VÀI NHẬN XÉT VỀ VIỆC ỨNG DỤNG LÝ THUYẾT QUÁ TRÌNH DỪNG ĐỂ XỬ LÝ CÁC TÍN HIỆU SỐ

Phan Đăng Cầu

Viện Tin học - Viện KHVN

MỞ ĐẦU

Một số tác giả (thí dụ [3] và [6]) cho rằng nhiễu trắng theo nghĩa rộng là ergodic. Trong bài này chúng tôi chỉ ra ví dụ chứng tỏ điều đó không đúng; chính xác hơn, trong ví dụ này hàm tương quan mẫu của nhiễu trắng hội tụ, nhưng giới hạn không phải là hàm tương quan lý thuyết như tính ergodic đòi hỏi. Chúng tôi nêu một ví dụ khác trong đó giới hạn của hàm tương quan mẫu khác biệt rất lớn so với hàm tương quan lý thuyết. Điều này chứng tỏ rằng lớp tín hiệu mà hàm tương quan mẫu hội tụ rộng hơn rất nhiều so với lớp quá trình dừng, ergodic. Chúng tôi định nghĩa lớp tín hiệu này là tựa dừng và khảo sát một vài tính chất đầu tiên của nó. Theo chúng tôi (và một vài nhà địa vật lý ủng hộ ý kiến này) tín hiệu phản xạ địa chấn chẳng hạn, là tựa dừng, mặc dầu nói chung không dừng. (Xem [4] và [5]).

I - TÍN HIỆU TỰA DỪNG

Ta biết rằng nếu quá trình x_n là dừng, ergodic thì

$$\lim_{N\to\infty} \overline{x} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n = m_x = Ex_n \quad \text{với xác suất 1 (x.s.1)}$$

$$\lim_{N\to\infty} r_x(s) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_{n+s}x_n = \varphi_x(s) = Ex_{n+s}x_n \quad (x.s.1)$$

Ta tạm gọi lớp quá trình dừng, ergodic là E, và lớp quá trình mà

$$\lim_{N\to\infty} \overline{x} = A_x \quad (x.s.1)$$

$$\lim_{N\to\infty} r_x(s) = g_x(s) \quad (x.s.1)$$

là T. Rõ ràng $E \subset T$; trong thực hành ta cũng chỉ kiểm tra được tính chất hội tụ của $\overline{x}$, $r_x(s)$, do đó chỉ có thể kết luận là tín hiệu $x_n \in T$ hay không. Thí dụ theo các nhà địa vật lý, do tính không đồng đều của các lớp địa tầng, nên giả thiết cho rằng tín hiệu phản xạ địa chấn $x_n \in T$ thì phù hợp hơn với thực tế. Sau đây ta sẽ xem xét xem E và T khác biệt nhau đến mức nào, và điều gì xảy ra nếu x_n chỉ thuộc T, nhưng ta lại giả thiết sai lầm là $x_n \in E$ và áp dụng lý thuyết quá trình dừng, ergodic.

Thí dụ 1: Xét trường xác suất cơ sở $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, trong đó $\Omega = [0,1]$ và P là độ đo Lebesgue trên Ω.

Ta định nghĩa

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{(N+1)^2\omega} & 0 < \omega \le 1 \\ 0 & \omega = 0 \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

khi đó

$$\lim_{N\to\infty} \overline{x} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{(n+1)^2\omega} = 0$$

$$\lim_{N\to\infty} \vartheta^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{(n+1)^4\omega^2} = 0$$

Tuy nhiên

$$Ex_n = \int_0^1 \frac{1}{(n+1)^2\omega} dP = \infty$$

$$Ex_n^2 = \int_0^1 \frac{1}{(n+1)^4\omega^2} dP = \infty$$

Ta thấy rằng $x_n \in T$, kỳ vọng và phương sai mẫu hội tụ đến 0 khắp nơi, trong khi đó x_n không tồn tại kỳ vọng và phương sai tại bất kỳ giá trị n nào; nghĩa là x_n thậm chí không phải là quá trình bậc hai.

Thí dụ 2: Trong nhiều tài liệu nhiều tác giả cho rằng nhiễu trắng theo nghĩa rộng là dừng, ergodic. Qua ví dụ sau chúng tôi muốn chỉ ra rằng điều này không đúng.

Cho $x_n = \cos n w$, $n = 1, 2, \dots$ trong đó w là biến ngẫu nhiên có phân bố đều trên đoạn $[0, 2\pi]$. Khi đó có thể chứng minh được

$$Ex_n = 0\,, \quad Ex_n x_m = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = m \\ 0 & n \ne m \end{cases}$$

nghĩa là x_n là nhiễu trắng.

