# PHƯƠNG PHÁP CHIẾU LẶP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN KỲ DỊ FREDHOLM LOẠI III*

Lê Xuân Quảng

Viện Công nghệ thông tin

## I. Đặt vấn đề

Hàng loạt bài toán đàn hồi, khuyếch tán, cơ học chất lỏng, chất khí v.v... được đưa về phương trình tích phân kỳ dị Fredholm loại III sau (xem [1], [2]):

$$Ax(t) = t^m x(t) + \int_{-1}^{1} K(t,s)x(s)ds = y(t), \quad (-1 < t < 1), \tag{1}$$

trong đó $m \in \mathbf{N}$, $K(t,s)$ và $y(t)$ là các hàm cho trước thoả mãn một số điều kiện trơn nhất định sẽ được xác định sau, còn $x(t)$ là hàm phải tìm.

Trong những năm gần đây đã có nhiều nhà toán học, cơ học và kỹ thuật quan tâm nghiên cứu phương trình (1) trong các không gian hàm và các lớp hàm suy rộng khác nhau. Các công trình [3], [4] đã xây dựng được lý thuyết Noether cho phương trình (1) còn công trình [9], [10], [11] đã nghiên cứu các phương pháp gần đúng khác nhau cho phương trình (1) như: phương pháp nội suy trùng lặp Lagrange, phương pháp moment, phương pháp miền con. Tuy vậy do tính kỳ dị bậc cao của phương trình (1) nên các phương pháp đã nêu trên chưa đáp ứng được yêu cầu thực tiễn. Cụ thể là cho tốc độ hội tụ thấp dẫn đến việc phải giải hệ đại tuyến bậc khá cao khi cần độ chính xác cần thiết của nghiệm.

Mục đích của bài báo này là áp dụng sơ đồ chiếu lặp để nâng cao tốc độ hội tụ và mở rộng điều kiện hội tụ nhằm khắc phục nhược điểm của các phương pháp trên.

## 2. Một vài kết quả bổ trợ.

* Bài báo được hoàn thành với sự tài trợ của chương trình nghiên cứu cơ bản về khoa học tự nhiên

Ta ký hiệu $\mathbf{C}(m,0)$ là không gian tuyến tính các hàm liên tục trong khoảng [-1.1] và có đạo hàm Taylor $f^{\{m\}}(0)$ bậc $m$ tại điểm $t=0$ (xem [12], [13]) với chuẩn

$$\|f\|_{C(m,0)} = \|Nf\|_C + \sum_{l=0}^{m-1} |f^{\{l\}}(0)|, \tag{2}$$

trong đó

$$(Nf)(t) = [f(t) - \sum_{l=0}^{m-1} F^l(0)t^l/l]/t^m., \tag{3}$$

Ta ký hiệu $F(t) = (Nf)(t) \in C[-1,1]$ và hiểu $F(0) = \lim_{t\to 0} F(t)$.

**Bổ đề 1** [11]:

*Hàm $f(t) \in C(m,0)$ khi và chỉ khi nó có thể biểu diễn được dưới dạng*

$$f(t). = t^m F(t) + \sum_{k=0}^{m-1} a_k t^k, \tag{4}$$

*trong đó $F(t) = (Nf)(t)$ còn $a_k = f^{\{k\}}(0)/k!$.*

**Bổ đề 2** [11]:

*Không gian $C(m,0)$ với chuẩn (2) là đầy đủ và nhúng chuẩn tắc trong* $C[-1,1]$.

Nếu ký hiệu $H_n$ là không gian các đa thức đại số bậc $\le n$ thì đại lượng xấp xỉ tốt nhất của hàm $f(t) \in C(m.0)$ bằng các phần tử của $H_n$ được định nghiã như sau:

$$\tilde{E}_n(t) = \inf_{q_n \in H_n} \|f - q_n\|_{C(m.0)}.$$

**Bổ đề 3** [11]

*Với mọi $f(t) \in C(m,0)$ và mọi $n \ge m$ trong $H_n$ tồn tại đa thức xấp xỉ tốt nhất và $\tilde{E}_n(t) = E_{n-m}(Nf)$, trong đó $E_{n-m}$ là xấp xỉ đều tốt nhất của đại lượng $(Nf)(t)$.*

Bây giờ ta xét lớp hàm hai biến $\theta(t,s) \in C[-1,1] \times C(m.0)$. Hàm $\theta(t,s)$ liên tục theo cả hai biến $t$ và $s$, có đạo hàm Taylor bậc $m$ theo biến $t$ tại $s=0$.

