Tạp Chí Tin Học và Điều Khiển Học
Tập X(1994), Số 1, 30-39

# Hàm sản xuất một mức với nhịp độ tăng năng suất tới hạn phụ thuộc mọi nhân tố sản xuất

Tô Cẩm Tú
Viện Quy Hoạch & Thiết Kế Nông Nghiệp
Bộ Nông Nghiệp

## I. Mở đầu

Cho tới nay xuất hiện nhiều phương pháp xây dựng hàm sản xuất (HSX), như dựa trên cơ sở các tiên đề cổ điển về hàm sản xuất (xem [2, 3, 4]), hoặc sử dụng phương trình vi phân với độ co dãn thay thế không đổi (ĐCDTTKĐ) [3,5]. Một số tác giả đã sử dụng các hàm sản xuất với độ thay thế co giãn biến đổi (ĐCDTTBĐ) (xem [1, 6, 7, 8]).

Gần đây với khái niệm nhịp độ tăng năng xuất tới hạn (NĐTNSTH) được đưa vào cho hàm sản xuất cùng một số định lý cơ bản (xem [9]) ta có tiêu chuẩn để trên cơ sở bộ số liệu để có thể xác định rằng hàm sản xuất tương ứng với nó có độ co giãn thay thế không đổi hay biến đổi. Biểu thức của nhịp độ tăng năng xuất tới hạn trong một nền sản xuất nào đó còn cho biết hướng đầu tư (mở rộng sản xuất) để đạt hiệu quả kinh tế cao. Trong [9] đã xây dựng các hàm sản xuất với độ co giãn thay thế không đổi và $\delta_{ji} = 0,\ i,j = \overline{1,n},\ i \neq j$.

Trong bài này chúng tôi trình bày các hàm sản xuất với ĐCDTTKĐ mà $\delta_{ji} = \delta_{ji}(x_1, x_2, ..., x_n)$ trong đó $x_j (j = \overline{1,n})$ là các nhân tố sản xuất.

## 2. Định nghĩa và Định lý

Hàm sản xuất một mức với độ co giãn thay thế không đổi và với nhịp hỗn hợp tăng năng xuất giới hạn đa biến (phụ thuộc mọi nhân tố sản xuất) là hàm sản xuất:

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

thỏa mãn:

$$\delta_{jj} + \frac{1}{\sigma x_j} = \delta_{ji}, \tag{1}$$

$$\delta_{ji} = \delta_{ji}(x_1, x_2, ...x_n) \tag{2}$$

với mọi $i, j = \overline{1,n},\ i \neq j$, trong đó:

$$\delta_{jj} = \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial x_j^2}}{\frac{\partial y}{\partial x_j}} \quad \text{là NĐTNSTH đơn}$$

$$\delta_{ji} = \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i}}{\frac{\partial y}{\partial x_i}} \quad \text{là NĐTNSTH hỗn hợp}$$

$\sigma$ = const. là độ co dãn thay thế các nhân tố.

Phương trình (1) trong định nghĩa chính là định lý cơ bản trong [9] cho hàm sản xuất với độ co dãn thay thế không đổi còn (2) chỉ ra sự phụ thuộc đa biến của $\delta_{ji}$.

**Bổ đề:** *Trong mọi hàm sản xuất một mức với ĐCDTT không đổi NĐTNSTH hỗn hợp thỏa mãn hệ phương trình sau:*

$$\frac{\partial \delta_{ji}}{\partial x_i} = \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial x_j} \tag{3}$$

*với mọi $i, j = \overline{1,n},\ i \neq j$.*

*Chứng minh.* Đặt $p_i = \frac{\partial y}{\partial x_i}$ và cố định với mọi $x_k,\ k = \overline{1,n},\ k \neq j$ thì

$$\delta_{ji} = \frac{1}{p_i}\frac{dp_i}{dx_j} \tag{4}$$

Lấy tích phân (4) theo $x_j$ ta được

$$\int \delta_{ji} dx_j + \ln c_j = \int \frac{dp_i}{p_i} = \ln p_i,$$

hay:

$$p_i = c_j exp \int \delta_{ji} dx_j \tag{5}$$

trong đó $c_j$ không phụ thuộc vào $x_j$.

