c = h^2/12$. Các bước giải bài toán tối ưu như sau:

a) Lập hàm Hamilton.

$$H = \varphi.P_v - \frac{M}{EcA}P_\varphi + QP_M - qAP_q \tag{4}$$

b) Viết hệ phương trình vi phân liên hợp

$$\begin{aligned} &P_v' = 0 \\ &P_\varphi' = -P_v \\ &P_M' = \frac{P_\phi}{EcA} \\ &P_Q' = -P_M \end{aligned} \tag{5}$$

và điều kiện liên hợp

$$P_v(L)\delta V(L) + P_f(L)\delta f(L) + P_M(L)\delta M(L) + P_Q(L)\delta Q(L) -$$
$$-P_v(0)\delta V(0) + P_f(0)\delta f(0) + P_M(0)\delta M(0) + P_Q(0)\delta Q(0) + \delta V(L) = 0$$

Tính đến (2) có

$$P_v(L)\delta V(L) + P_\phi(L)\delta\phi(L) - P_M(0)\delta M(0) + P_Q(0)\delta Q(0) + \delta V(L) = 0$$

Từ đó

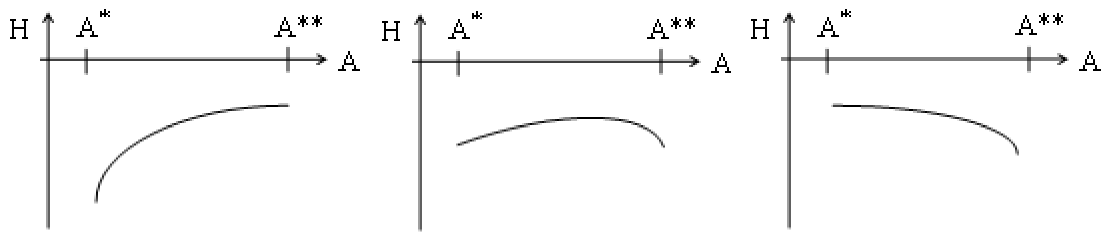
$$P_M(0) = P_Q(0) = P_\varphi(0) = 0, \qquad P_V(L) = -1 \tag{6}$$

Từ (5), (6) suy ra:

$P_V = -1,\ P_\varphi = x - L \le 0$ và P_M là hàm đơn điệu giảm từ giá trị 0 nên cũng không dương (≤ 0). Còn P_Q là hàm đơn điệu tăng từ giá trị 0 nên không âm (≥ 0). Ngoài ra M không dương (≤ 0). Như đã viết ở phần nhận xét trên, chỉ giữ lại các số hạng phụ thuộc điều khiển ta có

$$H = -\frac{M}{EcA}P_\varphi - qAP_Q = -\frac{a^2}{A} - b^2 A \tag{4*}$$

Với a, b là hai số thực. H(A) là hàm lồi nghĩa là giá trị cực tiểu H (A) = min chỉ có thể đạt ở biên A* (ứng với đoạn đầu có ngàm) và A**(ứng với đoạn sau tự do).



Hình 1. 3 khả năng dạng hàm H lồi.

Ta có điều khiển On – Off. Để xác định rõ hơn dạng của điều khiển ta có

$$x = 0, H = -b^2 A = \max \Rightarrow A(0) = A*$$
$$x = L, H = -\frac{a^2}{A} = \max \Rightarrow A(0) = A** \tag{7}$$

Điểm chuyển tiếp s có thể xác định từ điều kiện V(L) = max (xem phụ lục Bài toán SBVL)

3. KẾT LUẬN

Khảo sát hàm H (A) cho trường hợp dầm có mũi tên võng nhỏ nhất cho điều khiển gồm ba giai đoạn: A**, A(x) , A* với hai điểm chuyển tiếp.

Nguyên lí cực đại ra đầu tiên để giải quyết bài toán điều khiển tác động nhanh và thường cho kết quả điều khiển On - Off. Kết quả dầm hai bậc cho trường hợp đã xét trên cũng là kết quả cho trường hợp khối lượng dầm cho trước tìm điều khiển để nhịp dầm là ngắn nhất.

Trường hợp có tải trọng phân bố cường độ p không đổi hệ phương trình trạng thái được bổ sung

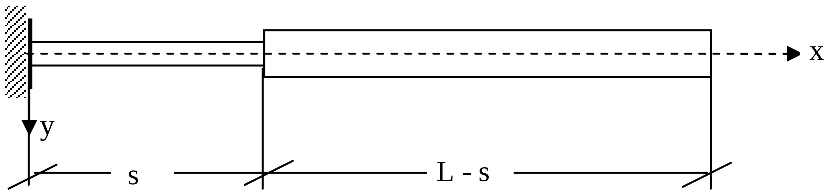
$$\begin{aligned} V' &= \varphi \\ \varphi' &= -\frac{M}{EcA} \\ M' &= Q \\ Q &= -qA - p \end{aligned} \tag{8}$$

Nếu p đủ lớn so với q có thể coi như dầm chỉ chịu tải tập trung (q = 0) ta có H = - Abs(a)/ A = max, nghĩa là A(x) = A*, dầm có kích thước nhỏ nhất.

