Tạp Chí Tin Học và Điều Khiển Học
Tập X(1994), Số 2, 43-48

Tính lồi - lõm của hàm sản xuất một mức với độ co giãn thay thế không đổi

Tô Cẩm Tú
Viện Quy Hoạch & Thiết Kế Nông Nghiệp
Bộ Nông Nghiệp

I. Mở đầu

Ta đã biết [1,2] điều kiện cần và đủ để một hàm nhiều biến

$$y = f(x_1, x_2, \ldots x_n) \tag{1}$$

lồi (lồi trên) trong một miền nào đó là dạng toàn phương tương ứng

$$d^2y = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \tag{2}$$

xác định không dương trong miền đó. Cái đó tương đương với vấn đề là mọi định thức con cấp k ($k = \overline{1,n}$) của ma trận Hertz các đạo hàm riêng hạng hai

$$H^{(n)} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_n} \end{Vmatrix} \tag{3}$$

lần lượt đổi dấu khi k lần lượt nhận các giá trị từ 1 đến n, trong đó $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} \leq 0$. Nói cách khác định thức

$$(-1)^k \left| H^{(k)} \right| \geq 0 \text{ với } k = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Tuy nhiên công cụ này khá cồng kềnh, nên người ta đã có nhiều phương pháp khác đơn giản hơn để xét tính lồi lõm của một hàm nhiều biến chẳng hạn như phương pháp gradient...

Riêng đối với hàm sản xuất $y = f(x_1, x_2, ...x_n)$, trong đó x_j $(j = \overline{1,n})$ là các yếu tố sản xuất và y là kết quả sản xuất, gần đây không yêu cầu nó phải lồi trong cả miền kinh tế $(x_j \geq x_j^{(0)} \geq 0,\ j = \overline{1,n})$, mà có thể lồi trong một miền con nào đó và lõm trong miền con khác của nền kinh tế [3,4].

Vì vậy, việc tìm một tiêu chuẩn đơn giản xác định tính lồi lõm của hàm sản xuất, đặc biệt của hàm sản xuất với độ co dãn thay thế không đổi (vì do sự đơn giản của chúng các hàm sản xuất dạng này đã được sử dụng rất rộng rãi để mô phỏng nền kinh tế) trở nên rất cần thiết.

Trong [4] đã chứng minh định lý cơ bản sau *Cần và đủ để hàqm sản xuất (1) có độ co dãn thay thế không đổi* $\sigma_{ij} = \sigma,\ i, j = \overline{1,n}$ *là*

$$\delta_{ki} = \delta_{kj}$$

$$\delta_{jj} + \frac{1}{\sigma_{ij} x_j} = \delta_{ji},\ i,j,k = \overline{1,n};\ i \neq j \neq k, \tag{5}$$

trong đó σ_{ij} *là độ co dãn thay thế* x_i *và* x_j

$$\delta_{jj} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_j^2} \Big/ \frac{\partial y}{\partial x_j} \tag{6}$$

là nhịp độ tăng đơn năng xuất giới hạn;

$$\delta_{ji} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i} \Big/ \frac{\partial y}{\partial x_i} \tag{7}$$

là nhịp độ tăng hỗn hợp năng xuất tới hạn theo sự tăng của các yếu tố sản xuất (không loại trừ thời gian).

Trên cơ sở các biểu thức (4) và (5) ta có định lý sau

Định lý. *Hàm sản xuất với độ co dãn thay thế không đổi* σ

$$y = f(x_1, x_2, ...x_n)$$

a) lồi (lên) trong một miền nào đó khi và chỉ khi trong miền đó

$$\sum_{t=1}^{k} \delta_{tt} x_t \leq -\frac{k-1}{\sigma},$$

b) lõm (lồi dưới) trong một miền nào đó khi và chỉ khi trong miền đó có ít nhất một

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_j^2} = 0,\ j \in \{1,2,\dots,n\}.$$

và

$$\sum_{t=1}^{k} \delta_{tt} x_t \geq -\frac{k-1}{\sigma},$$

với mọi $k = \overline{1,n}$; $\{1,2,\dots,k\} \subset \{1,2,\dots,n\}$.