Nếu $c_j$ phụ thuộc vào $x_i$ thì lấy đạo hàm (5) theo $x_i$ ta có:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} = \frac{\partial p_i}{\partial x_i} = (\partial c_j / \partial x_j + c_j \int \frac{\partial \delta_{ji}}{\partial x_j} dx_j) e^{\int \delta_{ji} dx_j}$$

Từ đó

$$\delta_{ii} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} / \frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{1}{c_j}\frac{\partial c_j}{\partial x_i} + \int \frac{\partial \delta_{ji}}{\partial x_i} dx_j.$$

Do đó (1) trở thành

$$\frac{1}{c_j}\frac{\partial c_j}{\partial x_i} + \int \frac{\partial \delta_{ji}}{\partial x_i} dx_j + \frac{1}{\delta_{ij} x_j} = \delta_{ij}.$$

Lại lấy đạo hàm phương trình cuối cùng theo $x_j$ ta được phương trình (3).

Nếu $c_j$ không phải là hàm của $x_i$. thì $\frac{\partial c_j}{\partial x_i} = 0$ và ta có ngay kết quả khi lấy đạo hàm phương trình cuối cùng theo $x_j$.

Ngược lại, lấy tích phân (3) theo $x_i$ ta được

$$\delta_{ji} = \int \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial x_j} dx_i + c_i,$$

trong đó $c_i$ không phụ thuộc vào $x_i$.

Rõ ràng là

$$\int \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial x_j} dx_i = \delta_{jj}.$$

Từ đó suy ra rằng $c_i = c_i(x_j)$ và đặc biệt từ định nghĩa rút ra $c_i = 1/\delta x_j$ đối với hàm sản xuất với độ co dãn thay thế không đổi. Bổ đề được chứng minh.

*Chứng minh cách khác:*

Lấy đạo hàm (1) theo $x_i$ với chú ý rằng $\delta$ là hằng số ta được

$$\frac{\partial \delta_{ji}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\delta_{jj} + \frac{1}{\sigma x_j}) = \frac{\partial \delta_{jj}}{\partial x_i} = \frac{\partial^3 y}{\partial x_j^2 \partial x_i} / \frac{\partial y}{\partial x_j} - \delta_{jj}\delta_{ij}.$$

Mặt khác theo định nghĩa NDTNSTH hỗn hợp ta có

$$\frac{\partial \delta_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} / \frac{\partial y}{\partial x_j}) = \frac{\partial^3 y}{\partial x_i \partial x_j^2} / \frac{\partial y}{\partial x_j} - \delta_{ij}\delta_{jj}.$$

Từ đó ta rút ra phương trình cần tìm.

**Mệnh đề 1**: *Nhịp độ hỗn hợp tăng suất tới hạn của hàm sản xuất một mức $y = f(x_1, x_2, ...x_n)$ với độ co dãn thay thế không đổi thoả mãn*

$$\frac{\delta_{ji}}{\delta_{ij}} = \alpha_{ji}(\frac{x_i}{x_j})^{\frac{1}{\sigma}}, \tag{6}$$

*trong đó $\alpha_{ji}$ không phải là hàm của $x_i$ và $x_j$ với mọi $i, j = \overline{1,n}$; $i \neq j$.*

*Chứng minh.* Phương trình (6) là đương nhiên, vì một mặt theo định nghĩa của $\delta_{ji}$ và $\delta_{ij}$ ta có

$$\frac{\delta_{ji}}{\delta_{ij}} = (\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i}) / (\frac{\partial y}{\partial x_j} / \frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i} / \frac{\partial y}{\partial x_j}) = \frac{\partial y}{\partial x_j} / \frac{\partial y}{\partial x_i}.$$

Mặt khác theo định nghiã chuẩn thay thế

$$\frac{\partial y}{\partial x_j} / \frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{dx_i}{dx_j},$$

và vì theo [9]

$$\frac{dx_i}{dx_j} = -\alpha_{ji}\left(\frac{x_i}{x_j}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

trong đó $\alpha_{ji}$ là hằng số, ta có ngay (6).

Tuy nhiên ở đây ta chứng minh một các khác để thấy rõ $\alpha_{ji}$ là hằng số đối với những biến nào.

Từ (5) ta có

$$y = \int c_j e^{\int \delta_{ji} dx_j} dx_i + K_i, \tag{5'}$$

trong đó $c_j$ không phụ thuộc vào $x_j$ và $K_i$ không phụ thuộc vào $x_i$.