Bài toán có thể mở rộng cho trường hợp miền điều khiển là hàm số chỉ cần thỏa mãn A**(x) ≥ A*(x).

4. BÀI TOÁN SỨC BỀN VẬT LIỆU

Cho dầm hai bậc mặt cắt ngang hình chữ nhật với chiều cao không đổi. Khi đó ta có quan hệ mô men quán tính I đối với đương trung hòa của mặt cắt và diện tích A là I = cA. Trọng lượng riêng của dầm là q. Cần xác định độ võng đầu tự do phụ thuộc vào khoảng cách chia bậc s.



Hình 2. Trục 2 bậc.

Giải phương trình trên ta xác định được

$$\frac{dV_1}{dx} = \frac{q}{2EcA_1}\left[\ A_2(L^2 - s^2)x + A_1(s^2x - sx^2 + \frac{x^3}{3})\ \right]$$

$$V_1 = \frac{q}{2EcA_1}\left[\ \frac{1}{2}A_2(L^2 - s^2)x^2 + A_1(\frac{1}{2}s^2x^2 - \frac{1}{3}sx^3 + \frac{x^4}{12})\ \right]$$

Từ đó

$$\frac{dV_1(s)}{dx} = \frac{q}{2EcA_1}\left[\ A_2(L^2 - s^2)s + A_1\frac{s^3}{3}\ \right]$$

$$V_1(s) = \frac{q}{2EcA_1}\left[\ \frac{1}{2}A_2(L^2 - s^2)s^2 + A_1\frac{s^4}{4}\ \right]$$

a) $s \le x \le L$

$$\frac{d^2V_2}{dx^2} = -\frac{M_2}{EcA_2} = \frac{q}{2EcA_2}\left[\ A_2(L-x)^2\ \right]$$

$$\frac{dV_2}{dx} = -\frac{q}{6EcA_2}\left[\ A_2(L-x)^3\ \right] + \frac{q}{2EcA_1}\left[\ A_2(L^2 - s^2)s + A_1\frac{s^3}{3}\ \right] + \frac{q}{6EcA_2}\left[\ A_2(L-s)^3\ \right]$$

$$V_2 = -\frac{q}{6EcA_2}\left[\ -\frac{A_2(L-x)^4}{4}\ \right] + \frac{q}{2EcA_1}\left[\ A_2(L^2 - s^2)s + A_1\frac{s^3}{3}\ \right]x + \frac{q}{6EcA_2}\left[\ A_2(L-s)^3\ \right]x +$$

$$+\frac{q}{6EcA_2}\left[\ -\frac{A_2(L-s)^4}{4}\ \right] - \frac{q}{6EcA_2}\left[\ A_2(L-s)^3\ \right]s$$

Cuối cùng

$$V_2(L) = \frac{q}{2EcA_1}\left[\ A_2(L^2 - s^2)s + A_1\frac{s^3}{3}\ \right]L + \frac{q}{6EcA_2}\left[\ A_2(L-s)^3\ \right]L +$$

$$+\frac{q}{6EcA_2}\left[\ -\frac{A_2(L-s)^4}{4}\ \right] - \frac{q}{6EcA_2}\left[\ A_2(L-s)^3\ \right]s \tag{9}$$

Lấy đạo hàm mũi tên võng theo s

$$\frac{dV_2(L)}{dx} = \frac{q}{2EcA_1}\left[\ A_2(L^2 - 3s^2) + A_1S^2\ \right]L - \frac{q}{2Ec}\left[\ (L-s)^2\ \right]L + \frac{q}{2Ec}\left[\ (L-s)^2\ \right]s = 0$$

$$\Rightarrow \frac{A_2}{A_1}(L^2 - 3s^2)L + S^2L - (L-s)^3 = 0$$

Hay

$$s^3 - (2 + \frac{3A_2}{A_1})s^2 L + 3L^2 s - L^3 + \frac{A_2}{A_1} L^3 = 0 \tag{10}$$

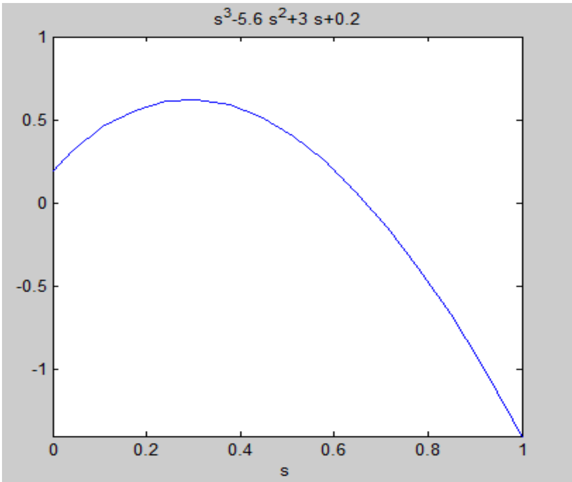
Ta thấy:

- (10) không phụ thuộc vào g và c (nghĩa là chiều cao h của mặt cắt ngang).
- Những nghiệm thực của phương trình (10) thỏa mãn điều kiện $0 \le s \le L$ là những giá trị được chọn để thay vào (9). Giá trị nào cho $V_2(L) = \max$ là nghiệm của bài toán.

