26(1), 82-85 Tạp chí CÁC KHOA HỌC VỀ TRÁI ĐẤT 3-2004

ĐÁNH GIÁ ĐỘ CHÍNH XÁC HIỆU ĐỘ CAO GEOID THEO CÁC HỆ SỐ TRIỂN KHAI ĐIỀU HOÀ CỦA THẾ TRỌNG TRƯỜNG TRÁI ĐẤT

PHẠM HOÀNG LÂN, HOÀNG MINH NGỌC

I. ĐẶT VẤN ĐỀ

Độ cao của geoid so với ellipxoid chuẩn có ý nghĩa quan trọng trong việc nghiên cứu thế trọng trường và hình dạng Trái Đất. Nó còn rất cần thiết cho việc giải quyết nhiều bài toán thực tiễn khác như : xác lập chặt chẽ mặt chuẩn độ cao quốc gia, xác định khoảng chênh giữa mặt biển trung bình và mặt geoid, truyền độ cao bằng công nghệ định vị toàn cầu (GPS) kết hợp với số liệu trọng lực... Trong thời gian gần đây vấn đề xác định đại lượng này càng được quan tâm hơn do quy mô của các bài toán có liên quan ngày càng mở rộng và độ chính xác đòi hỏi ngày càng cao.

Về nguyên tắc độ cao ζ của geoid so với ellipxoid chuẩn có thể được xác định theo công thức Stokes trên cơ sở sử dụng các giá trị dị thường trọng lực được cho trên toàn bộ bề mặt Trái Đất. Song trên thực tế người ta thường chia bề mặt Trái Đất thành hai vùng là vùng gần và vùng xa để tính riêng ảnh hưởng của từng vùng rồi cộng kết quả lại. Theo cách này, ảnh hưởng ζ của vùng gần được tính theo giá trị dị thường trọng lực Δg đã biết với mật độ và độ chính xác cần thiết trong phạm vi bán kính ψ_0 xung quanh điểm xét. Ảnh hưởng ζ của vùng xa được tính đến thông qua các hệ số triển khai điều hoà của thế trọng trường Trái Đất. Ta có các công thức sau [2]:

$$\overline{\varsigma} = \varsigma' + \varsigma \tag{1}$$

$$\varsigma' = \frac{R}{4\pi\gamma}\int_0^{\psi_0}\int_0^{2\pi}\Delta g S(\psi) Sin\psi d\psi dA \tag{2}$$

$$\varsigma = \frac{R}{2}\sum_{n=2}^{n_{\max}}(n-1)\overline{Q}_n\sum_{m=0}^{n}(\overline{C}_{nm}\cos m\lambda + \overline{S}_{nm}\sin m\lambda)\overline{P}_{nm}(\sin\varphi) \tag{3}$$

$$\overline{Q}_n = \int_0^{\psi_0} P_n(\cos\psi)[S(\psi) - S(\psi_0)]\sin\psi d\psi \tag{4}$$

Trong các công thức trên ψ là khoảng cách cầu giữa điểm xét và điểm chạy trong vùng lấy tích phân, A là phương vị của hướng từ điểm xét đến điểm chạy, R là bán kính trung bình của Trái Đất, $\overline{C}_{nm}$ và $\overline{S}_{nm}$ là các hệ số điều hoà đã được chuẩn hoá bậc n cấp m trong chuỗi triển khai vào hàm số cầu của thế trọng trường Trái Đất; $\overline{P}_{nm}(\sin\psi)$ là đa thức Legendre liên hợp đã được chuẩn hoá bậc n cấp m ; φ và λ là độ vỹ và độ kinh của điểm xét.

Trong quá trình giải quyết các bài toán thực tiễn có liên quan đến mặt geoid nhiều khi chúng ta lại quan tâm hơn đến việc xác định hiệu độ cao geoid giữa hai điểm. Khi đó vấn đề đặt ra là phải đánh giá được sai số xác định đại lượng $\Delta\overline{\zeta}$. Về sai số của thành phần thứ nhất trong $\overline{\zeta}$ chúng tôi đã có dịp trình bày trong [1]. Dựa vào các kết quả khảo sát đã công bố ở đó, chúng ta có thể dễ dàng rút ra sai số của đại lượng $\Delta\zeta'$. Trong bài báo này chúng tôi xin đề cập đến việc đánh giá sai số của đại lượng $\Delta\zeta$ được xác định theo các hệ số triển khai điều hoà của thế trọng trường Trái Đất.

II. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

Ta hãy xét hiệu số giữa các giá trị ζ ứng với hai điểm xét A và B

$$\Delta\zeta = \zeta_B - \zeta_A \tag{5}$$

Với kí hiệu δ là sai số của các đại lượng có liên quan, ta có thể viết:

$$\delta\Delta\zeta_{AB} = \delta\zeta_B - \delta\zeta_A \tag{6}$$

$$\delta\zeta_A = \frac{R}{2}\sum_{n=2}^{n_{\max}}(n-1)\overline{Q}_n\sum_{m=0}^{n}(\delta\overline{C}_{nm}\cos m\lambda_A + \delta\overline{S}_{nm}\sin m\lambda_A)\overline{P}_{nm}(\sin\varphi_A) \tag{7}$$

$$\delta\zeta_B = \frac{R}{2}\sum_{n=2}^{n_{\max}}(n-1)\overline{Q}_n\sum_{m=0}^{n}(\delta\overline{C}_{nm}\cos m\lambda_B + \delta\overline{S}_{nm}\sin m\lambda_B)\overline{P}_{nm}(\sin\varphi_B) \tag{8}$$

Đem bình phương hai vế của biểu thức (6) rồi lấy kì vọng toán, ta sẽ có

$$M\{\delta\Delta\zeta_{AB}.\delta\Delta\zeta_{AB}\} = M\{\delta\zeta_B.\delta\zeta_B\} + M\{\delta\zeta_A.\delta\zeta_A\} - 2M\{\delta\zeta_A.\delta\zeta_B\} \tag{9}$$

hay

$$\sigma^2(\Delta\zeta_{AB}) = \sigma^2(\zeta_B) + \sigma^2(\zeta_A) - 2\sigma(\zeta_A.\zeta_B) \tag{10}$$

trong đó $\sigma^2(\zeta_A), \sigma^2(\zeta_B)$ được hiểu là phương sai sai số của đại lượng ζ_A và của đại lượng ζ_B, còn $\sigma(\zeta_A.\zeta_B)$ - là hiệp phương sai sai số của các đại lượng này.

Cũng bằng cách bình phương hai vế của biểu thức (7) rồi lấy kì vọng toán và thực hiện biến đổi trong đó có lưu ý tới tính chất pháp dạng của các hàm số cầu, ta sẽ rút ra

$$\sigma^2(\zeta_A) = \left(\tfrac{R}{2}\right)^2\sum_{n=2}^{n_{\max}}(n-1)^2\overline{Q}_n^2\sum_{m=0}^{n}\left[\sigma_{nm}{}^2(\overline{C})\cos^2 m\lambda_A + \sigma^2_{nm}(\overline{S})\sin^2 m\lambda_A\right]\overline{P}^2_{nm}(\sin\varphi_A) \tag{11}$$

Cho $\sigma_{nm}(\overline{C}) = \sigma_{nm}(\overline{S}) = \overline{\sigma}_{nm}$, ta có thể viết lại (11) ở dạng sau :

$$\sigma^2(\zeta_A) = \left(\tfrac{R}{2}\right)^2\sum_{n=2}^{n_{\max}}(n-1)^2\overline{Q}_n^2\sum_{m=0}^{n}\overline{\sigma}^2_{nm}\,\overline{P}^2_{nm}(\sin\varphi_A) \tag{12}$$

Bằng cách làm tương tự như trên, ta sẽ nhận được :

$$\sigma^2(\zeta_B) = \left(\tfrac{R}{2}\right)^2\sum_{n=2}^{n_{\max}}(n-1)^2 Q^2{}_n\sum_{m=0}^{n}\overline{\sigma}^2_{nm}\overline{P}^2_{nm}(\sin\varphi_B) \tag{13}$$

$$\sigma(\zeta_A.\zeta_B) = \left(\tfrac{R}{2}\right)^2\sum_{n=2}^{n_{\max}}(n-1)^2\overline{Q}_n^2\sum_{m=0}^{n}\overline{\sigma}^2_{nm}\overline{P}_{nm}(\sin\varphi_A)\overline{P}_{nm}(\sin\varphi_B)\cos[m(\lambda_B-\lambda_A)] \tag{14}$$

Bây giờ thay (12), (13) và (14) vào (10), ta đi đến biểu thức :

$$\sigma^2(\Delta\zeta_{AB}) = \left(\tfrac{R}{2}\right)^2\sum_{n=2}^{n_{\max}}(n-1)^2\overline{Q}_n^2\sum_{m=0}^{n}\overline{\sigma}^2_{nm}\left\{\begin{array}{l}\left[\overline{P}_{nm}(\sin\varphi_B) - \overline{P}_{nm}(\sin\varphi_A)\right]^2 + 4\overline{P}_{nm}(\sin\varphi_A)\overline{P}_{nm}(\sin\varphi_B)\\ .\sin^2\left[\frac{m(\lambda_B-\lambda_A)}{2}\right]\end{array}\right\} \tag{15}$$

