Tạp chí Tin Học và Điều Khiển Học
Tập VIII(1992), Số 1, 23-31

Phương pháp chiếu lặp giải phương trình tích phân kỳ dị với nhân Hilbert trong không gian L_2

Lê Xuân Quảng
Viện Tin Học
Viện Khoa Học Việt Nam

I. Đặt Vấn đề

Trong không gian $L_2[0,2\pi]$ ta xét phương trình tích phân kỳ dị sau:

$$Ax(s) = a(s)x(s) + \frac{b(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\sigma)cotg\frac{\sigma - s}{2}d\sigma$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\sigma,s)x(\sigma)d\sigma = y(s), \ s \in [0,2\pi], \tag{1.1}$$

trong đó A là tóan tử ánh xạ $L_2[0,2\pi] \to L_2[0,2\pi]$, $a(s)$, $b(s)$, $y(s)$ và $h(\sigma,s)$ là các hàm phức cho trước tuần hoàn với chu kỳ 2π , còn $x(s)$ là hàm phải tìm.

Phương trình (1.1) có rất nhiều ứng dụng trong lý thuyết đàn hồi, lý thuyết khuyếch tán, cơ học chất lỏng, cơ học chất khí v.v (xem [4] [8]) và được rất nhiều nhà toán học, vật lý, cơ học quan tâm. Tuy vậy vấn đề tìm nghiệm đúng của phương trình đó chỉ mới giải quyết được trong rất hạn chế các trường hợp riêng.

Trong những năm gần đây do nhu cầu tính toán các bài toán thực tiễn các nhà toán, cơ học, vật lý và kỹ thuật đặc biệt quan tâm đến vấn đề giải gần đúng phương trình đó.

Trong công trình [5] tác giả đã đề xuất các công thức cầu phương gần đúng tích phân nhân Hilbert có thể ứng dụng giải phương trình (1.1). Công trình [3] kết hợp công trình [2] có thể giải trực tiếp phương trình (1.1) và bài toán biên hàm giải tích tương ứng bằng phương pháp chiếu nội suy Lagrange hoặc phép chiếu Fourier trong không gian Holder $H_\alpha[0,2\pi]$ $(0 < \alpha \leq 1)$.

Mở rộng hơn có công trình [6] đã áp dụng phương pháp miền con giải phương trình đó trong không gian $L_2[0, 2\pi]$. Tuy vậy các phương pháp gần đúng trên thường cho tốc độ hội tụ thấp bậc $O(E_n(x^*))$, trong đó x^* là nghiệm đúng của phương trình còn E_n là xấp xỉ tốt nhất của nghiệm bằng các đa thức lượng giác hay đa thức đại số bậc n. Với bậc hội tụ trên để đạt độ chính xác cần thiết của nghiệm phải giải hệ đại tuyến bậc khá lớn điều đó gây nhiều khó khăn trong tính toán thực tiễn.

Mục đích của bài báo này là áp dụng một sơ đồ chiếu lặp cho phương trình (1.1) nhằm nâng cao tốc độ hội tụ của phương pháp nhằm khắc phục khó khăn trên.

II. Một vài kết qủa bổ trợ.

Toán tử miền con [6], [9].

Giả sử X là không gian tuyến tính gồm các hàm $\varphi(t)$ sao cho

$$\psi(t) = \int_0^t \phi(\tau)d\tau \in C$$

là không gian các hàm liên tục còn X_n là không gian con hữu hạn chiều của nó. Ta định nghĩa toán tử miền con $\mathcal{P}_n : X_n \to X_n$ như sau:

$\mathcal{P}_n$ là toán tử chiếu đặt tương ứng mỗi hàm $\varphi(t) \in X$ với đa thức bậc $\leq n$ sau:

$$\mathcal{P}_n(\varphi;t) = \frac{d}{dt}\mathcal{L}_n(\psi;t),\ \psi(t) = \int_0^t \varphi(\tau)d\tau, \tag{2.1}$$

trong đó

$$\mathcal{L}_n(\psi;t) = \sum_{k=0}^{n} \psi(t_k)e_k(t), \tag{2.2}$$

là đa thức nội suy Lagrange của hàm $\psi(t)$ trên cơ sở của không gian X_n với tập nút t_k.