5. VÍ DỤ SỐ

a) Ví dụ số: dầm thép có L = 1 m, A* = 0.10m, A** = 0,12 m.
Vẽ đồ thị

$$s^3 - 5,6s^2 + 3s + 0,2 = 0 \tag{10*}$$



Hình 3. Đồ thị $s^3 - 5,6s^2 + 3s + 0,2 = 0$.

Trong khoảng $0 \le s \le 1$, phương trình có nghiệm s = 0,669.

- Với s = 0, thay vào (9) có $V_2(L) = \dfrac{0,125q}{Ec}$;

- Với s = 0,669; thay vào (9) có $V_2(L) = \dfrac{0,2732q}{Ec}$;

- Với s = 1; thay vào (9) có $V_2(L) = \dfrac{0,1667q}{Ec}$.

Độ võng đầu tự do $V_2(L)$ đạt cực đại khi khoảng cách chia bậc s = 0,669.

b) Xét trường hợp (10*) có thêm p và tìm p* để s = 0

Lời cảm ơn. Nghiên cứu được tài trợ bởi *Quỹ phát triển khoa học và công nghệ quốc gia Việt Nam (NAFOSTED,* đề Tài NCKH "Tối ưu hóa kết cấu sử dụng nguyên lí cực đại Pontryagin" mã số: 107.02-2012.03 (04-Cơ học)*).*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Atanackovic T. M., Jakovljevic B. B., and Petkovic M. R. **-** On the optimal shape of a column with partial elastic foundation, European Journal of Mechanics A/Solids **58** (2009) 1–7.
2. Atanackovic T. M., and Simic S. S. **-** On the optimal shape of a Pflüger column, European Journal of Mechanics A/Solids **18** (1999) 903-913.
3. Braun D. J. **-** On the optimal shape of compressed rotating rod with shear and extensibility, International Journal of Non-Linear Mechanics **43** (2008) 131-139.
4. Do S. **-** Analytical Mechanics, Bach khoa Publishing House, Hanoi, Vietnam, 2007 (in Vietnamese).
5. Geering H. P. **-** Optimal Control with Engineering Applications, Springer Press, Berlin, Germany, 2007.
6. Jelicic Z. D. and Atanackovic T. M. **-** Optimal shape of a vertical rotating column, International Journal of Non-Linear Mechanics **42** (2007) 172-179.
7. Li Q. S. **-** Free longitudinal vibration analysis of multi-step non-uniform bars based on piecewise analytical solutions, Engineering Structures **22** (2000) 1205–1215.
8. Nguyen V. K. **-** Engineering Vibration. Science and Engineering Publishing House, Hanoi, Vietnam, 2005 (in Vietnamese).
9. Szymczak C. **-** Optimal Design of Thin Walled I Beams for Extreme Natural Frequency of Torsional Vibrations, Journal of Sound and Vibration **86** (2) (1983) 235-241.
10. Szymczak C. **-** Optimal Design of Thin Walled I Beams for a Given Natural Frequency of Torsional Vibrations, Journal of Sound and Vibration **97** (1) (1984) 137-144.
11. Tran D. T. and Bui H. L. **-** Optimal control for eigenfrequencies of a torsional shaft system including TMD effect, Journal of Science and Technology **47** (4) (2009) 37-47.
12. Tran D. T. and Nguyen D. **-** On the optimal axial stiffness of a column, Journal of Structural mechanics and Design of Structures **6** (1979) 72-74 (ISSN: 0039-2383) (in Russian).
13. Tran D. T. and Vu T. B. **-** Studying influence of a concentrated mass for optimal shape in the problem of longitudinal vibration bar, Journal of Science and Engineering **9** (135) (1977) 19-25 (in Vietnamese).

ABTRACT

ON - OFF CONTROLS IN THE PROBLEM OF BENDING BEAMS

Nguyen Nhat Thang, Bui Hai Le, Tran Duc Trung, Tran Minh Thuy*

Hanoi University of Science and technology, 1 Dai Co Viet, Hai Ba Trung, Ha Noi

*Email: *thuybk2012@yahoo.com*

In this paper, the Pontryagin's maximum principle was applied to determine the rule of cross-sectional of a bending beam subjected to self-weight load in the case of the maximum deflection. The research result of the On - Off control showed that there is a two-step beam. For the controlling one, therefore, needs to determine the position of switch point and the influence of self-weight load to the position of switch point.

Keywords: On - off control, Pontryagin's maximum principle, bending beam.

BTV: Chưa chạy tit chạy trang.

- Tác giả: Bổ sung thông tin tài liệu tham khảo [1] (thiếu volume)