

Hệ thống điều khiển tối ưu bình phương với ảnh hưởng của thời gian tính

Chu Văn Hỷ
 Viện Tin Học
 Viện Khoa Học Việt Nam

I. Đặt vấn đề:

Thời gian tính ở đây - ký hiệu bằng Δ - chỉ khoảng thời gian cần thiết để đo các đại lượng quan sát, biến đổi ra tín hiệu số, tính đại lượng điều khiển, chuyển thành tín hiệu tương tự tác động đối tượng điều khiển. Cho đến nay, trong phân tích và tổng hợp hệ thống điều khiển số ta bỏ qua thời gian tính Δ , dựa vào giả thiết Δ rất nhỏ so với chu kỳ cắt mẫu T . Ta có thể giảm thời gian tính, ví dụ bằng cách sử dụng thêm bộ vi xử lý chuyển để đo và xử lý số liệu, áp dụng các thuật toán đảm bảo thời gian thực Song, là cần thiết xét tới ảnh hưởng của Δ , nhất là trong các hệ thống biến đổi nhanh có T rất nhỏ. Vấn đề này được đặt ra từ lâu và gần đây đã có một số công trình đạt được một số kết quả có ý nghĩa, như [1], [2] Bài này góp phần phân tích ảnh hưởng của thời gian tính trong hệ thống điều khiển số và trình bày một cách giải bài toán điều chỉnh tối ưu theo chuẩn bình phương cực tiểu.

II. Phương trình hệ thống

Xét hệ thống tuyến tính dừng

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \quad x \in R^n, \quad u \in R^r, \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t); \quad y \in R^m. \quad (2)$$

Bài toán đặt ra là tìm điều kiện tối ưu $u(kT)$ để đưa hệ thống từ trạng thái ban đầu $x(0)$ trở lại gốc tọa độ sao cho tối thiểu hóa hàm mục tiêu

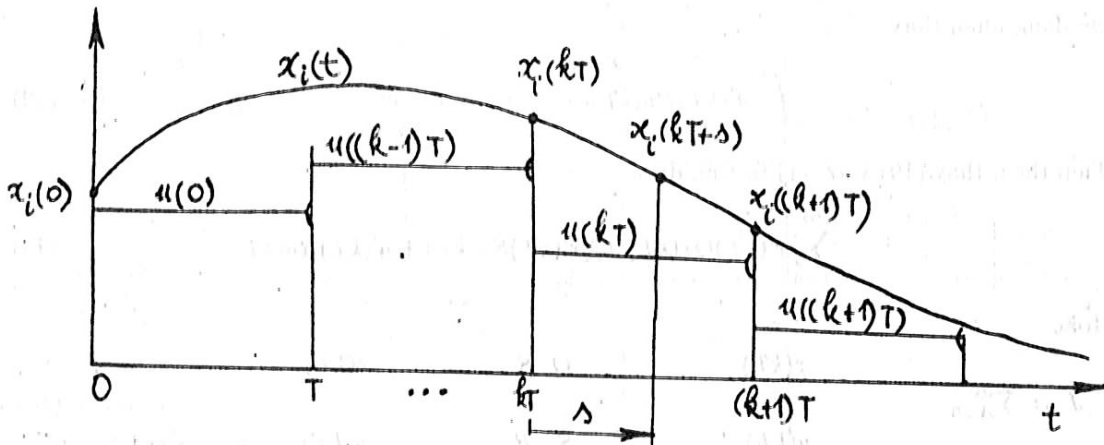
$$J = \int_0^{\infty} (x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t))dt, \quad (3)$$

(Dấu " ' " là ký hiệu chuyển vị)

Trong đó

$$u(t) = u(kT) \dots kT + \Delta \leq t < (k+1)T + \Delta. \quad (4)$$

Cho trường hợp lí tưởng hóa: $\Delta = 0$, điều khiển $u(t)$ có biến thiên như hình 1.