Nếu ta biểu diễn

$$\mathcal{P}_n(\varphi,t) = \sum_{k=0}^{n} a_k e_k(t), \tag{2.3}$$

thì theo [9] ta có hệ thức xác định các hệ số a_k như sau:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathcal{P}_n(\varphi_j,t)dt = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sum_{j=0}^{n} a_j e_j(t)dt = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi(t)dt, \tag{2.4}$$

Bổ đề 2.1. [6]. *Nếu $\mathcal{P}_n$ là toán tử miền con với tập nút $t_k = \frac{2k\pi}{2n+1}$, $k = \overline{-n, n}$ trên hệ hàm cơ sở e^{ikt} thì ta có các đánh giá sau:*

$$\forall \varphi \in L_2[0, 2\pi],\ \varphi^{(r)} \in H_\alpha[0, 2\pi],\ (r \geq 0,\ 0 < \alpha \leq 1)$$

$$\|\varphi - \mathcal{P}_n\varphi\|_2 \leq A_0 E_n(\varphi),\ A_0 = const., \tag{2.5}$$

$$\|\varphi - \mathcal{P}_n\varphi\|_2 \leq B_0\frac{1}{n^{r+\alpha}},\ B_0 = const.. \tag{2.6}$$

III. Áp dụng sơ đồ chiếu lặp với phép chiếu miền con cho phương trình (1.1).

Không làm giảm tính tổng quát ta xét phương trình (1.1) với $a(s) \equiv 1$ tức là ·

$$Kx(s) = x(s) + \frac{b(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\sigma)cotg\frac{\sigma - s}{2}d\sigma$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\sigma,s)x(\sigma)d\sigma = y(s),\ s \in [0, 1\pi], \tag{3.1}$$

Nếu $b(s) \in H_\alpha[0,\ 2\pi]$, $y(s)$ $(h(\sigma,s))$ là các hàm khả tích bình phương trong $L_2[0, 2\pi]$, $L_2[0,\ 2\pi; 0,\ 2\pi]$ và $\frac{Ind1 - ib(s)}{1+ib(s)} = 0$ thì theo [4], [8] phương trình (3.1) có duy nhất nghiệm trong $L_2[0,\ 2\pi]$.

Ta đưa vào toán tử T như sau:

$$Tx(s) = -\frac{b(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(s)cotg\frac{\sigma - s}{2}d\sigma$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\sigma,s)x(\sigma)d\sigma. \tag{3.2}$$

Với các giả thiết trên thì T là toán tử tuyến tính, liên tục và bị chặn trong $L_2[0,\ 2\pi]$ (xem [4], [8]) đồng thời T khả nghịch trong không gian đó.

Ta viết phương trình (3.1) dưới dạng sau:

$$x(s) = Tx(s) + y(s),\ s \in [0,\ 2\pi]. \tag{3.3}$$

Để áp dụng sơ đồ chiếu lặp cho phương trình (3.3) (xem [9], [10])trước hết ta xây dựng không gian con Xn như sau:

$$X_n = \{x_n |\ x_n(s) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=-1}^{n}(\alpha_k cosks + \beta_k sinks) = \sum_{k=1}^{n} c_k eiks,\ \alpha_k, \beta_k \in R,\ c_k \in C\} \tag{3.4}$$

Rõ ràng $Xn \subset L_2[0, 2\pi]$ và trù mật trong đó.

Ta ký hiệu Sn là toán tử miền con chiếu $L_2[0,\ 2\pi]$ lên Xn với các tập nút $s_j = \frac{2\pi j}{2n+1}$, $j = \overline{-n, n}$ theo hệ hàm cơ sở e^{iks}, $k = \overline{-n, n}$.

Theo sơ đồ chiếu lặp [10], [11] thì từ phần tử $x^{(0)}(s) \in L_2[0,\ 2\pi]$ bất kỳ các phần tử gần đúng tiếp theo $x^{(k)}(s)$ của nghiệm phương trình (3.3) được tính theo công thức:

$$x^{(k)}(s) = y(s) + T(x^{(k-1)}(s) + W^{(k)}(s)), \tag{3.5}$$

với

$$W^{(k)} = \sum_{j=-1}^{n} c_j^{(k)} e^{ijs} \in X_n, \tag{3.6}$$

thoả mãn hệ phương trình:

$$S_n(W^{(k)} - TW_{(k)}) = S_n\mathcal{E}_{(k)}, \tag{3.7}$$

trong đó

$$\mathcal{E}^{(k)} = y(s) - x^{(k-1)}(s) + Tx^{(k-1)}(s). \tag{3.8}$$

Thay (3.6) vào (3.7) và sử dụng công thức (2.4) ta thu được hệ phương trình xác định các hệ số $c_j^{(k)}$, $j = \overline{-n, n}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ trong biểu thức (3.6) như sau:

$$\sum_{j=-n}^{n} d_{r_j} c_j^{(k)} = \mathcal{E}_r^{(k)}, \; r = \overline{0, 2n}, \tag{3.9}$$

trong đó

$$d_{r_j} = \int_{s_r}^{s_{r+1}} \{1 + ib(s)Sngj + T_1 e^{r\sigma}\} ds$$

$$\mathcal{E}_r^{(k)} = \int_{s_r}^{s_{r+1}} \mathcal{E}^{(k)}(s)ds, \; T_1x(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s, \sigma)d\sigma.$$

Để sơ đồ chiếu lặp (3.5), (3.6) được thực hiện, ta cần chứng tỏ hệ phương trình (3.7) hay (3.9) có duy nhất nghiệm.

Định lý 3.1. *Nếu toán tử $K = I - T$ khả nghịch trong $L_2[0, 2\pi]$ thì sẽ tồn tại số nguyên dương n_3 để $\forall n \geq n_3$ hệ phương trình (3.7) hay (3.9) giải được duy nhất nghiệm. (I- toán tử đồng nhất trong $L_2[0, 2\pi]$).*

Chứng minh.

Ta đặt tương ứng mỗi hàm $x(s) \in L_2[0, 2\pi]$ với tích phân

$$\theta(z) = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{x(\sigma)}{1 - ze^{i\sigma}} d\sigma, \; z \notin \gamma, \tag{3.10}$$

trong đó γ là vòng tròn đơn vị trong mặt phẳng phức có tâm trùng gốc tọa độ.

Nếu đặt $x^{\pm}(s) = \theta^{\pm}(t)$, $t = e^{is} \in \gamma$, ($\theta^+(\theta^-)$ là giá trị biên trên γ của hàm $\theta(z)$ từ phía trong (ngoài)) và đặt

$$(Jx)(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\sigma) cotg\frac{\sigma - s}{2} d\sigma,$$

$$(J_0x)(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\sigma)d\sigma,$$

thì theo công thức Xô khôxiki [4], [8] ta có các đẳng thức sau:

$$x(s) = x^+(s) - x^-(s)$$

$$x^+(s) + x^-(s) = (J_0x)(s) - i(Jx)(s), \tag{3.11}$$

Dựa vào công thức (3.11) ta viết toán tử K dưới dạng sau:

$$(Kx)(s) = (f.B)x(s) = y(s), \ (x, y \in L_2[0, 2\pi]), \tag{3.12}$$

Toán tử K, $B: L_2[0,2\pi] \to L_2[0,2\pi]$ trong đó

$$(Bx)(s) = \psi^-(s)x^+(s) - \psi^+(s)x^-(s) + J_0(\overline{h}x(s)),$$

$$\overline{h} = \overline{h}(s,\sigma), \psi(s) = \psi^+(s) - \psi^-(s),$$

$$\psi^{\pm}(s) = exp\theta^{\pm}, \ 2\theta^{\pm} = \pm g - iJg + J_0 g,$$

$$\theta(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{g(\sigma)}{1 - ze_{i\sigma}} d\sigma, \ g(s) = ln\frac{1 - ib(s)}{1 + ib(s)},$$

$$f(s) = \frac{1 + ib(s)}{\psi^-(s)}, \ \overline{h}(\sigma, s) = \psi^-(s)\frac{h(s,\sigma) - ib(s)}{1 + ib(s)}.$$

Nếu $b(s) \in H_\alpha[0,2\pi]$, $(0 < \alpha \le 1)$ thì theo [4] ta có $f(s) \neq 0$ trên $[0, 2\pi]$. Do vậy toán tử K và B đồng thời khả nghịch trong $L_2[0,2\pi]$ và ta có các đánh giá sau:

$$K^{-1}, \ B^{-1}: \ L_2[0,2\pi] \to L_2[0,2\pi],$$

$$\|f\|_\infty \|K\| \le \|B\| \le \|f^-\|_\infty \|K^-\|,$$

trong đó $f^-1(s) = \frac{\psi^-(s)}{1+ib(s)}$, $\|\varphi\|_\infty = \sup_{s\in[0,2\pi]} |\varphi(s)|$.