Tuy nhiên có thể thấy

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \cos n w = \frac{\sin \frac{2N+1}{2} w}{2N \sin \frac{w}{2}} - \frac{1}{2N} \to 0,\ N \to \infty \quad (x.s.1)$$

$$\vartheta^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_n^2 = \frac{\sin(2N+1)w}{4N \sin w} - \frac{1}{4N} + \frac{1}{2} \to \frac{1}{2},\ N \to \infty \quad (x.s.1)$$

$$r_x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_{n+k} x_n = \frac{1}{2} \cos kw + \frac{[\sin(2N+1)w - \sin w]}{2N \sin w} - \frac{\sin kw \sin(N+1) \sin Nw}{N \sin w} \to \frac{1}{2} \cos kw,\ N \to \infty \quad (x.s.1)$$

Từ đây ta thấy mặc dầu trung bình mẫu và phương sai mẫu hội tụ đến trung bình và phương sai, nhưng với $s > 1$ hàm tương quan mẫu không hội tụ đến hàm tương quan. Ta thấy nhiễu trắng trên đây là một dao động điều hòa ngẫu nhiên đơn giản và là quá trình dừng, mặc dầu vậy không phải là ergodic. Rõ ràng tính chất ergodic là quá hẹp.

Định nghĩa 1: Ta gọi quá trình x_n là tựa dừng, nếu kỳ vọng và tương quan mẫu hội tụ, nghĩa là

$$\lim_{N\to\infty} \overline{x} = A_x \qquad (x.s.1)$$

$$\lim_{N\to\infty} r_x(s) = g_x(s) \qquad (x.s.1)$$

Ta gọi A_x là trung bình theo thời gian, và $g_x(s)$ là hàm tựa tương quan của quá trình x_n.

Định nghĩa 2: Quá trình u_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ được gọi là tựa nhiễu trắng với công suất $\sigma^2 > 0$ nếu

$$A_u = 0$$

$$g_x(u) = \begin{cases} \sigma^2 & s = 0 \\ 0 & s \neq 0 \end{cases}$$

Tính chất:

Hàm tựa tương quan $g_x(s)$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$g_x(s) = \int_{-0.5}^{0.5} e^{i2\pi\lambda s} dF(\lambda)$$

trong đó $F(\lambda)$ là hàm phân bố phổ với xác suất 1, nghĩa là $F(\lambda)$ với x.s.1 bị chặn, không âm và liên tục trái.

Chứng minh: Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_M$ là các số thực bất kỳ, khi đó ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{s,l=1}^{M} g_x(s-l)a_s a_l &= \sum_{s,l=1}^{M} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} x_{n+s}x_{n+l}a_s a_l \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{s,l=1}^{M} x_{n+s}x_{n+l}a_s a_l \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{s=1}^{M} x_{n+s}a_s \right)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Như vậy $g_x(s)$ là xác định dương với x.s.1. Theo định lý Bochner–Khinchin (xem [2], tr. 41) ta có

$$g_x(s) = \int_{-0.5}^{0.5} e^{i2\pi\lambda s} dF(\lambda)$$

Ta gọi $F(\lambda)$ là hàm phân bố phổ trung bình của quá trình x_n, nếu $F(\lambda)$ liên tục tuyệt đối, khi đó ta gọi $f(\lambda) = F'(\lambda)$ là hàm mật độ phân bố phổ trung bình của quá trình.

II – BIỂU DIỄN TRUNG BÌNH TRƯỢT CỦA TÍN HIỆU TỰA DỪNG

Định lý: Để một quá trình tựa dừng x_n, $n = 0, 1, 2, \dots$, biểu diễn được dưới dạng

$$x_n = \sum_{s=0}^{n} \beta_s u_{n-s} \tag{1}$$

trong đó u_n là tựa nhiễu trắng; $\beta_0, \beta_1, \dots$ là các biến ngẫu nhiên sao cho

$$\sum_{s=0}^{\infty} \beta_s^2 < \infty \qquad x.s.1$$

điều kiện cần và đủ là hàm phân bố phổ trung bình liên tục tuyệt đối với x.s.1 và hàm mật độ phân bố phổ trung bình thỏa mãn điều kiện

$$\int_{-0.5}^{0.5} \ln f(\lambda) d\lambda > -\infty \tag{2}$$

Chứng minh:

a. Điều kiện cần: Giả sử x_n có biểu diễn (1), ta viết

$$x_n = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k u_{n-k} \quad \text{với } u_n = 0 \text{ khi } n <$$

Như vậy

$$x_{n+s} = \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l u_{n+s-l}$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_{n+s} x_n = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0} \beta_l \beta_s \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_{n+s-l} u_{n-k}$$

Từ đây ta có

$$g_x(s) = \sigma^2 \sum_{l=0}^{\infty} \beta_{l+s} \beta_l$$

Trong đó

$$g_u(0) = \sigma^2 .$$

Từ đây suy ra biến đổi Fourier của $g_x(s)$ là

$$f(\lambda) = \sigma^2 \left| \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s e^{-i2\pi\lambda s} \right|^2$$