**Bổ đề 4** [11]

*Với mọi hàm $\theta(t,s) \in C[-1,1] \times C(m,0)$ và mọi số tự nhiên $n \ge m$ sẽ tồn tại hàm $\psi(t,s,n) \in C[-1.1] \times C(m,0)$ là đa thức theo biến $t$ bậc $n$ thỏa mãn ác đánh giá sau:*

$$(i)|(\theta-\psi)(t,s)| \le \xi^t_{n-1}(\theta), \quad t,s \in [-1,1],$$

$$(ii)|(\theta-\psi)^{\{k\}}(t,0)| \le (m-1)!\xi^t_{n-1}(\theta), \quad k = \overline{0,m-1},$$

$$(iii)|N^k_s(\theta-\psi)(t,s)| \le \xi^t_{n-1}(\theta), \quad k = \overline{1.m},$$

*trong đó $\psi^t_{n-1}(\theta) = E^t_{n-1}(h) + \sum\limits_t^{m-1} E_{n-1}(g_i)$, $h(t.s) = (N_s\theta(t,s) = \theta^{\{i\}}_s(t,0)/i!$, $i = \overline{0,n-1}$ còn $E^t_{n-1}(h)$ là xấp xỉ đều tốt nhất của hàm $h(t,s)$ theo biến $t$ bằng các đa thức bậc $n-1$.*

Ký hiệu $N^K_S$ có nghiã là toán tử dạng (3) $(N = N^m)$ áp dụng cho biến $s$.

Bây giờ trên không gian nền $C(m,0)$ chúng ta xây dựng không gian các hàm suy rộng $V(m,0)$ như sau:

Hàm $x(t) \in V_{\{m,0\}}$ khi và chỉkhi có dạng:

$$x(t) = Z(t) + \sum_{k=1}^{m-1} \gamma_k (F.P.)t^{-k-1}, \tag{5}$$

trong đó $Z(t) \in C[-1,1]$, $\gamma_k$ là các hằng số bất kỳ, còn $(F.P.)t^{-k-1}$ là toán tử xác định hàm suy rộng trên $C(m,0)$ theo quy tắc:

$$(F.P.t^{-1}, f) = F.P. \int_{-1}^{1} f(t)t^{-k}dt, \quad k = \overline{1,m}, \tag{6}$$

còn các ký hiệu "F.P." là thành phần chính của tích phân Adam (xem [14]). Nếu ta đưa vào $V(m,0)$ chuẩn:

$$\|x(t)\|_{V(m,0)} = \|Z\|_C + \sum_{k=0}^{m-1} |\gamma_k|, \tag{7}$$

thì $V(m,0)$ trở thành không gian Banach.

**Định lý 1** [8].*Nếu các hệ số trong phương trình (1) thoả mãn*

$$K(t,s) \in C(m,0)([-1,1]^2),$$
$$\theta(t,s) = (N_t K)(t.s) \in C[-1,1] \times C(m,0),$$
$$\int_{-1}^{1} (N_s^{\{j\}} K)(t,s)ds \in C(m,0), \quad j = \overline{1,n},$$
$$K_s^{\{j\}}(t,0) \in C(m,0), \quad j = \overline{1,m-1},$$

$y(t) \in C(m,0)$ *thì toán tử* $A$ *là tựa Fredholm khả nghịch ánh xạ* $V(m,0) \to C(m,0)$.

