TẠP CHÍ TIN HỌC VÀ ĐIỀU KHIỂN HỌC TẬP I (1991), Số 3 (21-26)

MÔ HÌNH KINH TẾ VI MÔ VỚI TIẾN BỘ KỸ THUẬT CÔNG NGHỆ VÀ VẤN ĐỀ ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU

LÊ HUY THẬP

Trung tâm nghiên cứu hệ thống

I – GIỚI THIỆU

Một trong những mô hình vĩ mô động đầu tiên nói lên mối liên hệ giữa phát triển kinh tế và môi trường là công trình của Darge. R. C., Kogiku K. C. [4] được in vào năm 1973. Cùng thời gian đó còn có các công trình của Keiler E., Spence M., Zeckhauser R. [3]; Forster B. A. [1]; Arrow K. J. [2]. Tiếc rằng trong các công trình này quan tâm ít thậm chí chưa quan tâm đến nhịp độ phát triển dân số và hệ số tiến bộ của kỹ thuật công nghệ mà theo chúng tôi chúng đóng vai trò quan trọng như đã xét trong định lý của bài báo này.

Qua cách xét vi mô và nội dung của định lý, chúng ta có thể kịp thời cải tạo hoặc thay thế các công nghệ chưa hoàn hảo, hoặc phải nâng cao nó trong một ngành nào đó, nhằm để tránh thảm họa tràn ngập chất thải của ngành đó.

II – MÔ HÌNH TOÁN HỌC

Xét hệ kinh tế đóng, tổng dân số L phát triển theo hàm mũ với nhịp độ tăng trưởng $\alpha \geq 0$; nghĩa là

$$L(t) = \mathrm{lo}\, e^{\alpha t}, \quad \mathrm{lo} > 0 \tag{1}$$

Giả thiết hệ này tiêu dùng n loại sản phẩm, khi tiêu dùng loại sản phẩm thứ i (gọi tắt là tiêu dùng i) với khối lượng $C_i(t)$ sẽ tạo ra dòng thải f_i và khối lượng chất thải của việc tiêu dùng sản phẩm i (gọi tắt là chất thải i) là $x_i(t)$. Hơn nữa giả thiết rằng $C_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ là những hàm liên tục từng khúc.

Giả sử hệ số tự hủy của chất thải i là $a_i \geq 0$ và tốc độ tăng chất thải i bằng hiệu giữa dòng thải f_i và khối lượng tự hủy $a_i x_i(t)$, ta có phương trình vi phân sau:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i - a_i x_i \\ x_i(0) &= x_{0i} \quad i = \overline{1,n} \end{aligned} \tag{2}$$

Nếu đưa vào các ký hiệu:

$$\begin{aligned} A &= \mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \\ x &= (x_1, x_2, \ldots, x_n)^* \\ f &= (f_1, f_2, \ldots, f_n)^* \end{aligned}$$

Trong đó diag ký hiệu đường chéo, còn dấu * ký hiệu là chuyển vị, thì (2) có thể viết dưới dạng ma trận:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f - Ax \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{3}$$

Không làm giảm tính thực tế, chúng ta có thể giả thiết rằng dòng thải f_i tỷ lệ với tổng tiêu dùng $C_i(t)$, nghĩa là:

$$f_i = \beta_i C_i(t)\ , \quad i = \overline{1,n} \tag{4}$$

Để đặc trưng cho tiến bộ kỹ thuật công nghệ ngành i, hệ số β_i được giả thiết là hàm mũ giảm theo thời gian, có dạng:

$$\begin{aligned} \beta_i &= b_i e^{-r_i t} \\ \beta_i(0) &= b_i > 0\ ,\ i = \overline{1,n} \end{aligned} \tag{5}$$

Trong đó $r_i \geq 0$ biểu thị sứ tiến bộ kỹ thuật của ngành i.

Ký hiệu

$$u_i(t) = \frac{C_i(t)}{L(t)}\ , \quad i = \overline{1,n} \tag{6}$$

Rõ ràng $u_i(t)$ cũng là những hàm liên tục từng khúc. Ta sẽ gọi $u_i(t)$ là chỉ tiêu tiêu dùng sản phẩm i trên đầu người (gọi tắt là chỉ tiêu), $u_i(t)$ chính là các biến điều khiển trong phần tối ưu sẽ xét ở mục sau.