Chứng minh. Từ (5), (6) và (7) ta có

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_j^2} = \delta_{jj}\frac{\partial y}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i} = \delta_{ji}\frac{\partial y}{\partial x_i} = (\delta_{jj} + \frac{1}{x_j\sigma})\frac{\partial y}{\partial x_i}.$$

Nhờ đó ma trận Hertz (3) trở thành

$$H^{(n)} = \begin{Vmatrix} \delta_{11}\frac{\partial y}{\partial x_1} & (\delta_{11} + \frac{1}{x_1\sigma})\frac{\partial y}{\partial x_2} & \dots & (\delta_{11} + \frac{1}{x_1\sigma})\frac{\partial y}{\partial x_n} \\ (\delta_{22} + \frac{1}{x_2\sigma})\frac{\partial y}{\partial x_1} & \delta_{22}\frac{\partial y}{\partial x_2} & \dots & (\delta_{22} + \frac{1}{x_2\sigma})\frac{\partial y}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\delta_{nn} + \frac{1}{x_n\sigma})\frac{\partial y}{\partial x_1} & (\delta_{nn} + \frac{1}{x_n\sigma})\frac{\partial y}{\partial x_2} & \dots & \delta_{nn}\frac{\partial y}{\partial x_n} \end{Vmatrix}.$$

Từ đó dễ dàng thấy rằng định thức con cấp k $(1 \leq k \leq n)$ bằng

$$|H^{(k)}| \quad (\prod_{t=1}^{k}\frac{\partial y}{\partial x_t}) \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{11} + \frac{1}{x_1\sigma} & \dots & \delta_{11} + \frac{1}{x_1\sigma} \\ \delta_{22} + \frac{1}{x_2\sigma} & \delta_{22} & \dots & \delta_{22} + \frac{1}{x_2\sigma} \\ \cdot & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{kk} + \frac{1}{x_k\sigma} & \delta_{kk} + \frac{1}{x_k\sigma} & \dots & \delta_{kk} \end{vmatrix}.$$

Hay

$$(\prod_{t=1}^{k}\frac{\sigma x_t/\partial y}{\partial x_t})|H^{(k)}| = \begin{cases} \sigma\sum_{t=1}^{k}\delta_{tt}x_t + (k-1), & \text{nếu } k \text{ lẻ} \\ -[\sigma\sum_{t=1}^{k}\delta_{tt}x_t + (k-1)]. & \text{nếu } k \text{ chẵn.} \end{cases}$$

Từ tiên đề $\frac{\partial y}{\partial x_t} \geq 0$, $t = \overline{1,n}$ và vì $0 \leq \sigma < \infty$ suy ra rằng

$$\prod_{t=1}^{k}\sigma x_t / \frac{\partial y}{\partial x_t} \geq 0,$$

với mọi t. Vì vậy để cho (4) thỏa mãn thì từ (8) phải có

$$\sum_{t=1}^{k}\delta_{tt}x_t \leq -\frac{k-1}{\sigma}. \tag{9}$$

đương nhiên là từ (8) suy ra điều kiện cần và đủ để

$$(-1)^k|H^{(k)}|| \le 0, \text{ với } k = \overline{1,n}$$

là

$$\sum_{t=1}^{k} \delta_{tt} x_t \ge -\frac{k-1}{\sigma}. \tag{10}$$

Để tiền đề $\partial^2 y/\partial x_j^2 \le 0$, $(j = \overline{1,n})$ của hàm sản xuất cũng thỏa mãn, chỉ cần thêm một điều kiện $\delta_{11} = 0$. Nhưng vai trò các biến $x_1, x_2, ..., x_n$ là như nhau về vị trí trong biểu thức $y = f(x_1, x_2, ...x_n)$, nên chỉ cần ít nhất một $\delta_{jj} = 0$, hay $\partial^2 y/\partial x_j^2 = 0$, $j \in \{1, 2, ...n\}$. Định lý đã được chứng minh.

3. Ứng dụng

Ở đây chúng ta xét một số hàm sản xuất với độ co dãn thay thế không đổi. Trước hết xét ba hàm mà nhịp độ hỗn hợp tăng năng suất tới hạn bằng không (xem [4])

1) Hàm $y = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\sigma}{\sigma-1} x_j^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}$ lồi ngặt trong toàn miền $x_j \ge 0$, $j = \overline{1,n}$. Thực vậy, $\delta_{11} = -1/(\sigma x_1)$, từ đó $\delta_{11} x_1 = -1/\sigma < 0$,

$$\delta_{11} x_1 + \delta_{22} x_2 + ... + \delta_{kk} x_k = -k/\sigma < -(k-1)/\sigma$$

với mọi $k = \overline{1,n}$.

2) Hàm $y = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \ln x_j$ lồi ngặt vì

$$\delta_{11} x_1 + \delta_{22} x_2 + ... + \delta_{kk} x_k = -k < -(k-1).$$

3) Hàm $y = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$ $(\sigma = \infty)$ lồi (đồng thời lõm) vì

$$\delta_{11} x_1 + \delta_{22} x_2 + ... + \delta_{kk} x_k = 0$$

với mọi $k = \overline{1,n}$.