Bây giờ ta đưa vào toán tử B_n như sau:

$$B_n x_n = S_n B x_n = S_n\{\psi^- x_n^+ - \psi^+ x_n^- + J_0(\overline{h}, x_n)\}, \ x_n \in X_n$$

trong đó $x_n^{\pm} = \pm x_n - iJ(x_n, s) + J_0(x_n)$.

Chúng ta sẽ chỉ ra rằng với n đủ lớn thì B_n khả nghịch trong X_n và $\|B_n^{-1}\| = O(1)$, B_n^{-1} : $X_n \to X_n$.

Ta ký hiệu J_n là ánh xạ $Xn \to Xn$ như sau:

$$J_n x_n = \psi_n^- x_n^+ - \psi_n^+ x_n^-, 2\psi_n^{\pm} = \psi_n - iJ(\psi_n, s) + J_0\psi_n, \tag{3.14}$$

trong đó $\psi_n \in X_n$ là đa thức xấp xỉ tốt nhất của hàm $\psi(s)$ theo cơ sở $e^{iks}, k = -\overline{n,n}$ theo chuẩn trong C.

Với mọi $xn \in Xn$ theo công thức (3.13), (3.14) ta có:

$$\|Bx_n - B_n x_n\|_2 = \|(I - S_n)(Jx_n - J_n x_n) + J_0(\overline{h}, x_n) - S_n J_0(\overline{h}, x_n)\|_2$$

$$\|I - S_n\|\{\|\psi^+ - \psi^+\|_\infty + \|\psi^- - \psi^-\|_\infty + E_n^{(s)}(\overline{h}_2)\|x_n\|_2, \tag{3.15}$$

trong đó $E_n(s)(\overline{h})_2$ là xấp xỉ bình phương tốt nhất theo biến s (đều theo σ) của hàm $\overline{h}(\sigma,s)$ bằng các đa thức dạng (3.4). Từ công thức (3.15) ta có:

$$\|B - B_n\|_{X_n \to X} \leq \|I - S_n\|_2\{\|\psi^+ - \psi^+\|_\infty + \|\psi^- \psi_n^-\|_\infty + E_n^s(h)_2\}$$

Vì $E_n^{(s)} \to 0$ khi $n \to \infty$, $\|I - S_n\| \leq 2\|S_n\| \to 2$ khi $n \to \infty$ và

$$\{\|\psi^+ - \psi^+\|_\infty + \|\psi^- \psi_n^-\|_\infty = 2\|\psi - \psi_n\|_\infty + \|J(\psi - \psi_n)\|_\infty = \alpha_n \to 0.$$

Khi $n \to \infty$ thì

$$E_n^{(s)} \to 0,\ \|I - S_n\| \leq 2\|S_n\| \to 2,\ \|\psi^+ - \psi_n^+\|_\infty + \|\psi^- - \psi_n^-\|_\infty$$

$$= 2\|\psi - \psi_n\|_\infty + \|J(\psi - \psi_n)\|_\infty = \alpha_n \to 0$$

Do vậy $\beta_n = \|B - B_n\| \to 0$ khi $n \to \infty$, hay $\exists n_0$, $\forall n \geq n_0$ để $q_n = \beta_n\|B_{(-1)}\| < 1$.

Từ đó suy ra $\forall n \geq n_0$, B_n khả nghịch. Ta xét thêm các toán tử bổ trợ sau:

$$\tilde{K}_n,\ F_n : X_n \to X_n,\ \forall x_n \in X_n$$

$$\tilde{K}_n x_n = S_n(f.B_n x_n) \equiv F_n B_n x_n;$$

$$F_n x_n = S_n(f x_n). \tag{3.16}$$

Ta thấy rằng phương trình $F_n x_n = S_n y$ tương đương với phương trình

$$f(\eta_k)x_n(\eta_k) = y(\eta_k),\ k = \overline{0, 2n}, \tag{3.17}$$

trong đó $s_k < \eta_k < s_{k+1}$. Do vậy nghiệm của chúng được biểu diễn theo công thức:

$$x_n(s) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{y(\eta_k)}{f(\eta_k)} e_{n,k}(s) = F_n^{-1} S_n y, \tag{3.18}$$

với $e_{n,k}$ là đa thức nội suy Lagrange theo tập nút η_k, $k = \overline{0, 2n}$. Như vậy toán tử F_n khả nghịch với mọi n và dễ dàng đánh giá được:

$$\|F_n^{-1}\| = O(1),\ \forall\, n \geq n_1, \tag{3.19}$$

Nếu lấy $n_2 = max(n_0, n_1)$ thì $\forall n \geq n_2$, $\exists \tilde{K}_n^{-1}$ ánh xạ $X_n \to X_n$ và

$$\|\tilde{K}_n^{-1}\| = O(1). \tag{3.20}$$

Nếu ký hiệu $K_n = S_n K$ ta sẽ chỉra rằng $\exists n_3$ để $\forall n \geq n_3$, K_n khả nghịch. Để làm điều đó ta chỉ cần chỉ ra rằng

$$n\forall n_3,\ \overline{q}_n = \|\tilde{K}_n^{-1}\|\|K_n - \tilde{K}_n\| < !, \tag{3.21}$$

