

Giải Số Bài Toán Ô Nhiễm Khí Bằng Phương Pháp Luân Hướng*

Nguyễn Công Điều
Viện Tin Học
Viện Khoa Học Việt Nam

I. Mở đầu

* Bài toán ô nhiễm khí quyển gây ra bởi những nguồn chất khí thải ngày càng được nhiều người quan tâm đến vì đây là vấn đề thời sự trong nghiên cứu bảo vệ môi trường. Công cụ toán học cũng ngày càng được sử dụng có hiệu quả trong lĩnh vực này. Mô hình toán học của bài toán đã được nhiều tác giả đề cập đến, thí dụ như trong [1]. Dưới đây chúng tôi chỉ xét bài toán lan truyền khí thải gây ra bởi một phân bố nồng độ ban đầu. Phương trình của bài toán được viết như sau:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w \frac{\partial \varphi}{\partial z} - K \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0 \quad (1)$$

với điều kiện ban đầu

$$\varphi(t, x, y, z)|_{t=0} = f(x, y, z). \quad (2)$$

Trong đó φ là nồng độ khí thải; u, v, w là các thành phần của véc tơ gió theo các trục ox, oy, oz , tương ứng. K, K_z là hệ số khuếch tán rối ngang và thẳng đứng và $f(x, y, z)$ là phân bố nồng độ ban đầu của chất khí thải. Nếu $f(x, y, z) = Q\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$, δ là hàm Dirac thì bài toán trở thành bài toán lan truyền khí thải gây ra bởi một nguồn điểm đặt tại (x_0, y_0, z_0) có cường độ Q .

Để hạn chế, ta xét bài toán trong hình hộp $\Omega = [0, a] \times [0, b] \times [0, T]$. Khi đó ta cần thêm các điều kiện biên:

$$\varphi(t, x, y, z) = 0 \quad \text{tại biên } S_1, \quad (3)$$

*Bài này viết với sự hỗ trợ của "chương trình nghiên cứu cơ bản trong lĩnh vực khoa học tự nhiên."

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{tại biên } S_2 \text{ còn lại.} \quad (4)$$

S_1 là phần biên mà tại đó $U, n < 0$, n - véc tơ pháp tuyến ngoài.

Trong trường hợp chung, bài toán (1) - (4) chưa tìm được lời giải giải tích, do đó phương pháp số đang là một trong những phương pháp hữu hiệu được sử dụng. Tuy nhiên sử dụng phương pháp số cũng gặp phải một vài khó khăn như số chiều lớn, miền tính phức tạp v.v... Chính vì thế nhu cầu cấp thiết là phải tìm những phương pháp số hữu hiệu.

G.I. Marchuc đã có những đóng góp đáng kể khi sử dụng phương pháp phân rã [1] cho bài toán ô nhiễm khí quyển với số chiều bất kỳ. Nhờ thuật toán này, bài toán (1) - (4) phân rã thành 6 bài toán con một chiều.

Một phương pháp khác hay được sử dụng, đó là phương pháp luân hướng. Trong [2] phương pháp này được áp dụng cho bài toán truyền nhiệt và đã chứng minh được tốc độ hội tụ $o(h^2 + \tau^2)$ cho trường hợp $n = 2$. Abrashin [3] đã đưa ra một cải biên cho phương pháp luân hướng và ông đã chứng minh được định lí hội tụ cho phương trình tương đối tổng quát.

Trong bài này, chúng tôi sử dụng phương pháp của Abrashin cho bài toán (1) - (4). Để xấp xỉ đạo hàm theo biến không gian chúng tôi dùng sơ đồ đơn điệu của Xamarskii [2]. Tính đơn điệu của sơ đồ rất quan trọng, ngoài việc đảm bảo cho phương pháp truy đuổi ổn định, nó còn đặc biệt hữu ích cho tính không âm của nghiệm gần đúng. Để minh họa, chúng tôi sử dụng phương pháp Abrashin cho bài toán ô nhiễm khí với nguồn tức thời. Kết quả tính toán được so sánh với phương pháp phân rã và phương pháp một chiều địa phương [2].