## 3. Phương pháp chiếu lặp với phép chiếu nội suy trùng lặp

Để áp dụng sơ đồ chiếu lặp (xem [17],[18]) cho phương trình (1) chúng ta cần tiến hành các bước sau:

a - Xây dựng không gian xấp xỉ$X_n \subset X = V(m,0)$

b - Xây dựng phép chiếu $S = P_n : V(m,0) - X_n$

c - Ngiên cứu tính giải được của phương trình xấp xỉ

d - Nghiên cứu tính hội tụ của sơ đồ chiếu lặp

a - Trước hết ta xây dựng không gian xấp xỉ$X - n$ của $V(m,0)$ như sau

$$X_n = \{x_n(t) = \sum_{k=0}^{m-1} C_k t^k + \sum_{k=0}^{m-1} C_{k+n} t^{-k}\}, \tag{8}$$

trong đó $n$ là số tự nhiên bất kỳ, $C_k$ là các hằng số bất kỳ. $X_n$ là không gian con $n+m$ chiều của không gian $X \equiv V(m,0)$

Ta ký hiệu

$$\widetilde{E}_{n+m}(x) = \inf_{x_n \in X_n} \|x - x_n\|_X, \quad x \in X \tag{9}$$

thì ta có bổ đề sau

**Bổ đề 5.** *Với mọi $X_n \in X$ đại lượng xấp xỉ tốt nhất thoả mãn đẳng thức*

$$\widetilde{E}_{m+n}(x) = E_{n-1}(Z). \tag{10}$$

*Trong đó Z được biểu diễn theo công thức (5) còn $E_{n-1}$ là xấp xỉ đều bậc $n-1$.*

b - Xây dựng toán tử chiếu nội suy Lagrange suy rộng $P_n$.

Ta định nghiã $P_n$ là toán tử chiếu $V(m,0) \to X_n$ theo quy tyắc sau

$$\begin{aligned} (XP_nf)(t_j) &= (Xf)(t_j), \quad j = \overline{1,n} \\ (P_nf)^{\{k\}}(0) &= f^{\{k\}}(0), \quad k = \overline{0,m-1} \end{aligned} \tag{11}$$

trong đó $t_j$ là hệ nút Chebysev loại I

$$t_j = \cos(2j-1)\pi/(2n), \quad j = \overline{1,n}$$

Nếu ký hiệu $S_n$ là toán tử chiếu nội suy Lagrange $C[-1,1] - H_{n-1}$ (không gian đa thức bậc $n-1$) thì ta có kết quả sau:

$$P_{n+m-1}(f,t) = t^m(S_{m-1}Xf)(t) + \sum_{k=0}^{m-1} f^{\{k\}}(0)t^k/k!. \tag{12}$$

Bây giờ chúng ta áp dụng sơ đồ chiếu lặp cho phương trình (1).

Từ phần tử $x^{(0)} \in X = V(m,0)$ bất kỳ ta xây dựng phần tử gần đúng $x^{(k)}$ như sau:

$$x^{(k)}(t) = y(t) + T(x^{(k-1)}(t) + W_n^{(k)}), \quad k = 1,2,\ldots \tag{13}$$

trong đó toán tử $T = I - A$ (I là toán tử đồng nhất trong $X$) và $W_n^{(k)} \in X_n$ nghiã là $W_n^{(k)}$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$W_n^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} C_j^{(k)} t^j + \sum_{j=0}^{m-1} C_{j+m}^{(k)} t^{-j-1}, \tag{14}$$

thoả mãn phương trình

$$P_n(W_n^{(k)} - TW_n^{(k)}) = P_n\varepsilon^{(k)}, \tag{15}$$

trong đó

$$\varepsilon^{(k)}(t) = y(t) - x^{(k-1)}(t) + Tx^{(k-1)}(t). \tag{16}$$

Phương trình (15) có thể viết dưới dạng

$$P_n AW_n = P_n\varepsilon^{(k)}. \tag{17}$$

**Định lý 2.** *Giả sử toán tử $A$ khả nghịch, phương trình (10) có nghiệm duy nhất trong $X = V(m,0)$ với mọi $y(t) \in C(m,0)$ các hàm $h(t,s) = (N_s\theta)(t,s)$, $\theta(t,s) = K(t,s)$ (theo biến $t$), $g_l(t) = \theta_s^{\{l\}}(t,0)$ $(l = \overline{0, m-1})$ và $(Ny)(t)$ thuộc lớp hàm Dini-Lipschitz. Khi đó sẽ tồn tại số tự nhiên $N_0 \geq m$ để $\forall n \geq N_0$ phương trìn h (15) có nghiệm duy nhất đồng thời ta có đánh giá*

$$||W_n^{(k)} - W^{(k)}||_X = \{\varepsilon_{n-1}^l(\theta) + E_{n-1}(Ny)lnn\}, \tag{18}$$

*trong đó* $W^{(k)}(t) = A^{-1}\varepsilon^{(k)}(t)$.