Từ (4), (5), (6) và (1) chúng ta có

$$f_i = \mathrm{lo}\, b_i e^{(\alpha - r_i)t} . u_i(t),\ i = \overline{1,n} \tag{7}$$

Nếu ký hiệu:

$$B = \mathrm{lo}\ \mathrm{diag}(b_1 e^{(\alpha - r_1)t}, ..., b_n e^{(\alpha - r_n)t}) \tag{8}$$

$u = (u_1, ..., u_n)^*$ thì (3) được viết lại như sau:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -Ax + Bu \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{9}$$

Giả thiết rằng véc tơ chỉ tiêu $u(t)$ bị chặn bởi các véc tơ hằng $u^{(m)}$ và $u^{(M)}$:

$$0 \leq u^{(m)} \leq u(t) \leq u^{(M)} < \infty \quad \forall t \in [0, T] \tag{10}$$

Trong đó $[0, T]$ là khoảng thời gian ta xét mô hình.

Vấn đề đặt ra là phải chọn véc tơ $\overline{u}(t)$ làm cực đại giá trị của hàm mục tiêu

$$J(x_0, u) = \int_0^T e^{-\rho t} U(u, x) dt \tag{11}$$

Trong đó $\rho \geq 0$ là hệ số chiết khấu, còn $U(u,x)$ là hàm lợi ích thỏa mãn các giả thiết sau đây:

$$U(u,x) = g(u) - h(x) \tag{12}$$

$$g'(u) > 0\,,\ g''(u) < 0 \tag{13}$$

$$h'(x) > 0\,,\ h(x) > 0 \tag{14}$$

Ở đây

$$g'(u) = \left(\frac{\partial g(u)}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial g(u)}{\partial u_n}\right), \quad g''(u) = \left(\frac{\partial^2 g(u)}{\partial u_1^2}, \ldots, \frac{\partial^2 g(u)}{\partial u_n^2}\right)$$

Tương tự cho các ký hiệu $h'(x)$, $h''(x)$.

III - HÌNH DẠNG CỦA X(T)

Khi sử dụng công thức biến thiên hằng số ta thu được nghiệm của (9) như sau:

$$x(t) = e^{-At}[x_0 + \int_0^T e^{A\tau} B(\tau) u(\tau) d\tau] \tag{15}$$

Ký hiệu

$$\|x(t)\| = \sum_{i=1}^{n} x_i(t) \quad \text{là tổng cộng các chất thải tại thời điểm } t$$

Định lý:

a) Nếu ký hiệu $x^{(m)}$, $x^{(M)}$ là nghiệm của (9) tương ứng với $u(t) = u^{(m)}$ và $u(t) = u^{(M)}$ thì

$$0 \leq x^{(m)}(t) \leq x(t) \leq x^{(M)}(t) \tag{16}$$

Với $\forall t \in [0,T]$ và với mọi $u(t)$ thỏa mãn (10) và nghiệm $x(t)$ tương ứng thỏa mãn các điều kiện đầu:

$$x^{(m)}(0) = x(0) = x^{(M)}(0) = x_0$$

b) Nếu $\alpha < \min\limits_{1\leq i\leq n}\{r_i\}$ và $\min\limits_{1\leq i\leq n}\{a_i\} > 0$ thì

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$$

c) Chỉ cần tồn tại một i sao cho $\alpha > r_i$ hoặc $\alpha = r_i$ và $a_i = 0$, thì

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = \infty$$

d) Đối với những i mà $\alpha = r_i$ và $a_i > 0$ thì

$$x_{0i} + \frac{\mathrm{lo}b_i u_i^{(m)}}{a_i} \leq \lim_{t\to\infty} \inf x_i(t) \leq \lim_{t\to\infty} \sup x_i \leq x_{0i} + \frac{\mathrm{lo}b_i u_i^{(M)}}{a_i} \tag{17}$$