Theo tính chất của phép biến đổi Fourier

$$g_x(s) = \int_{-0,5}^{0,5} e^{i2\pi\lambda s} f(\lambda) d\lambda$$

Như vậy theo định nghĩa $f(\lambda)$ là hàm mật độ phân bố phổ trung bình của quá trình x_n.

b. Điều kiện đủ: Giả sử hàm mật độ phân bố phổ trung bình của quá trình x_n thỏa mãn (2). Khi đó theo định lý 1 trong [2] (trang 230), $f(\lambda)$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$f(\lambda) = \sigma^2 \left| \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n e^{-i2\pi\lambda n} \right|^2 \qquad (x.s.1)$$

Các hệ số $\beta_0, \beta_1, \dots$ luôn có thể chọn sao cho

$$\beta_0 = 1, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s z^s \neq 0 \qquad |z| \leq 1 \tag{3}$$

Theo định nghĩa của hàm mật độ phân bố phổ trung bình ta có

$$g_x(s) = \int_{-0,5}^{0,5} e^{i2\pi\lambda} f(\lambda) d\lambda = \sigma^2 \int_{-0,5}^{0,5} e^{i2\pi\lambda} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n e{-i2\pi n\lambda} \right|^2 d\lambda$$

$$= \sigma^2 \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{n+s} \beta_n$$

Do (3) ta có

$$A(z) = 1 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n}$$

Đặt

$$u_n = \sum_{s=0}^{n} \alpha_s x_{n-s} = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s x_{n-s}, \quad x_n = 0 \text{nếu} n < 0$$

Khi đó

$$x_n = \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s u_{n-s} \qquad u_n = 0 \text{nếu} n < 0 .$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh u_n là tựa nhiễu trắng.

Ta có

$$g_x(s) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n+0}^{N-1} u_{n+s} u_n = \sum_{=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \alpha \alpha_k \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_{n+s-} x_{n-k}$$

$$= \sum_{=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \alpha \alpha_k g_x(s - r + k) = \sigma^2 \sum_{=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \alpha \alpha_k \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{n+s-} \beta_{n-k}$$

$$= \sigma^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{=0}^{\infty} \alpha \beta_{n+s-} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \beta_{n-k} = \sigma^2 \sum_{n=0}^{\infty} d_{n+s} d_n = \begin{cases} \sigma^2 & s = 0 \\ 0 & s \neq 0 \end{cases}$$

Trong đó

$$D(z) = 1 + d_1 z + d_2 z^2 + \dots = A(z) B(z) = 1$$

Vậy định lý đã được chứng minh.

Nhận ngày 15-4-1991

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Anderson T. W., Statistical Analisis of Time series, (1972), John Wiley and Sons.

2. Gihman I. I., Szkorohod, Bevezetés a sztochasztikus folyamatok elmeletébe, (1975), Müszaki könyvkiadó Budapest.

3. Meskó Attila, Digital filtering applications in geophysical exploration for oil, (1984), Akadémiai kiadó Budapest.

4. Phan Đăng Cầu, Bài toán ngược của phương trình nhân chập hai chuỗi thời gian và ứng dụng, Tạp chí Khoa học Tính toán và Điều khiển, Tập II, số 2, (1986).

5. Phan Đăng Cầu, On predictive deconvolution of a seismic signal, Pub. Math., Tomus 37, Fasc 1–2, Debrecen, Hungari, (1990).

6. Robinson E. A., Predictive deconvolution of time series with application to seismic exploration, Geophysics, Vol. XXXII, No. 3, (1967).

7. Wiener, Norbert, Selected papers of Norbert Wiener including generalized harmonic analysis and Tauberian theorem, (1964). Cambridge, Mass. M. I. T. Press.

ABSTRACT

SOME REMARKS ON THE APPLICATIONS OF THE THEORY OF STATIONARY PROCESSES IN PROCESSING DIGITAL SIGNALS

In this paper, by giving two examples, we would like to show that in some cases, it is reasonable to consider the sample correlation as a notion independent of the correlation function. We introduce the notion of a long-run stationary process and give some properties.

THUẬT TOÁN SYSTOLIC CHO CÁC PHÉP TOÁN CƠ SỞ DỮ LIỆU QUAN HỆ

(Tiếp theo trang 8)

ABSTRACT

THE SYSTOLIC ALGORITHMS FOR RELATIONAL DATABASE OPERATIONS

In this paper we present some systolic algorithms for performing relational database operations, including cartesian product, join, and sorting. They operate in a parallel and pipelined fashion. Their time complexity is linear in terms of the number of tuples involved. Because of the regularity of their structures, they are most suitable for VLSI implementation.