Bây giờ ta xét một vài dạng khác của hàm sản xuất với độ co dãn thay thế không đổi [4,5] và NĐTNSTH hỗn hợp khác không.

1 - Xét hàm

$$y = c \prod_{j=1}^{n} a_j^{\alpha_i \frac{\sigma}{\sigma-1} x_j^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}.$$

ta có

$$\delta_{ii} = \alpha_j x_j^{-\frac{1}{\sigma}} \ln a_j - \frac{1}{\sigma x_i}.$$

Từ đó suy ra rằng hàm sản xuất đã cho lồi trong miền $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}$ thỏa mãn điều kiện

$$y = \prod_{j=1}^{n} a_j^{\alpha_j x_j^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}} \leq e^{\frac{1}{\sigma}}.$$

2 - Hàm Cobb - Douglass lồi nếu $0 \leq \alpha_j \leq 1$ và $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \leq 1$. Thực vậy, từ

$$y = \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j}$$

ta được $\delta_{11} x_1 = \alpha_1 - 1 < 0$, nếu $0 < \alpha_1 < 1$. Tiếp tục,

$$\delta_{11} x_1 + \delta_{22} x_2 + \ldots + \delta_{kk} x_k = \sum_{t=1}^{k} \alpha_t - k \leq -(k-1)$$

với $k = \overline{1,n}$, nếu $\sum_{\alpha_t} \leq 1$.

3 - Hàm logistic

$$y = \frac{a}{1 + c\,exp(-\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\sigma}{\sigma-1} x_j^{\frac{\sigma-1}{\sigma}})}$$

cho ta

$$\delta_{jj} x_j = \frac{\alpha_j x_j^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} [c\,exp(-\sum_{t=1}^{k} \alpha_t \frac{\sigma}{\sigma-1} x_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}) - 1]}{1 + c\,exp(-\sum_{t=1}^{n} \alpha_t \frac{\sigma}{\sigma-1} x_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}})} - \frac{1}{\sigma}.$$

Dễ dàng thấy rằng $\delta_{jj} x_j < 0$ khi $\sum_{t=1}^{n} \alpha_t \frac{\sigma}{\sigma-1} x_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} > \ln c$ không yêu cầu chặt chẽ về giới hạn dưới, có thể thấy rằng $\delta_{jj} x_j < 0$ khi $x_j \geq (\frac{\sigma-1}{\sigma x_j} \ln c)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$ với mọi $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Tài liệu tham khảo

1. James M. Henderson & Richard E. Quand. *Microeconomic Theory,* A Mathematical Aproach. Second Edition 1971, Appendix 430 p.
2. Ivanov U. P. & Lotov A. B., *Mathematical models in economics,* M., Nauka, 1979, 303 p. (in Russian).
3. Tình hình kinh tế ở các nước tư bản và các nước đang phát triể. MEIMO, 1987 (phần tiếp theo) (in Russian).
4. Tô Cẩm Tú. *Về một vài phương pháp xây dựng hàm sản xuất,* Trung tâm tính toán VHLKH Liên Xô, 1988, 28 p. (in Russian).
5. To Cam Tu, *Concavity and convexity of one - level production functions,* The 4th Congress of Vietnamese Mathematicians, Hanoi September 4 - 7, 1990, Abstract, p. 133.

Abstract

Concavity and convexity of one - level production functions with constant elasticity of substitution

On the base of the theorem [4]: Necessary and sufficient conditions for the constancy of elasticity of substitution ($\sigma_{ij} = \sigma$) *of one - level production functions* $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *is* $\delta_{jj} + 1/(\sigma_{ij} x_j) = \delta_{ji}$, *where* $\delta_{ij} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i} / \frac{\partial y}{\partial x_i}$, $i, j = \overline{1,n}$ *the following theorem is followed:*

In the region $\Omega = \{x_j \geq 0, j = \overline{1,n}\}$ *the one - level production functions with constant elasticity of substitution* σ *is:*

a. *Convex in* $\Omega_1 \subset \Omega$ *if and only if* $\sum_{t=1}^{k} \delta_{tt} x_t \leq (1 - k)/\sigma$.

b. *Concave in* Ω_1 *if and only if in this region to say the least of it* $\frac{\partial^2 y}{\partial x_j^2} = 0$, $j \in \{1, 2, ..., n\}$, *and* $\sum_{t=1}^{k} \delta_{tt} x_t \geq (1 - k)/\sigma$, *where* $\{1, 2, ..., k\} \subset \{1, 2, ..., n\}$ *and* $k = \overline{1,n}$.