2. Phương pháp luân hướng

Trong mục này chúng tôi trình bày sơ đồ của Abrashin áp dụng cho bài toán (1) - (4). Mọi kí hiệu được lấy theo [3].

Xét bài toán:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = Au + f(x, t) \quad \text{trong } \Omega_p \times [0, 1] \quad (5)$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_p); \quad \Omega_p = \{x_i : 0 \leq x_i \leq l_i\}, i = 1, 2, \dots, p;$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (6)$$

$$u(x, t)|_{S_1} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{S_2} = 0. \quad (7)$$

Giả thiết rằng (5) - (7) có nghiệm đủ trơn trong miền $\Omega_p \times [0, T]$. Như vậy Ω_p là một khối hộp p - chiều. Biên S_1 là các mặt $x_i = 0$ của khối hộp.

Giả thiết thêm toán tử A có biểu diễn

$$A = \sum_{i=1}^p A_i.$$

Ta phủ miền Ω_p bằng lưới $\bar{\omega}_h = \{j; h_i, i = 1, 2, \dots, p; j_i = 1, 2, \dots, N_i\}$. Các toán tử A_i được xấp xỉ bằng các toán tử sai phân L_i trên lưới $\bar{\omega}_h$. Các kí hiệu $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|$ và tích vô hướng được xác định trong [2]. Phương pháp luân hướng Abrashin được viết cho bài toán (5) - (7) như sau

$$y_{jt} = \sum_{i=1}^J L_i \hat{y}^{(i)} + \sum_{i=j+1}^p L_i y^{(i)} + f_h, \quad (8)$$

$$j = 1, 2, \dots, p; y^{(i)} = (y_1, y_2, \dots, y_i)$$

$$y_t = \frac{\hat{y} - y}{\tau}; \hat{y} = y(t + \tau);$$

$$y(0) = \varphi_h. \quad (9)$$

Như vậy, tại mỗi lớp thời gian ta phải giải liên tiếp p bài toán và nghiệm gần đúng có thể lấy $y = y_p$.

Định lí 1. Sơ đồ (8) ổn định theo điều kiện ban đầu và về phải nếu điều kiện sau đây được thỏa mãn

$$F(y) = - \sum_{j=1}^p (y_{jt}, (L_j y_j)_t) \geq 0. \quad (10)$$

Khi đó ta có đánh giá

$$\|\hat{y}_p\| \leq M \{ \|y_p(0)\|^2 + \left\| \sum_{j=1}^p L_j y_j(0) + f(0) \right\|^2 + \max_i (\|f\|^2 + \|f_i\|^2) \}. \quad (11)$$

Ngoài ra nếu A_i là xác định dương thì ta có đánh giá

$$\sum_{i=1}^p \|y_{i\bar{x}_i}\|^2 \leq M_1 \left\{ \sum_{i=1}^p \|y_{\bar{x}_i}(0)\|^2 + \left\| \sum_{i=1}^p L_i y_i(0) + f(0) \right\|^2 + \max_i (\|f\|^2 + \|f_i\|^2) \right\}. \quad (12)$$

Chứng minh. Nhân vô hướng cả hai vế của (8) với $\tau(L_j(y^j))_t$, $j = 1, 2, \dots, p$ và sau đó lấy tổng theo j , tiếp đó dùng những thủ thuật tương tự [3] ta thu được (11). Từ đây sẽ suy ra tính ổn định của sơ đồ theo về phải và điều kiện ban đầu. Tương tự như vậy ta chứng minh (12) có sử dụng đến tính không âm của L_i .