Hình 1

·Hệ vi phân tuyến tính với các hệ số hằng (1) có nghiệm

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \quad (5)$$

Cho $t_0 = kT$, $t = (k+1)T$, với điều khiển không thay đổi trong suốt chu kỳ cắt mẫu, ta có phương trình trạng thái rời rạc quen biết

$$x((k+1)T) = F(T)x(kT) + G(T)u(kT) \quad (6)$$

Trong đó

$$F(\tau) = e^{A\tau} \quad (7)$$

$$G(\tau) = \int_0^\tau e^{A\nu}Bd\nu = A^{-1}(e^{A\tau} - I)B \quad (8)$$

Phương trình đầu ra rời rạc là

$$y(kT) = Cx(kT) \quad (9)$$

Theo (5) ta có thể biểu diễn trạng thái $x(kT+s)$, cho $0 \leq s < T, k = 0, 1, \dots$

$$x(kT+s) = e^{As}x(kT) + \int_0^s e^{A(s-v)}Bu(v)dv \quad (10)$$

Ta viết hàm mục tiêu (3) dưới dạng

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^T x'(kT+s)Qx(kT+s)ds + \int_0^T u'(kT)Ru(kT)ds \quad (11)$$

Dễ dàng nhận thấy

$$\int_0^T u'(kT)Ru(kT)ds = u'(kT)RTu(kT) \quad (12)$$

Tiếp theo, thay (10) vào (11) ta tính được

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} x'(kT)\hat{Q}x(kT) + 2x'(kT)\hat{S}u(kT) + u'(kT)\hat{R}u(kT) \quad (13)$$

Hoặc

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} x(kT) \\ u(kT) \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \hat{Q} & \hat{S} \\ \hat{S}' & \hat{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(kT) \\ u(kT) \end{pmatrix} \quad (14)$$

Trong đó

$$\hat{Q} = \int_0^T e^{A's}Qe^{As}ds \quad (15)$$

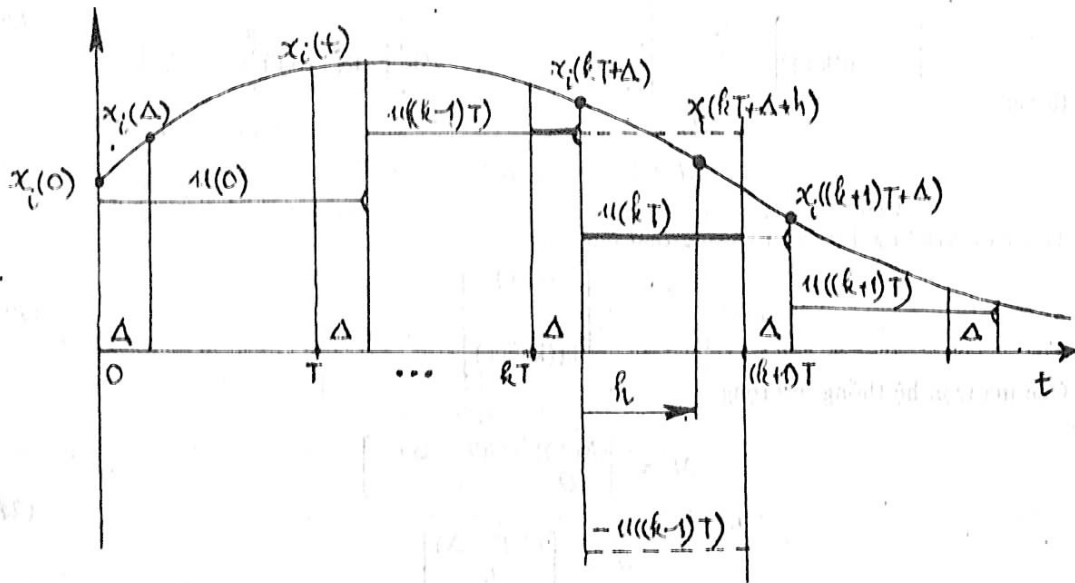
$$\hat{S} = \int_0^T e^{A's}Q\left(\int_0^s e^{A(s-v)}Bdv\right)Bds \quad (16)$$

$$\hat{R} = RT + B'\left[\int_0^T \left(\int_0^s e^{A's}dv\right)Q\left(\int_0^s e^{A(s-v)}dv\right)ds\right]B \quad (17)$$

Ta thấy: J trong (3) có dạng bình phương thông thường, nhưng trong (13) có thêm thành phần chéo $2x'(kT)\hat{S}u(kT)$. Tuy nhiên trong nhiều trường hợp, để đơn giản người ta chỉ xét hàm mục tiêu đơn giản có dạng

$$J_1 = \sum_{k=0}^{\infty} x'(kT)Q_1x(kT) + u'(kT)R_1u(kT) \quad (18)$$

Bởi lẽ từ lời giải bài toán với hàm mục tiêu (18) ta luôn suy ra được lời giải cho bài toán với hàm mục tiêu (13).