Thực vậy ta có

$$\|K_n x_n - \tilde{K}_n x_n\| = \|S_n[fBx_n - B_n x_n]\|$$

$$\leq \|S_n\|\|f\|_\infty\|B_n - B\|\|x_n\| = \beta_n\|S_n\|\|f\|_\infty\|x_n\|, \qquad (3.22)$$

Do đó

$$\tilde{q}_n \leq \beta_n\|\tilde{K}_n^{-1}\|\|S_n\|\|f\|_\infty. \qquad (3.23)$$

Vì $\|S_n\| \to 1$, $\beta_n \to 0$ khi $n \to \infty$, $\|f\|_\infty$, $\|\tilde{K}_n^{-1}\|$ bị chặn. Do vậy sẽ $\exists n_3 \geq 0$ để $\forall n \geq n_3$ $\overline{q}_n < 1$.. Từ đó suy ra $\exists K_n^{-1}$, đồng thời ta có đánh giá

$$\|K_n^{-1}\| \leq \|\tilde{K}_n^{-1}\|(1 - \overline{q}_n^{-1} = O(1). \qquad (3.24)$$

Định lý được chứng minh.

Định lý 3.2. *Nếu $b(s) \in H_\alpha[0, 2\pi]$, $(0 < \alpha \leq 1)$, $y(s)$, $(h(\sigma, s))$ là các hàm khả tích bình phương trong $L_2[0, 2\pi]$ $(L_2[0, 2\pi]x[0, 2\pi])$ và $Ind\frac{1-ib(s)}{1+ib(s)} = 0$ thì phương trình (3.1) sẽ có nghiệm duy nhất trong $L_2[0, 2\pi]$.. Đồng thời tồn tại số nguyên dương n_4 để $\forall n \geq n_4$ sơ đồ chiếu lặp (3.5) (3.6) hội tụ và ta có đánh giá:*

$$\|\epsilon^{(k+1)}(s) \leq A(E_n(\epsilon^{(0)}(s)_2)^k, \qquad (3.25)$$

trong đ 'o $\epsilon^{(k+1)}(s) = y(s) - x^{(k)}(s) + Tx^{(k)}(s)$, với $x^{(0)}$ là xấp xỉ ban đầu bất kỳ còn T là toán tử được xác định theo công thức (3.3), A là hằng số không phụ thuộc k.

Chứng minh.

Ta viết phương trình (3.1) dưới dạng (3.4). Với giả thiết của định lý và theo [4], [6] phương trình (3.4) có duy nhất nghiệm với mọ i vế phải trong $L_2[0, 2\pi]$. Như vậy theo định lý 3.1 thì $\exists n_3 > 0$ để $n \geq n_3$, K_n khả nghịch trong X_n và

$$W^{(k)} = K_n^{-1} S_n \epsilon^{(k)}(s), \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (3.26)$$

Mặt khác ta có:

$$\epsilon^{(k+1)}(s) = y(s) - x^{(k)}(s) + Tx^{(k)}$$

$$= y(s) - (y(s) + Tx^{(k-1)}(s) + TW_n^{(k)}(s) + T(y(s) + Tx^{(k-1)}(s) + TW_n^{(k)}(s))$$

$$= T(y(s) + Tx^{(k-1)}(s) - TW_n^{(k)}(s) - x^{(k-1)} - W^{(k)}(s)$$

$$T[(\epsilon^{(k)}(s) - S_n\epsilon^{(k)}(s) + (I - KK_n^{-1}S_n\epsilon^{(k)}(s)]$$

$$= T(I - S_n)(I - KK_n^{-1}S_n)\epsilon^{(k)}(s), \qquad (3.27)$$

Do đó

$$\|\epsilon^{(k+1)}(s)\|_2 \leq \|T\|\|I - S_n\|\|I - KK_n^{-1}S_n\|\|\epsilon(s)\|.$$