Nhận xét

a) Theo định lí trên, nếu L_i xấp xỉ A_i với độ chính xác $O(h^2)$ và nếu nghiệm đủ trơn thì phương pháp trên hội tụ với tốc độ $O(h^2 + \tau)$.

b) Nếu L_i là xác định dương thì phương pháp trên hội tụ đều.

Thật vậy, với điều kiện biên $y_i = 0$ tại $x_i = 0, l$ hoặc chỉ cần tại một đầu biên $x_i = 0$ thì theo định lí nhúng trong chuẩn rời rạc [2], ta có

$$\|y_i\| \leq c\|y_{x_i}\|. \quad (13)$$

Từ (12), (13) ta thu được đánh giá theo chuẩn đều. Hơn nữa trong trường hợp này, nghiệm gần đúng có thể lấy y_i với $i < p$, nghĩa là quá trình giải có thể dừng lại sớm hơn.

c) Điều kiện (10) được thoả mãn nếu $L_i \geq 0$.

3. Áp dụng cho bài toán (1) - (4).

Trước hết ta cần một số giả thiết. Để xác định, ta giả thiết rằng véc tơ gió có các thành phần u, v, w không âm và là hàm không tăng theo biến không gian. Khi đó S_1 là phần biên xác định bởi các mặt của khối hộp $x = 0, y = 0, z = 0$. S_2 là phần biên còn lại. Khi đó phương trình (1) được viết lại dưới dạng

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi = 0, \quad (14)$$

$$\varphi|_{t=0} = f(x, y, z) \quad (15)$$

và điều kiện biên

$$\varphi(x, t)|_{S_1} = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{S_2} = 0. \quad (16)$$

với $A = A_1 + A_2 + A_3$,

$$A_1\varphi = u \frac{\partial \varphi}{\partial x} - K \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},$$

$$A_2\varphi = v \frac{\partial \varphi}{\partial y} - K \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2},$$

$$A_3\varphi = w \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Các toán tử vi phân A_i được xấp xỉ bằng toán tử sai phân Xamarskii

$$L_1\Phi = -\mu_x(a\Phi_x)_x + u\Phi_x,$$

$$L_2\Phi = -\mu_y(a\Phi_y)_y + v\Phi_y,$$

$$L_3\Phi = -\mu_z(a_z\Phi_z)_z + w\Phi_z,$$

Trong đó $\mu_x = \mu_{x_i}$, $a = a_i$ là những hàm lưới xác định trên lưới $\omega_p \times \omega_\tau$

$$\mu_x = \frac{1}{1 + R_x}; R = \frac{1}{2K} h_x u; a_i = K_{i+1/2}$$

u, v, w được xác định tại các nút lưới và sai phân các đạo hàm

$$\Phi_{\bar{x}} = \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{h_x}$$

$$\Phi_x = \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{h_x}$$

Ngoài ra ta còn giả thiết thêm K_z tăng thêm chiều cao. Điều này có thể chấp nhận được bởi theo các công thức tính K_z trong [1], [4]

$$K_z = u_* \vartheta z / \varphi(\xi); \xi = z/L; u_*, \vartheta, L = \text{const.} > 0,$$

hàm $\varphi(\xi)$ có dạng $\ln \xi$. Rõ ràng K_z tăng theo z .

Định lí 2. Với giả thiết K_z không giảm theo biến không gian, còn các thành phần u, v, w của véc tơ gió V không âm và không tăng theo biến không gian, khi đó phương pháp luân hướng áp dụng cho bài toán (14) - (16) với sơ đồ (17) là ổn định.

Chứng minh. Theo định lí 1 và phần c) của nhận xét, ta chỉ cần chứng tỏ tính không âm của toán tử L_i , $i = 1, 2, 3$.