*Chứng minh.* Chúng ta xét các phương trình đúng và phương trình gần đúng sau:

$$AW^{(k)}(t) = \varepsilon^{(k)}(t), \tag{19}$$

$$A_n W_n^{(k)}(t) = P_n AW_n^{(k)}(t) = P_n\varepsilon^{(k)}(t). \tag{20}$$

Theo giả thiết của địng lý và kết quả của định lý 1 thì phương trìn h (19) có nghiệm duy nhất trong không gian $X$, toán tử $A$ khả nghịch bị chặn ánh xạ $X \to Y = C(m,0)$. Như vậy để chứng minh phương trình (20) có nghiệm duy nhất ta chỉ cần chỉ ra rằng $\exists N_0$ để $\forall n \geq N_0$ thì

$$||A - A_n||||A^{-1}|| < 1$$

$$||P_n\varepsilon^{(k)} - \varepsilon^{(k)}|| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Ta ký hiệu toán tử $A = K + L$ trong đó $LW_n^{(k)}(t) = t^m W_n^{(k)}(t)$

$$KW_n^{(k)}(t) = \int_{-1}^{1} K(t,s)W_n^{(k)}(s)ds, \tag{21}$$

với $W_n^{(k)} \in X_n$ là không gian con của $X$ có $m+n$ chiều.

Nếu ký hiệu $Y_n = H_{m+n}$ là không gian các đa thức đại số bậc $\leq m+n-1$ thì rõ ràng $Y_n \subset Y = C(m,0)$ vậy phép chiếu nội suy Lagrange $P_n$ trong (20) là có nghiã.

Mặt khác $W_n^{(k)} \subset X_n - LW_n^{(k)} = t^m W_n^{(k)}$ là đa thức đại số nên $P_n LW_n^{(k)} = LW_n^{(k)}$. Do vậy $\forall\, W_n^{(k)} \in X_n$ ta có

$$||AW_n^{(k)}(t) - A_n W_n^{(k)}(t)|| = ||KW_n^{(k)}(t) - P_n KW_n^{(k)}(t)||$$

$$\leq d_1 E_{n-1}(N(KW_n^{(k)})lnn \leq d_1\varepsilon_{n-1}^t(\theta)||W_n^{(k)}||_{X_n} \tag{22}$$

$$\varepsilon_n = ||A_n - A|| = O(\varepsilon_{n-1}^t(\theta)lnn). \tag{23}$$

Vì $\theta$ là lớp hàm Dinni-Lipschitz theo định lý Dresson thì $\varepsilon_{n-1}^{t}(\theta)lnn \to 0$ khi $n \to \infty$.

Đối với vế phải ta dễ dàng đánh giá được

$$\delta_n = ||\varepsilon^{(k)} - P_n\varepsilon^{(k)}|| = O\{E_{n-1}(N\varepsilon^{(k)})lnn\}. \tag{24}$$

Toán tử $T$ bị chặn và

$$\varepsilon^{(k)} = y - x^{(k-1)} + Tx^{(k-1)}.$$

Vậy theo truy chứng dễ dàng suy ra được

$$O\{E_{n-1}(N\varepsilon^{(k)}lnn\} = O\{E_n(Ny)lnn\}. \tag{25}$$

Như vậy

$$||(A_n - A)W_n^{(k)}||_Y \ = \ O(\varepsilon_n + \delta_n)||W_n^{(k)}||_{X_n}. \tag{26}$$

Từ (24) suy ra tồn tại $N_0 > 0$ để mọi $n \geq N_0$ $||A - A_n||||A^1||_{Y_n \to Y} < 1$ và đánh giá (18).

Định lý được chứng minh.

**Hệ quả** : Ngoài các giả thiết của định lý 2 nếu $K(t,s)$ (theo biến $t$), $y(t) \in C^{(r)}[-1,1]$ và $K^{(r)}, y^{(r)} \in H_\alpha$ ($H_\alpha$ là không gian Holder với chỉ số $0 < \alpha \leq 1$) thì ta có đánh giá sau

$$||W^{(k)} - W_n^{(k)}||_{X_n} = O(\frac{lnn}{n^{\alpha+r}}), \quad r = 1, 2, ... \tag{27}$$

Hệ quả được suy ra từ định Dresson và đẳng thức (13).