$\overline{\sigma}_{nm}$ được hiểu là phương sai sai số của các hệ số triển khai điều hoà bậc n cấp m. Theo [2] ta có :

$$\overline{\sigma}_{nm} = \frac{20.10^{-8}}{n-1} \tag{16}$$

Thay (16) vào (15) và cho R= 6400 km, ta rút ra

$$\sigma^2(\Delta\zeta_{AB}) = (0{,}64m)^2 \sum_{n=2}^{n_{\max}} \overline{Q}_n^2 \sum_{m=o}^{n} \left\{ \frac{\left[\overline{P}_{nm}(\sin\varphi_B) - \overline{P}_{nm}(\sin\varphi_A)\right]^2 + 4\overline{P}_{nm}(\sin\varphi_A)\overline{P}_{nm}(\sin\varphi_B)}{\sin^2\left[\frac{m(\lambda_B-\lambda_A)}{2}\right]} \right\} \qquad (17)$$

Có thể xảy ra hai trường hợp đặc biệt như sau :

• Trường hợp 1 : $\varphi_A = \varphi_B$, tức là hai điểm cùng nằm trên một vòng vỹ tuyến. Khi đó ta có :

$$\sigma^2(\Delta\zeta_{AB}) = (1{,}28m)^2 \sum_{n=2}^{n_{\max}} \overline{Q}_n^2 \sum_{m=0}^{n} \left\{ \overline{P}_{nm}(\sin\varphi_A) \sin\left[\frac{m(\lambda_B-\lambda_A)}{2}\right] \right\}^2 \qquad (18)$$

• Trường hợp 2 : $\lambda_A = \lambda_B$, tức là hai điểm cùng nằm trên một vòng kinh tuyến. Khi đó ta sẽ có :

$$\sigma^2(\Delta\zeta_{AB}) = (0{,}64m)^2 \sum_{n=2}^{n_{\max}} \overline{Q}_n^2 \sum_{m=o}^{n} \left[\overline{P}_{nm}(\sin\varphi_B) - \overline{P}_{nm}(\sin\varphi_A)\right]^2 \qquad (19)$$

III. KẾT QUẢ TÍNH TOÁN VÀ NHẬN XÉT

Dựa vào các biểu thức (18) và (19), chúng tôi đã tiến hành tính toán nhằm khảo sát sai số của hiệu độ cao geoid theo các hướng sau :

1. Ảnh hưởng của bậc $n_{\max}$

Cho $\lambda_A = \lambda_B = 105°$, $\varphi_A = 18°$, $\varphi_B = 21°$, $\psi_0 = 3°$ và cho $n_{\max}$ lần lượt bằng 50, 100, 150, 200, ta có *bảng 1* :

Bảng 1. **Sai số hiệu độ cao geoid theo $n_{\max}$**

$n_{\max}$	$\sigma(\Delta\zeta_{AB})$
50	0,9524 m
100	0,9701 m
150	0,9711 m
200	0,9712 m

Như ta thấy, với $n_{\max} \geq 150$ giá trị của $\sigma(\Delta\zeta_{AB})$ hầu như không thay đổi. Trên cơ sở này trong các khảo sát tiếp theo chúng tôi chỉ lấy $n_{\max} = 150$.

2. Ảnh hưởng của vị trí địa lý các điểm xét

Cho $\lambda_A = \lambda_B = 105^0$, $\psi_0 = 3^0$, $n_{\max} = 150$, $\varphi_B - \varphi_A = 3^o$ và cho φ_A lần lượt bằng 8°, 14° và 18°, ta có *bảng 2* :

Kết quả trong bảng cho thấy giá trị của $\sigma(\Delta\zeta_{AB})$ không phụ thuộc vào vị trí của các điểm xét.