Ta chỉ cần chứng minh với $i = 3$, còn các toán tử khác chứng minh tương tự. Nhân vô hướng (17) với φ

$$(L_3 \varphi, \varphi) = (w \varphi_{\bar{z}}, \varphi) - (\mu_z (a \varphi_{\bar{z}})_z, \varphi)$$

hay viết chi tiết ra

$$(L_3 \varphi, \varphi) = \sum_{k=1}^{N-1} \left\{ (w_k (\varphi_k - \varphi_{k-1}) \varphi_k - \frac{\mu_k}{h_z} [K_{k+1/2} (\varphi_{k+1} - \varphi_k) \varphi_k] + \frac{\mu_k}{h_z} [K_{k-1/2} (\varphi_{k-1} - \varphi_k) \varphi_k] \right\}$$

Trong công thức trên, để đơn giản ta bỏ qua các chỉ số i, j và các tổng tương ứng.

Sau phép biến đổi đơn giản, ta thu được

$$(L_3 \varphi, \varphi) = \frac{1}{2} \{ -w_1 \varphi_0^2 + w_N \varphi_N^2 + \sum_{k=1}^N w_k (\varphi_k - \varphi_{k-1})^2 + \sum_{k=1}^{N-1} (w_k - w_{k+1}) \varphi_k^2 + \sum_{k=1}^{N-1} \left[\frac{\mu_{k+1/2} K_{k+1}}{h_z} (\varphi_k - \varphi_{k-1})^2 + \frac{K_{k+1/2}}{h_z} (\varphi_k^2 + \varphi_{k+1}^2) (\mu_{k+1} - \mu_k) \right] +$$

$$\frac{\mu_1 K_{1/2}}{h_t} \varphi_1^2 - \frac{\mu_{N-1} K_{N-1/2}}{h_z} (\varphi_N - \varphi_{N-1}) \varphi_N$$

Theo giả thiết ta có $u_i - u_{i+1} \geq 0$; $\mu_{i+1} - \mu_i \geq 0$ và sai phân điều kiện biên dễ dàng nhận thấy

$$(L_i \varphi, \varphi) \geq 0.$$

Tương tự như vậy ta chứng minh được tính không âm của L_i , $i = 1, 2$.

Theo định lí 1 và nhận xét ta có được tính ổn định của sơ đồ. Hệ đại số tuyến tính từ phương pháp luân hướng có dạng ba đường chéo. Sơ đồ Xamarskii đảm bảo cho phép truy đuổi không tích lũy sai số.

4. Ví dụ số

Trong bài này chúng tôi xét bài toán ô nhiễm không khí gây ra bởi một nguồn điểm tức thời. Khi đó hàm $f(x, y, z)$ có dạng

$$f(x, y, z) = Q_0 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0),$$

Q_0 - cường độ nguồn.

Ví dụ này cho thấy hàm phân bố nồng độ ban đầu là không tròn và phương pháp luân hướng cũng có thể làm việc được.

Miền tính là một hình hộp có kích thước $30\text{km} \times 15\text{ km} \times 600\text{ m}$. Độ cao lấy ở mức $h=600\text{m}$ vì trong khoảng này, trong điều kiện bình thường, quá trình khuếch tán xảy ra chủ yếu.

Tốc độ gió được cho như sau $u = 5\text{m/sec}$, $v = 0$, $w = 0.1\text{m/sec}$. $Q = 10^4\text{G/M}^3$. Nguồn được đặt tại điểm $x = (3000, 1500, 30)$. Bước lưới $h_x = h_y = 1500$. Còn

$$h_{zk} = \begin{cases} 30 & \text{nếu } 1 \leq k \leq 5 \\ 40 & \text{nếu } 5 \leq k \leq 9 \\ (H - 280)/5 & \text{nếu } k \geq 10. \end{cases}$$

Để kiểm tra công việc tính toán, chúng tôi so sánh phương pháp luân hướng với phương pháp phân rã của Marchuc và phương pháp một chiều địa phương [2].

Hình 1 cho thấy sự biến đổi nồng độ theo trục x và theo thời gian t tại $y=3000$, $z=30$.

Hình 2 so sánh các phương pháp, kết quả được tính tại $t=600$, $t=600\text{sec}$ và $y=3000$, $z=30$.