**Định lý 3.** *Nếu có giả thiết của định lý 2 thì tồn tại số tự nhiên $N_1 \geq N_0$ để với mọi $n \geq N_1$ sơ đồ chiếu lặp (13)-(15) hội tụ đồng thời ta có đánh giá sau*

$$\begin{aligned} ||\varepsilon^{(k+1)}(t)||_X \leq q_n^k||x^{(0)}||_X, \quad 0 < q_n < 1, \\ q_n = ||T(I - AA_n^{-1})P_n\varepsilon^0(t)||_X, \end{aligned} \tag{28}$$

*trong đó $x^{0)}$ là xấp xỉ đầu tiên còn*

$$\varepsilon^{(k)}(t) = y(t) - x^{(k-1)}(t) + Tx^{(k)}(t).$$

*Chứng minh.* Theo giả thiết của định lý thì phương trình (1) có nghiệm duy nhất, $A$, $A^{-1}$ đều bị chặn nên từ (28) có thể suy ra $x^{(k)} \to x^*$ với tốc độ luỹ thừa $q_n^k$ ($x^*$ là nghiệm chính xác của phương trình (1)).

Ta có

$$\begin{aligned} ||\varepsilon^{(k+1)}(t)||_X &= ||y(t) - x^{(k-1)}(t) + Tx^{(k)}(t)||_X \\ &= ||y(t) - -(y(t) + T(x^{(k-1)}(t) + W_n^{(k)}(t)) + T[y(t) + T(W^{(k-1)}(t) + W_n^{(k)}(t)])||_X \\ &= ||T(I - AA_n^{-1})P_n\varepsilon^{(k)}(t)||_X \leq q_n||\varepsilon^{(k)}(t)||_X. \end{aligned} \tag{19}$$

Theo truy chứng thì

$$\|\varepsilon^{(k+1)}(t)\|_X \le q_n^k \|\varepsilon^{(0)}(t)\|_X = q_n^k \|x^{(0)}(t)\|_X. \tag{30}$$

Bây giờ ta chỉ cần chỉ ra rằng tồn tại $N_1 > 0$ để với mọi $n \ge N_1$, $q_n < 1$. Thực vậy theo (28) ta có

$$\begin{aligned} q_n &\le \|T\|\{\|I - AA_n^{-1}\| + \|(AA_n^{-1} - AA_n^{-1}P_n)\varepsilon^0(t)\|_X\} \\ &\le \|T\|\{\|A - A_n\|\|A_n^{-1}\| - \|A\|\|A_n^{-1}\|\|(I - P_n)\varepsilon^0(t)\|_X. \end{aligned} \tag{31}$$

Theo bổ đề 5 $\|(I - P_n)\varepsilon^0(t)\|_X \to 0$ khi $n \to 0$.

Theo định lý 2 $\|A - A_n\| \to 0$ khi $n \to \infty$ và các toán tử $T$, $A$, $A_n^{-1}$, $A_n$ bị chặn nên $q_n \to 0$ khi $n \to \infty$ vậy tồn tại $N_1$ sao cho với mọi $n \ge N_1$, $0 < q_n < 1$.

Định lý được chứng minh.

*Nhận xét*: Nếu chọn $n$ càng lớn thì $q_n$ càng nhỏ, phép lặp hội tụ càng nhanh song lúc bấy giờ không gian $X_n$ có chiều lớn và để tìm $W_n^{(k)}$ thì phải giải hệ đại tuyến lớn. Chiến lược ở đây là phải tìm $N_1$ vừa đủ để $q_n < 1$ sau đó tiến hành lặp.