Còn đối với những i mà $\alpha < r_i$ và $a_i = 0$ thì

$$x_{0i} + \frac{\mathrm{lo}b_i u_i^{(m)}}{r_i - \alpha} \leq \lim_{t\to\infty} \inf x_i(t) \leq \lim_{t\to\infty} \sup x_i \leq x_{0i} + \frac{\mathrm{lo}b_i u_i^{(M)}}{r_i - \alpha} \tag{18}$$

Chứng minh: Do các ma trận A, B là đường chéo nên thành phần thứ i của nghiệm hệ (9) được biểu diễn như sau:

$$x_i(t) = e^{-a_i t}[x_{0i} + \mathrm{lo}b_i \int_0^t e^{(\alpha - r_i + a_i)\tau} u_i(\tau) d\tau]$$

Từ biểu thức này chúng ta có thể kiểm tra trực tiếp các kết luận của định lý một cách dễ dàng.

IV – VẤN ĐỀ ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU

Xét bài toán tối ưu

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -Ax + Bu \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{*}$$

$$0 \leq u^{(m)} \leq u(t) \leq u^{(M)} \tag{**}$$

Theo điều kiện cần của nguyên tắc cực đại của Pontryagin và theo định lý 2 trong [2] thì nếu $\overline{u}(t)$ là điều kiện tối ưu, sẽ tồn tại véc tơ $\eta(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t), ..., \eta_n(t))^*$ sao cho trên lớp hàm liên tục từng khúc thỏa mãn (**), $\overline{u}(t)$ làm cực đại hàm Hamiltonian sau:

$$H(u, x, \eta, t) = U(u, x)e^{-\rho t} + \eta^*(Bu - Ax) \tag{19}$$

Trong đó véc tơ $\eta(t)$ là nghiệm của hệ phương trình vi phân sau:

$$\dot{\eta}^* = -\frac{\partial H}{\partial x} = h'(x)e^{-\rho t} + \eta^* A \tag{20}$$

$$\eta(T) = 0 \tag{21}$$

Do (14) ta thấy ngay rằng $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = -h''(x)e^{-\rho t} < 0$ nên hàm Hamiltonian lõm theo biến x, do đó theo định lý 5 trong điều kiện cần ở trên cũng là điều kiện đủ cho bài toán điều khiển tối ưu đang xét. Từ (12) và (19) ta thấy $\overline{u}(t)$ làm cực đại biểu thức sau: $g(u)e^{-\rho t} + \eta^* Bu$. Điều đó tương đương với $\overline{u}(t)$ làm cực đại hóa biểu thức:

$$M(u) = g(u) + e^{\rho t}\eta^* Bu = g(u) + \eta^* B_\rho u \tag{22}$$

Trong đó

$$B_\rho = e^{\rho t} B \tag{23}$$

Đặt

$$y(t) = (-\eta^* B)^* \tag{24}$$

Thì

$$M(u) = g(u) - y^*(t)u \tag{25}$$

Đạo hàm y theo t trong biểu thức (24) ta thu được

$$\dot{y}^* = -\dot{\eta}^* B_\rho - \eta^* \frac{dB}{dt}$$

hay

$$\dot{y}^* = -\dot{\eta}^* B_\rho - \eta^* B_\rho(\alpha I - r + \rho I) \tag{26}$$

Trong đó $r = \text{diag}\,(r_1, r_2, ..., r_n)$.

Khi thay (24), (23), và (20) vào (26) ta thu được

$$\dot{y}^* = -h'(x)B + y^*[A + \alpha I - r + \rho I] \tag{27}$$

Giả sử $y(t) = 0$ tại t_0 nào đó, thì do (27) ta có $\dot{y}(t) < 0$ trong lân cận của t_0. Do tính liên tục của y nên $y(t) = 0$ tại t_0 nào đó là hoàn toàn có thể xảy ra. Mặt khác do (21) và (24) suy ra $y(T) = 0$, theo lý luận trên thì $\dot{y}(t) < 0$ trong lân cận của T, vì vậy $y(t) > 0$ và giảm trong lân cận T. Vì thế do (13) và (25) suy ra cuối khoảng thời gian $[0, T]$ điều khiển tối ưu phải lấy giá trị $u^{(M)}$.