Hình 2

Điều khiển $u(t)$ trong thực tế được biểu diễn trên hình 2
 Trong mỗi chu kỳ cắt mẫu $u(t)$ không còn là hằng số nữa, mà thay đổi bước nhảy ở thời điểm $(kT+\Delta)$. Để tính tích phân trong (5), cho $kT+\Delta \leq t \leq (k+1)T$, ta thêm vào và bớt đi $u((k-1)T)$ (các đường chấm trên hình vẽ)

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A(k+1)T-\tau} Bu((k-1)T)d\tau + \int_{kT}^{kT+\Delta} e^{A(k+1)T-\tau} BOd\tau$$

$$+ \int_{kT+\Delta}^{(k+1)T} e^{A(k+1)T-\tau} B[-u((k-1)T) + u(kT)] d\tau$$

Phương trình trạng thái rời rạc của hệ thống là

$$x((k+1)T) = F(T)x(kT) + (G(T) - G(T-\Delta))u((k-1)T) + G(T-\Delta)u(kT) \quad (19)$$

Trong đó $F(T)$, $G(T)$, $G(T-\Delta)$ được tính theo (7), (8). Để đưa về dạng chuẩn, ta biến đổi như sau

$$\begin{bmatrix} x((k+1)T) \\ u(kT) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(T), G(T)-G(T-\Delta) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(kT) \\ u((k-1)T) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G(T-\Delta) \\ I_r \end{bmatrix} u(kT) \quad (20)$$

Hoặc:

$$z((k+1)T) = Mz(kT) + Hu(kT) \quad (21)$$

Trong đó $x(kT)$ gọi là các tơ trạng thái mở rộng

$$x(kT) = \begin{bmatrix} x(kT) \\ u((k-1)T) \end{bmatrix} \quad (22)$$

Các ma trận hệ thống mở rộng

$$M = \begin{bmatrix} F(T) & G(T-\Delta) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$H = \begin{bmatrix} G(T-\Delta) \\ I_r \end{bmatrix}$$

Phương trình đầu rời rạc sẽ là

$$y(kT) = [C, 0]z(kT) \quad (24)$$

Ta thấy: thời gian tính hàm biến dạng mô hình rời rạc củ hệ thống. Tuy vẫn có thể đưa về dạng chuẩn, nhưng phải xét hệ $(n+r)$ chiều, trong khi hệ lý tưởng hóa chỉ có n chiều. Từ các tính chất, như tính điều khiển được, quan sát được... của (6), (9) không thể suy diễn trực tiếp cho hệ (21), (24).

Hàm mục tiêu (3) có thể viết dưới dạng

$$J = J_{\Delta} + \tilde{J} \quad (25)$$

Trong đó: thành phần tính trên khoảng $(0, \Delta)$:

$$J_{\Delta} = \int_0^{\Delta} (x'(t)Qx(t) + u'(0)Ru(0))dt \quad (26)$$

$$= \begin{bmatrix} x(0) \\ u(0) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \hat{Q}_\Delta & \hat{S}_\Delta \\ \hat{S}'_\Delta & \hat{R}_\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

Các ma trận \hat{Q}_Δ , \hat{S}_Δ , \hat{R}_Δ được tính theo công thức tương tự (15), (16), (17) nhưng với tích phân từ 0 đến Δ . Thành phần tính trên khoảng (Δ, ∞) có thể biểu diễn

$$\tilde{J} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^T (x'(kT + \Delta + h)Qx(kT + \Delta + h)dh + \int_0^T u'(kT)Ru(kT)dh) \quad (27)$$

Từ (5) ta có

$$x(kT + \Delta + h) = e^{Ah}x(kT + \Delta) + \int_0^h e^{Av}Bu(v)dv$$

Thay vào (27) ta tính được

$$\tilde{J} = \sum_{k=0}^{\infty} x'(kT + \Delta)\hat{Q}x(kT + \Delta) + 2x'(kT + \Delta)\hat{S}u(kT) + u'(kT)\hat{R}u(kT) \quad (28)$$

Hoặc

$$\tilde{J} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} x(kT + \Delta) \\ u(kT) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \hat{Q} & \hat{S} \\ \hat{S}' & \hat{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(kT + \Delta) \\ u(kT) \end{bmatrix} \quad (29)$$

Biểu diễn $x(kT + \Delta)$ theo $x(kT)$, $u(kT)$ ở thời điểm cắt mẫu:

$$x(kT + \Delta) = F(\Delta)x(kT) + G(\Delta)u(kT) \quad (30)$$

Sau khi biến đổi ta được

$$\tilde{J} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} x(kT) \\ u((k-1)T) \\ u(kT) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} F'(\Delta), 0 \\ G'(\Delta), 0 \\ 0, I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{Q} & \hat{S} \\ \hat{S}' & \hat{R} \\ 0 & 0 & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(\Delta), G(\Delta), 0 \\ 0, 0, I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(kT) \\ u((k-1)T) \\ u(kT) \end{bmatrix}$$