Hai lần lấy đạo hàm (5)' theo $x_i$ ta được

$$\frac{\partial y}{\partial x_j} = \int c_j e^{\int \delta_{ji} dx_j} \delta_{ji} dx_i + \frac{\partial K_i}{\partial x_j}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_j^2} = \int c_j e^{\int \delta_{ji} dx_j} \left(\delta_{ji}^2 + \frac{\partial \delta_{ji}}{\partial x_j}\right) dx_i + \frac{\partial^2 K_i}{\partial x_j^2}. \tag{8}$$

Mặt khác, từ (1) suy ra

$$\frac{\partial y}{\partial x_j} = \alpha_j x_j^{-\frac{1}{\sigma}} e^{\int \delta_{ji} dx_j}, \tag{9}$$

hay

$$\alpha_j = \frac{\partial y}{\partial x_j} / x_j^{-\frac{1}{\sigma}} e^{\int \delta_{ji} dx_j}, \tag{10}$$

trong đó $\alpha_j$ không phụ thuộc vào $x_j$,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_j^2} = \alpha_j x_j^{\frac{-1}{\sigma}} e^{\int \delta_{ji} dx_j} \left(\delta_{ji} - \frac{1}{\delta x_j}\right). \tag{11}$$

So sánh (7) với (9) và (8) với (11) ta được hệ phương trình

$$\int c_j e^{\int \delta_{ji} dx_j} \delta_{ji} dx_j + \frac{\partial K_i}{\partial x_j} = \alpha_j x_j^{-\frac{1}{\sigma}} e^{\int \delta_{ji} dx_j},$$

$$\int c_j e^{\int \delta_{ji} dx_j} \left(\delta_{ji}^2 + \frac{\partial \delta_{ji}}{\partial x_j}\right) dx_i + \frac{\partial^2 K_i}{\partial x_j^2} = \alpha_j x_j^{-\frac{1}{\sigma}} e^{\int \delta_{ji} dx_j} \left(\delta_{ji} - \frac{1}{\sigma x_j}\right).$$

Lấy đạo hàm hệ phương trình cuối cùng (chú ý rằng $K_i$ không phụ thuộc vào $x_i$) theo $x_i$ ta được

$$c_j\delta_{ji} = x_j^{-\frac{1}{\sigma}}\left(\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_i} + \alpha_j\int\frac{\partial\delta_{ji}}{\partial x_i}dx_j\right). \tag{12}$$

$$c_j\left(\delta_{ji} + \frac{\partial\delta_{ji}}{\partial x_j}\right) = x_j^{-\frac{1}{\sigma}}\left[\left(\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_i} + \alpha_j\int\frac{\partial\delta_{ji}}{\partial x_i}dx_j\right)\left(\delta_{ji} - \frac{1}{\sigma x_j}\right) + \alpha_j\frac{\partial\delta_{ji}}{\partial x_i}\right]. \tag{13}$$

Chia (13) cho (12), với chú ý rằng $\delta_{ji} \neq 0$ và do bổ đề ta được

$$\frac{1}{\delta_{ji}}\frac{\partial\delta_{ji}}{\partial x_j} = \alpha_j\frac{\partial\delta_{ji}}{\partial x_i}/\left(\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_i} + \alpha_j\delta_{ji}\right) - \frac{1}{\sigma x_j}. \tag{14}$$

Ta chứng minh rằng $\alpha_j = constant$, tức là không phụ thuộc vào bất cứ biến nào.

Thực vậy, giả sử ngược lại $\alpha_j$ là hàm của những biến khác với $x_j$. Khi đó từ (10) ta được

$$\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_i} = x_j^{\frac{1}{\sigma}}e^{-\int\delta_{ji}dx_j}\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x_j\partial x_i} - \frac{\partial y}{\partial x_j}\delta_{ij}\right].$$

Những biểu thức trong ngoặc bằng 0 (theo định nghĩa của nhịp độ hỗn hợp tăng năng suất giới hạn), vì vậy $\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_i} = 0$ mâu thuẫn với giả thiết rằng $\alpha_j$ là hàm của $x_i$.