Tóm lại theo lý luận trên và (25) ta có thể thấy ngay điều khiển tối ưu được biểu diễn như sau:

$$U(t) = \begin{cases} u^{(m)} & \text{nếu } g'(u^{(m)}) \le y^*(t) \\ [g]^{-1}(y(t)) & \text{nếu } g'(u^{(M)}) \le y^*(t) \le g'(u^{(m)}) \\ u^{(M)} & \text{nếu } g'(u^{(M)}) \ge y^*(t) \end{cases} \tag{28}$$

V – NGHIỆM SỐ

Tìm nghiệm tối ưu dưới dạng biểu thức là điều khó thực hiện, bởi lẽ chúng ta không biết điều kiện đầu $y(0)$ của hệ phương trình vi phân (27). Thậm chí chúng ta cũng chưa thể biết các điểm chuyển tiếp và số lần chuyển tiếp của điều khiển tối ưu. Tuy nhiên chúng ta có thể tìm nghiệm số của bài toán bằng phép lặp liên tiếp như sau.

Trước tiên tìm điều khiển chấp nhận được nào đó $u_{(0)}(t)$ (có thể lấy $u_{(0)}(t) = u^{(m)}$ hoặc $u_{(0)}(t) = u^{(M)}$); với $u_{(0)}(t)$ này ta tìm nghiệm $x_{u_{(0)}}(t)$ ở (15) sau đó dựa vào $x_{u(0)}(t)$ để tìm $y_{u(0)}(t)$ ở (27) bằng công thức biến thiên hằng số. Từ $y_{u(0)}(t)$ ta tìm điều khiển chấp nhận mới $u_{(1)}(t)$. Quá trình sẽ lặp lại từ đầu với $u_{(0)}(t) := u_{(1)}(t)$... cho đến khi chúng ta nhận được độ chính xác mong muốn.

VI – KẾT LUẬN

Có thể mở rộng mô hình theo nhiều cách khác nhau, $u^{(m)}$, $u^{(M)}$ và ngay cả các hệ số tiến bộ kỹ thuật công nghệ đều có thể xét như hàm của thời gian. Quan hệ giữa dòng thải và tổng tiêu dùng có thể là phi tuyến và trạng thái cuối có thể cho trước (tức là tổng khối lượng chất thải cuối thời kỳ chỉ được phép là $x(t)$) và khi đó hàm mục tiêu có thể là cực tiểu chi phí cho việc cải tạo hoặc thay thế qui trình công nghệ nhằm đảm bảo cuối thời kỳ chỉ còn tổng chất thải là $x(T)$.

Nhận ngày 1 - 11 - 1991

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Forster B. A., On a one state variable optimal control problem Consumption – Pollution Trade – offs. In Pitchford J. D., Turnovsky S. J. (eds): Applications of Control Theory to Economic Analysis. North – Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1977.
2. Arrow K. J., Applications of Control Theory to Economic growth. Mathematical Society, Providence, 1968.
3. Keeler E., Spence M., Zeckhauser R., The optimal control of pollution. Journal of Economic theory 4, 19 - 34,1972.
4. D'arge R. C., Kogiku K. C., Economic growth and the envirionment Review of Economic studies 40, 61 - 67, 1973.
5. Le Huy Thap, The linear quadratic optimal control problem for degenerate system. Institute of appled mathematics and computing 1988, Bratislava, CSSR.
6. Lee E. B., Markus L., Foundations of optimal control theory. New York, Wiley, 1967.
7. Favini A., Controllability Conditions for linear Degenerate evolution Systems. Applied mathematics and optimization, Vol. 6, p. 153 - 168, 1980.

SUMMARY

Microeconomic model with ecological technical progress and optimal control problem

The model presented in this paper is microeconomic one in which both the nonnegative decay rates of pollutions and the rates of the ecological technical progresses are etudied.

The optimal control theory and the numerical method are applied to find the optimal controller maximizing the integral of the utility function.