## Tài liệu tham khảo


1. Keyz K. M. & Xvaifel P.F., *Lý thuyết chuyển dịch tuyến tính* M.: Thế giới, 1972 (tiếng Nga).
2. Brikhartlov Kh. G., *Về phương trình tích phân loại III:* T.C. "Tin tức", Viện hàn lâm khoa học UzSSR - Phần toán lý - 1970, No 2, 18-23 (tiếng Nga).
3. Ragozin V. X. & Raxlambecov S.N., *Lý thuyết Noether cho phương trình tích phân loại III*, Phương trình vi phân, t. 14, 1978, 1678-1681 (tiếng Nga).
4. Ragozin V. X. & Raxlambecov S.N., *Lý thuyết Noether cho phương trình tích phân loại III trong không gian các hàm liên tục và các hàm suy rộng,* Thông báo tin tức của các trường đại học. Phần toán 1979, No 1, 61-69 (tiếng Nga).
5. Ragozin V. X. & Raxlambecov S.N., *Về lý thuyết Noether cho phương trình tích phân loại III,* Thông báo tin tức của các trường đại học. Phần toán 1986, No 4, 77-79 (tiếng Nga).
6. Raxlambecov S.N., *Phương trình tích phân tuyến tính loại III với các hệ số có điểm không bậc bất kỳ trong không gian các hàm suy rộng.* Thông báo tin tức của các trường đại học. Phần toán 1986, No 11, 41-44 (tiếng Nga).
7. Raxlambecov S.N., *Lý thuyết phương trình tích phân tuyến tính loại III trong lớp hàm suy rộng và các không gian khác.* Luận án phó tiến sỹ, Raxtov-Donu 1978. 112 tr. (tiếng Nga).
8. Gabaxov N. S., *Về lý thuyết phương trình tích phân Fredholm loại III trong không gian các hàm suy rộng.* Thông báo tin tức của các trường đại học. Phần toán 1986, No 4, tr. 58 (tiếng Nga).

9. Gabaxov N. S. , *Giải gần đúng phương trình tích phân loại III*, Thông báo tin tức của các trường đại học. Phần toán 1986, No 6, 44-62 (tiếng Nga).
10. Gabaxov N. S. , *Giải gần đúng phương trình tích phân loại III*, Thông báo tại hội nghị khoa học liên bang Nga về các bài toán biên và phương trình vi phân, Kuybusve 1987, tr. 39 (tiếng Nga).
11. Gabaxov N. S. , *Các phương pháp trực tiếp giải phương trình tích phân loại III*, Thông báo tin tức của các trường đại học. Phần toán 1990, 15-23 (tiếng Nga).
12. Prexdorf Z., *Phương trình tích phân kỳ dị với xivol có không điểm hữu hạn*, Nghiên cứu toán học Kishinov, 1972, N0 1. 116-132 (tiếng Nga).
13. Dubin V. B., *Hiệu chỉnh phương trình tích phân trong trường hợp đặc biệt T.C.* Giải tích toán học và ứng dụng, Raxtov-Donu, 1974, T. 5, 45-51 (tiếng Nga).
14. Adamar R., *Bài toán Cosi với phương trình Hyperbol tuyến tính đạo hàm riêng*, Khoa học M. 1978, 351 tr. (tiếng Nga).
15. Daugavet I.K. *Nhập môn lý thuyết xấp xỉ hàm.* Nhà xuất bản L.G. Y 1977 (tiếng Nga).
16. Ermolaev L. B., *Tính xấp xỉ của toán tử đa thức và giải phương trình vi tích phân bằng toán tử miền con.* Luận án phó tiến sỹ toán lý Kazan 1987, 137 tr. (tiếng Nga).
17 Lushka J. A., *Phương pháp chiếu lặp giải phương trình vi phân và tích phân.* Kiev, Khoa học 1980 (tiếng Nga).
18 Lê Xuân Quảng, *Phương pháp chiếu lặp giải phương trình vi phân và tích phân kì dị với nhân Hilbert trong không gian $L_2$.* T.C. Tin học và điều khiển học 1992, T. VIII, N0 1.



## Abstract

Iterative-projection methods for solving the Fredholm singular integral equation of the first kind

*In this paper the iterative-projection method for solving the Fredholm singular integral equation of the first kind*

$$Ax(t) = t^m x(t) + \int_{-1}^{1} K(t,s)x(s)ds = y(t), \quad -1 \le t \le 1,$$

*where* $K(t,s)$, $y(t)$ *are given functions of the space* $C_0[-1,1]$ *and* $C^0[-1,1] \times C^0_m[-1,1]$, *respectively.*

*The method is convergent with the rate of power.*