Hình 3 là kết quả tính toán của các phương pháp tại $t=600$, $x=3000$, $y=1500$.

Cuối cùng tác giả xin chân thành cảm ơn GS Ngô Văn Lực về những góp ý và đặc biệt cảm ơn PTS Đặng Quang Á đã có nhiều nhận xét quan trọng để tác giả hoàn chỉnh bài báo.

Tài liệu tham khảo

1. Marchuc G.I., Mô hình toán học cho bài toán môi trường, M. 1982 (tiếng Nga).
2. Xamarskii A.A., Nhập môn lí thuyết sơ đồ sai phân m. 1971 (tiếng Nga).

3. Abrashin V.N., Về một cái biến của phương pháp luân hướng giải bài toán vật lý toán nhiều chiều, "Phương trình vi phân" T 26, 1990, n^o 2. (tiếng Nga).
4. Shir C.C & Shien L.J., A generalized Urban Air Pollution Model and its Application to the Study of SO Distribution in the St. Louis Metropolitan Area., J of Applied Meteorology v 13 (1974), n^o 2.

Abstract

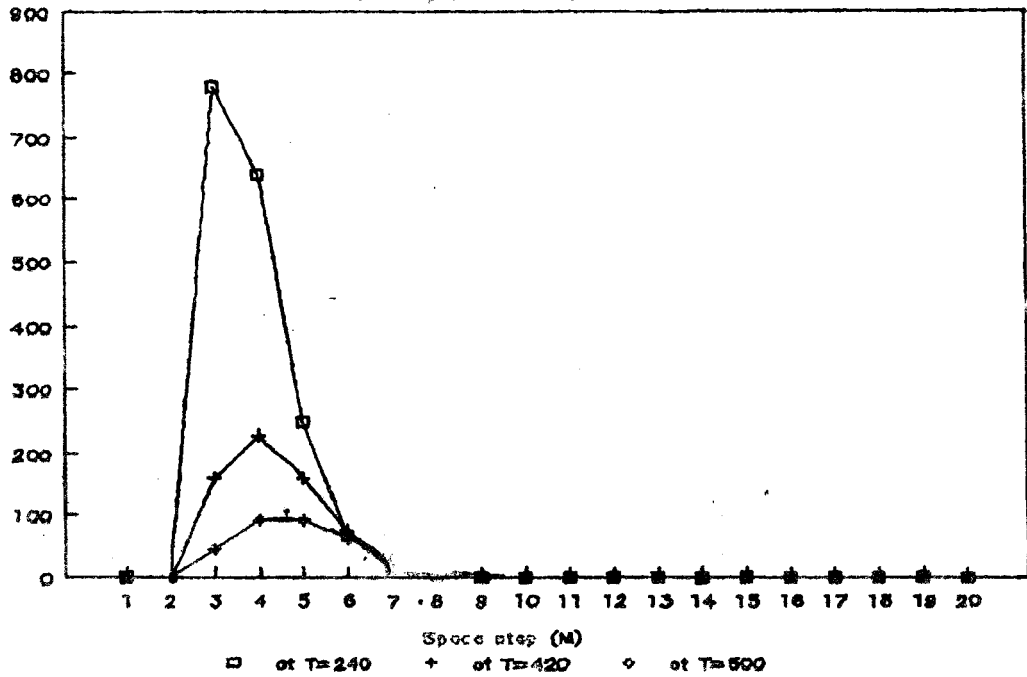
Numerical Solutions of the Air Pollution Problem by the Alternating Direction Method

In this paper a version of the alternating direction method for solution of multidimensional problems is considered. We show that under some conditions, this method can be applied to the air pollution problem. Numerical results of the three - dimensional air pollution model with a point source are presented and compared with results of the local one - dimensional method and the splitting method.