Hoặc

$$\tilde{J} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} z(kT) \\ u(kT) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \bar{Q} & \bar{S} \\ \bar{S}' & \bar{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(kT) \\ u(kT) \end{bmatrix} \quad (31)$$

Trong đó

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} F'(\Delta), 0 \\ G'(\Delta), 0 \end{bmatrix} \hat{Q} \begin{bmatrix} F(\Delta), G(\Delta) \\ 0, 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

and

$$\bar{S} = [F(\Delta), G(\Delta)]'\hat{S}; \bar{R} = \hat{R} \quad (33)$$

Ta thấy thành phần \tilde{J} có dạng chuẩn của hàm mục tiêu bình phương.

3. Cách giải bài toán Giải bài toán tối ưu hệ thống (21) với hàm mục tiêu (25) gặp khó khăn là: J không còn là dạng chuẩn do có thêm thành phần J_Δ . Ta có thể giải gần đúng bằng cách bỏ qua J_Δ và lấy $J \approx \tilde{J}$, với giả thiết $J_\Delta \ll \tilde{J}$. Song tính toán vẫn phức tạp, do véc tơ trạng thái mở rộng $z(kT)$ có số chiều tăng lên, nhất là trong hệ nhiều chiều.

Lời giải chính xác, đơn giản dựa vào nhận xét sau: theo nguyên lý tối ưu Bellman, nếu $u^*(k)$ là điều khiển tối ưu cho $t \in (0, \infty)$ thì cũng là tối ưu cho $t \in (0, \Delta)$ và bởi vì cho $t \in (0, \Delta)$ điều khiển $u(t) = u(0)$ như cho $t \in (\Delta, T + \Delta)$, nên ta đi đến giải bài toán tương đương: tìm điều khiển tối ưu cho hệ thống (1) với hàm mục tiêu \tilde{J} cho $t \in (\Delta, \infty)$.

Rời rạc hóa phương trình trạng thái (1) với thời gian bắt đầu Δ , chu kỳ cắt mẫu T ta được

$$x((k+1)T + \Delta) = F(T)x(kT + \Delta) + G(T)u(kT). \quad (34)$$

Bài toán điều chỉnh tối ưu hệ thống (34) với hàm mục tiêu (28) có lời giải

$$u(kT) = -Kx(kT + \Delta). \quad (35)$$

Trong đó

$$K = (G'(T)PG(T) + \hat{R})^{-1}(G'(T)PF(T) + \hat{S}) \quad (36)$$

P là nghiệm xác định riêng của phương trình Riccati

$$P = F'(T)PF(T) + \hat{Q} - (F'(T)PG(T) + \hat{S}(G'(T)PG(T) + \hat{R})^{-1}(G'(T)PF(T) + \hat{S}')) \quad (37)$$

Thay $x(kT + \Delta)$ theo (30) vào (35) ta nhận được kết quả

$$u(kT) = -\hat{R}F(\Delta)x(kT) - KG(\Delta)u((k-1)T). \quad (38)$$

Hoặc

$$u(kT) = -[KF(\Delta), KG(\Delta)]x(kT). \quad (39)$$

Cho $\Delta = 0$, ta có $F(\Delta) = I$, $G(\Delta) = 0$, điều khiển tối ưu dạng (38) trở về dạng quen biết.

Bây giờ ta tính giá trị tối thiểu của hàm mục tiêu

$$J^* = J_\Delta + \tilde{J}^*, \quad (40)$$

\tilde{J}^* là thành phần tính cho khoảng $t \in (\Delta, \infty)$

$$J = x'(\Delta)Px(\Delta). \quad (41)$$

Trong đó

$$x(\Delta) = F(\Delta)x(0) + G(\Delta)u(0), \quad (42)$$

J_{Δ} là thành phần tính theo khoảng $t \in (0, \Delta)$, đã được xét ở trên. Thay (26), (41), (42) vào (40), sau khi biến đổi ta được

$$J^* = \begin{bmatrix} x(0) \\ u(0) \end{bmatrix}' N(\Delta) \begin{bmatrix} x(0) \\ u(0) \end{bmatrix} \quad (43)$$

Trong đó

$$N(\Delta) = \begin{bmatrix} \hat{Q}_{\Delta} & \hat{S}_{\Delta} \\ \hat{S}'_{\Delta} & \hat{R}_{\Delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F'(\Delta) \\ G'(\Delta) \end{bmatrix} P[F(\Delta), G(\Delta)] \quad (44)$$