Bảng 2. **Sai số hiệu độ cao geoid theo vị trí điểm xét**

φ_A	$\sigma(\Delta\zeta_{AB})$
8°	0,9711 m
14°	0,9711 m
18°	0,9711 m

3. Ảnh hưởng của bán kính vùng cần biết dị thường trọng lực (ψ_0)

Cho $\lambda_A = \lambda_B = 105°$, $\varphi_A = 18°$, $\varphi_B = 21°$, $n_{\max} = 150$ và ψ_0 lần lượt bằng 1°, 2°, 3°, 4° và 5°, ta có kết qủa sau (*bảng 3*) :

Bảng 3. **Sai số hiệu độ cao geoid theo ψ_0**

ψ_0	$\sigma(\Delta\zeta_{AB})$
1°	2,0472 m
2°	1,3009 m
3°	0,9711 m
4°	0,7910 m
5°	0,6773 m

Số liệu trong bảng 3 cho thấy là sai số tính hiệu độ cao geoid do ảnh hưởng của vùng xa giảm nhanh khi bán kính ψ_0 của vùng gần mở rộng tới 3^0. Với bán kính này hiệu độ cao giữa hai điểm nằm cách nhau cỡ 300 km do ảnh hưởng của vùng xa đạt 0.97 m.

4. Ảnh hưởng khoảng cách giữa hai điểm xét

Cho $\lambda_A = \lambda_B = 105°$, $\psi_0 = 3°$, $n_{\max} = 150$, $\varphi_B = 21°00'$, $\varphi_B - \varphi_A$ lần lượt bằng 5', 10', 20', 30', 1°, 3°, 5°, 7° và 9°, ta nhận được *bảng 4* dưới đây.

Bảng 4. **Sai số hiệu độ cao geoid theo khoảng cách giữa 2 điểm**

$\varphi_B - \varphi_A$	$\sigma(\Delta\zeta_{AB})$
5'	0,0290 m
10'	0,0579 m
20'	0,1157 m
30'	0,1732 m
1°	0,3434 m
3°	0,9711 m
5°	1,5240 m
7°	2,0053 m
9°	2,4973 m

Bảng 4 cho thấy $\sigma(\Delta\zeta_{AB})$ tăng dần và tăng gần như tỷ lệ thuận theo khoảng cách giữa hai điểm xét.

Xin lưu ý, trên đây chúng tôi chỉ đưa ra kết quả cho trường hợp hai điểm xét cùng nằm trên một vòng kinh tuyến, vì trường hợp hai điểm xét cùng nằm trên một vòng vĩ tuyến có kết quả hoàn toàn tương tự.

KẾT LUẬN

Tổng hợp các kết quả tính toán và nhận xét đã nêu ở trên, có thể rút ra các kết luận sau :

1. Sai số tính hiệu độ cao geoid giữa hai điểm theo các hệ số triển khai điều hoà của thế trọng trường Trái Đất phụ thuộc mạnh vào bán kính của vùng gần, nơi cần biết giá trị dị thường trọng lực. Bán kính này cần được bảo đảm không nhỏ hơn 300 km.

2. Sai số nói trên tăng gần như tuyến tính theo khoảng cách giữa hai điểm xét. Nó có giá trị cỡ 0,03 m ở khoảng cách 10 km và có thể đạt xấp xỉ 1 m khi khoảng cách lên tới 300 km.

3. So sánh với sai số tính độ cao geoid do ảnh hưởng của vùng gần được chúng tôi công bố trong [1] là dưới 0,1 m thì sai số tính ảnh hưởng của vùng xa nhận được trong bài báo này lớn hơn rất nhiều. Do vậy, để làm giảm sai số xác định độ cao geoid cũng như hiệu độ cao geoid, trước hết và chủ yếu cần hạn chế ảnh hưởng của vùng xa, tức là cần mở rộng vùng có số liệu đo trọng lực xung quanh điểm xét.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] PHẠM HOÀNG LÂN, 2002 : Khảo sát độ chính xác xác định dị thường độ cao trọng lực. Tạp chí Địa chính số 9 tháng 9/2002, *20-22*. Tổng cục Địa chính, Hà Nội.

[2] Л.П. Пеллинен, 1978 : Высшая геодезия (Теоретическая геодезия). "Недра", Москва .

SUMMARY

Evaluating the accuracy of geoid undulation difference by use of the geopotential harmonic coefficients

In the paper the authors presented the formulas for evaluating the accuracy of geoid undulation difference by use of the geopotential harmonic coefficients. When carrying out the computations with these formulas, the authors showed the need to take the maximum degree in the serie expansion of the geopotential more than 150 and to provide the radius of the inner zone no less than 300km. In this case the error of geoid undulation difference between two points separated by 300km can be restricted within 1m. In order to reduce the error of geoid undulation difference, one should increase the dimensions of the inner zone with known gravity anomalies.

ngày nhận bài : 10-10-2002

Đại học Mỏ - Địa chất,
Cục Bản đồ Bộ Tổng tham mưu