PHẦN PHỤ LỤC

CONCENTRATION DISTRIBUTION

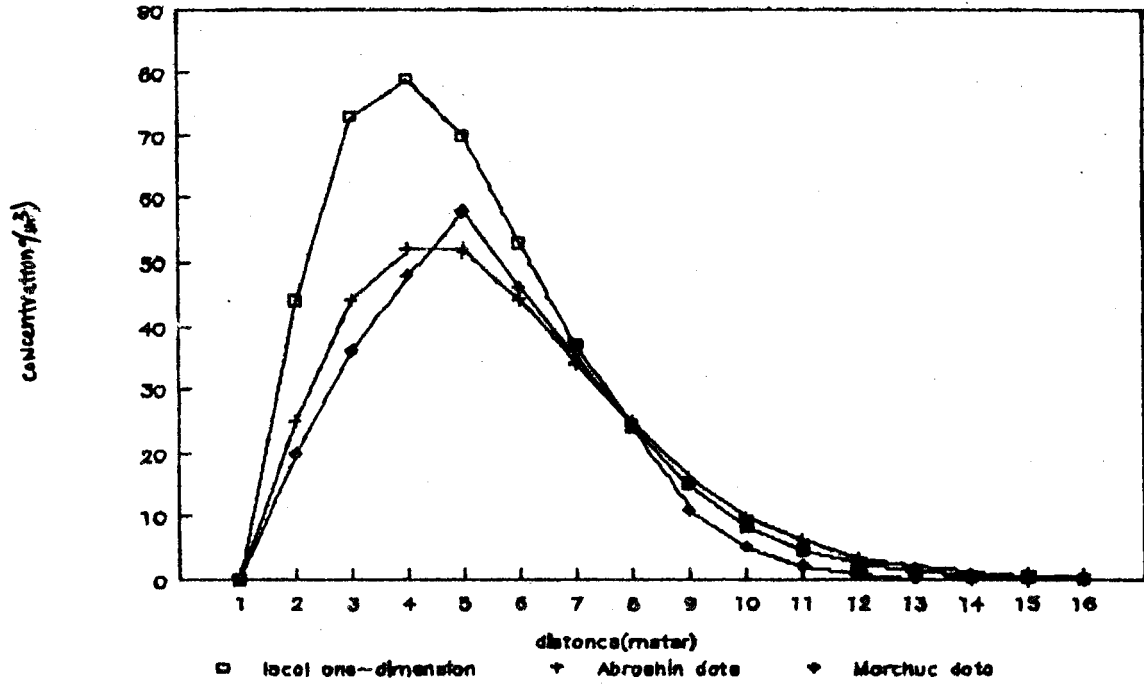
depending of time in direc. x



Hình 1

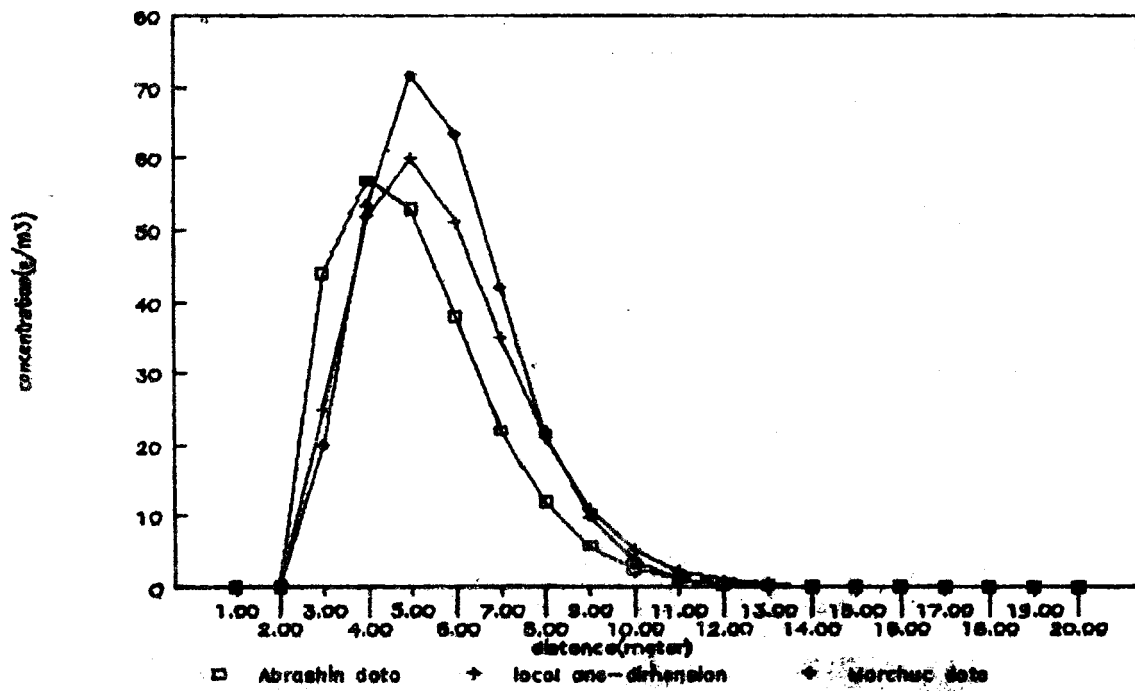
THE DISTRIBUTION

OF POLLUTANT IN HEIGHT



Hình 2

THE CONCENTRATION DISTRIBUTION



Hình 3

VỀ MỘT PHƯƠNG PHÁP ĐIỀU KHIỂN TRUY NHẬP TRONG CƠ SỞ DỮ LIỆU

Đào Thị Hồng Hạnh
Bộ Giáo Dục và Đào Tạo

I. Mở đầu

Ta dùng thuật ngữ an toàn để nói sự bảo vệ dữ liệu trong cơ sở dữ liệu chống lại sự truy nhập, sửa đổi mà không được phép. Đây là mối quan tâm to lớn hiện nay trong lĩnh vực này. Ở đây chúng ta không xem xét những khía cạnh đạo đức và xã hội của vấn đề. Thay vào đó chúng ta sẽ xét một biện pháp bảo vệ thông qua điều khiển truy nhập.

Điều khiển truy nhập đảm bảo rằng mọi truy nhập trực tiếp tới đối tượng phải hợp pháp. Khái niệm điều khiển truy nhập đồng nhất với khái niệm quyền sở hữu (ownership) nghĩa là người quản trị hệ thống có thể phân phối và hủy các quyền trên các đối tượng của họ. Trong hệ thống bảo vệ cơ sở dữ liệu các đối tượng được hiểu là các file dữ liệu và thành phần của chúng.

Hiệu quả của điều khiển truy nhập dựa trên ba tiên đề:

- Thứ nhất là nhận biết chính xác người sử dụng, có một số phương pháp giải quyết yêu cầu này: sử dụng mật khẩu (password) có thể là một xâu gồm kí tự và chữ số. Độ bảo mật của phương pháp này phụ thuộc độ dài của xâu và sự ngẫu nhiên của sự xuất hiện từng phần tử xâu. Phương pháp dùng hàm một chiều có tính chất tồn tại hàm ngược nhưng thuật toán để xác định hàm ngược có độ phức tạp tính toán cao. Hệ thống bảo vệ đưa ra một số ngẫu nhiên x , người sử dụng đưa vào giá trị y . Nếu $y = f(x)$, f là hàm một chiều cài đặt trong hệ thống thì người sử dụng được phép vào làm việc.

- Thứ hai là các thông tin xác định quyền truy nhập của người sử dụng phải được bảo vệ đối với những thay đổi không được phép.

- Thứ ba là nhận biết chính xác quyền sử dụng của từng người được phép vào làm việc. Mô hình ma trận truy nhập cung cấp cho ta một khung nhìn mô tả điều khiển truy nhập. Mô hình