Dễ dàng nhìn thấy: khi $\Delta = 0$, thì $\hat{Q}_{\Delta} = 0$, $\hat{S}_{\Delta} = 0$, $\hat{R}_{\Delta} = 0$, $F(\Delta) = I$, $G(\Delta) = 0$, ta có công thức đã biết

$$J_{op} = x'(0)Px(0). \quad (45)$$

Lưu ý tới các ma trận trọng, ta thấy: điều kiện đủ để điều khiển (35) tối ưu là

$$\begin{bmatrix} \hat{Q} & \hat{S} \\ \hat{S}' & \hat{R} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \hat{R} > 0 \quad (46)$$

Cho các hệ thống điều khiển số, người thiết kế cần chọn trực tiếp $\hat{Q}, \hat{S}, \hat{R}$ để hệ thống đạt được tính chất động học mong muốn. Việc xét các ma trận Q, R và tính toán gián tiếp theo (15), (16), (17) là không cần thiết.

4. Chọn các ma trận trọng

Một trong những khó khăn khi áp dụng chuẩn bình phương cực tiểu là việc chọn các ma trận trọng. Một số phương pháp chọn cổ điển đã được nêu trong [3]. Hiện nay vấn đề cấu trúc nghiệm cho bài toán tối ưu nói chung là việc chọn các ma trận trọng để các phương trình đặc trưng hệ kín có các nghiệm xác định nói riêng, đảm bảo hệ thống có tính động học yêu cầu đang được quan tâm [4], [5], ...

Ở đây không thể giải bài toán phân bố nghiệm trực tiếp theo mô hình hệ thống (21), bởi vì hàm mục tiêu (25) không có dạng chuẩn. Biết rằng thành phần $x(kT)$ của $z(kT)$ trong (21) và $x(kT + \Delta)$ trong (34) đều là trạng thái rời rạc hóa từ trạng thái liên tục $x(t)$, chỉ khác nhau thời điểm ban đầu. Nên suy ra: trong $n + r$ nghiệm của phương trình đặc trưng hệ kín (21), (38) có n là nghiệm của phương trình đặc trưng hệ kín (34), (35) và r nghiệm còn lại bằng 0. Suy diễn trên phù hợp với kết luận đã được chứng minh bằng tính toán trong [1]. Như vậy đi đến giải bài toán tương đương: điều chỉnh tối ưu hệ thống (34) với hàm mục tiêu (28) và cấu trúc nghiệm cho trước. Ví dụ trong [5] các ma trận trọng $\hat{Q}, \hat{S}, \hat{R}$ được chọn để hệ thống tối ưu có độ dự trữ ổn định cho trước hoặc đường quá độ $y_i(t)$ có hệ số tắt dần mong muốn.

5. Kết luận Thời gian tính Δ làm biến dạng mô hình rời rạc của hệ thống. Nó tác động như trễ điều khiển. Phương trình trạng thái (20) là cơ sở cho nghiên cứu ảnh hưởng của Δ đến tính chất

động học của hệ thống. Hàm mục tiêu (25) không còn dạng chuẩn nữa. Tuy nhiên, ta vẫn tìm được lời giải chính xác, tính toán khá đơn giản bằng cách chuyển về giải bài toán tối ưu tương đương. Tính tương đương của bài toán (21), (25) với bài toán (34), (28), bằng một phương pháp khác đã được chứng minh trong [1].

Tài liệu tham khảo

1. Kondo R. & Puruta K., *Sampled-data optimal control of continuous systems for quadratic criterion function taking account of delayed control action*, Int. J. Contr., **41** (1985), 1051-1060.
2. Mita T., *Optimal digital feedback control systems counting computation time of control law*, IEEE Trans. Autom. Contr. **30** (1985), 542-548.
3. de Larminat P. & Thomas Y., *Automaticque des systèmes linéaires*, Frammarion Sciences, Paris 1977.
4. Saif M., *Optimal linear regulator pole-placement by weight selection*, Int. J. Contr. **50** (1989), 399-414.
5. Chu Văn Hy, *Hệ thống điều khiển số tối ưu bình phương với các cực trong miền cho trước*, Tạp chí Khoa Học và Công Nghệ, Số 4 (1992), 25&42-47.

Abstract

Quadratic optimal digital control systems under the influence of computation time

This paper analyses the influence of computation time in digital control systems and presents a method for designing a quadratic optimal regulator. A solution of the equivalent optimal control problem is proposed. The selection of weighting matrices is also discussed.