Vì $||T||$, $||I + KK_n^{-1}||$, $||S_n||$ bị chặn không phụ thuộc vào K và

$$||(I - S_n)\epsilon^k(s)|| = O(E_n(\epsilon^{(k)})_2),$$

do vậy ta có

$$||\epsilon^{(k+1)}(s)||_2 \leq AE_n(\epsilon^{(k)})_2, \; A = const., \tag{3.28}$$

Theo công thức truy chứng thì

$$||\epsilon^{(k+1)}(s)||_2 \leq [AE_n(\epsilon^{(0)})]^k, \tag{3.28}$$

Vì $E_n(\epsilon^{(0)})_2 \to 0$ khi $n \to \infty$ nên $\exists n_4 > 0$ để $\forall n \geq n_4$, $AE_n(\epsilon_2^{(0)} < 1$ hay $||\epsilon^{(k+1)}||_2 \to 0$ khi $k \to \infty$ và ta có đánh giá (3.15). Định lý được chứng minh.

Định lý 3.3. *Nếu trong giả thiết của định lý 3.2 mà $b^{(r)}(s) \in WH_\alpha$, $y^{(r)}(s), (Tx^*)(s) \in WL_2$ $(r \geq 0,\ 0 < \alpha \leq 1)$, trong đó WH_α là không gian các hàm giải tích có các giá trị biên thuộc H_α, WL_2 -không gian các giá trị biên thuộc L_2 thì sẽ tồn tại số nguyên dương n_5 để $\forall n \geq n_5$ phương pháp chiếu lặp (3.5), (3.6) đối với phương trình (3.1) hội tụ, đồng thời ta có đánh giá:*

$$||x^{(k)} - x^*||_2 \leq (A_1 \frac{1}{n^{\alpha+r}})^k, \; \alpha + r > 0,$$

trong đó x^* là nghiệm chính xác của phương trình (3.1), còn $A_2 = const.$

Định lý 3.3 dễ dàngsuy ra từ bổ đề 2.1 và định lý 3.2.

Tài liệu tham khảo

1. Akhiezer N.I., The lectures on the theory of approximations Moscow-Science 1965, 408 p.
2. Gabdulxaev B.G., *Polynomial approximations of Dziadyk solution of singular integro - differential equations*, Izvestia vyschyx uchebnix zavedenii, 6(1978),p 51-62.
3. Gablukhaev B.G. & Ermolaeva L.V., A new polynomial operator and its appendix - In colection : International Conference on theory of approximability of functions. Kiev - Publ. Acad. Scien. of Ukraine, 1983,p 45.
4. Gakhov F.D., Boundary problems, 3 - publ. Moscow 1977.
5. Beloserkovski C.M. & Lifanov I.K., Digital method in singular integral equations. Moscow , Science 1985,252 p.
6. Ermolaev B., Convergence and firm of subspeed methods for singular integral equation, Colection: All - union Symposium 'Method of discrete', special problems in math. physics. Kharkov, KGU ed. 1985,p. 46-47.
7. Luchka J.A., Projection - Iterative methods of solution of differential and integral equations, Kiev, "Science" 1980.
8. Muskhelishvili N.I., Singular Integral Equations, 2^{nd} ed. M, 1962, 599 p.

9. Perecen I., About convergence of approximation method of interpolation type for normal differential equations, Acad. Sci. CSSR, Ser. Math. physics and technology, **10** (1961), p.312.

10. Le xuan quang & Tikhonenko N.J., *Projection - iterative methods of solution of two - element boundary problems with movement*, Ucrainskii Math. J. **42** (1990), p. 75-82.

11. Lê Xuân Quảng. *Giải bài toán Carleman suy rộng trên trục thực bằng phương pháp chiếu lặp trên cơ sở phép chiếu bình phương tối thiểu*, T.C Khoa học tính toán và điều khiển, Tập **IX**, số1 (1990), p. 4-11.

Abstract

Iterative - projection method to solve singular integral equations with Hilbert kernel

In this paper the iterative - projection method is used for solving the singular integral equation with the Hilbert kernel:

$$a(s)x(s) + \frac{b(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\sigma)cotg\frac{\sigma - s}{2}d\sigma$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\sigma,s)x(\sigma)d\sigma = y(s), \; s \in [0,2\pi],$$

where $a(s)$, $b(s)$, $h(s,\sigma)$ are given functions of the space $L_2[0,2\pi]$, $L_2[0,2\pi;0,2\pi]$ respectively. The method is convergent with the rate of power.