Do đó, theo bổ đề ta có

$$\alpha_j\frac{\partial\delta_{ji}}{\partial x_i}/\left(\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_i} + \alpha_j\delta_{ij}\right) = \frac{1}{\delta_{ij}}\frac{\partial\delta_{ij}}{\partial x_j},$$

và phương trình (14) bây giờ có dạng

$$\frac{1}{\delta_{ji}}\frac{\partial\delta_{ji}}{\partial x_j} - \frac{1}{\delta_{ij}}\frac{\partial\delta_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\sigma x_j}. \tag{15}$$

Phương trình này cho nghiệm

$$\frac{\delta_{ji}}{\delta_{ij}} = c_j x_j^{-\frac{1}{\sigma}},$$

trong đó $c_j$ không phụ thuộc $x_j$.

Tương tự, từ phương trình

$$\frac{1}{\delta_{ij}}\frac{\partial\delta_{ij}}{\partial x_i} - \frac{1}{\delta_{ji}}\frac{\partial\delta_{ji}}{\partial x_i} = -\frac{1}{\sigma x_i}$$

ta được

$$\frac{\delta_{ij}}{\delta_{ji}} = c_i x_i^{-\frac{1}{\sigma}},$$

trong đó $c_i$ không phụ thuộc vào $x_i$.

Toàn bộ chứng minh trên dẫn đến vấn đề là $c_j$ là hàm của $x_i$ và $c_i$ là hàm của $x_j$, mà chính là $c_j = \beta_j x_i^{\frac{1}{\sigma}}$, $c_i = \beta_i x_j^{\frac{1}{\sigma}}$ trong đó $\beta_j$ và $\beta_i$ hoàn toàn không phụ thuộc vào $x_i$ và $x_j$. Thực vậy, giả sử

$$\frac{\delta_{ji}}{\delta_{ij}} = \frac{\beta_j}{\beta_i}\left(\frac{x_i}{x_j}\right)^{\frac{1}{\sigma}}. \tag{16}$$

Đưa đẳng thức này về dạng lô - ga rít và lấy đạo hàm kết quả thu được theo $x_j$, ta được

$$\frac{1}{\delta_{ji}}\frac{\partial \delta_{ji}}{\partial x_j} - \frac{1}{\delta_{ij}}\frac{\partial \delta_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\sigma x_j}.$$

Từ đó hiển nhiên rằng hệ thức cần tìm và (16) chỉ khác nhau một hằng số.

Mệnh đề 1, về nguyên tắc, có thể được sử dụng để xây dựng mọi hàm sản xuất với độ co dãn thay thế không đổi, nhưng đó là một công cụ rất phức tạp. Vì vậy ta sẽ tiến hành bằng con đường khác (kém tổng quát hơn), và (5) khi đó có thể được dùng để kiểm tra tính chính xác của hàm sản xuất với độ co dãn thay thế không đổi đã được xây dựng.

Kí hiệu $\delta^y_{jj}$, $\delta^y_{ji}$ lần lượt là nhịp độ đơn và hỗn hợp tăng năng suất tới hạn của hàm $y = f(x_1, ... x_n)$ và $\delta^Y_{jj}$, $\delta^Y_{ji}$ là các nhịp độ tương ứng của hàm $Y$, trong đó $Y$ là hàm số của $y$, ta có mệnh đề sau:

**Mệnh đề 2.** *Hàm trơn của hàm sản xuất một mức với độ co dãn thay thế không đổi là hàm với cùng độ co dãn thay thế không đổi nó.*

*Chứng minh.* Giả sử $y$ là hàm bất kỳ của $x_1, x_2, ..., x_n$ và $Y = F(y)$ là hàm liên tục và hai lần khả vi liên tục của $y$. Khi đó từ

$$\frac{\partial Y}{\partial x_j} = \frac{dY}{dy}\frac{\partial y}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial x_j^2} = \frac{d^2 Y}{dy^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)^2 + \frac{dY}{dy}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j^2},$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{d^2 Y}{dy^2}\frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial y}{\partial x_i} + \frac{dY}{dy}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i},$$

ta được

$$\delta^Y_{jj} = \delta^Y_{yy}\frac{\partial y}{\partial x_j} + \delta^y_{jj}, \quad \delta^Y_{ji} = \delta^Y_{yy}\frac{\partial y}{\partial x_j} + \delta^y_{ji},$$

trong đó

$$\delta^Y_{yy} = \frac{d^2 Y}{dy^2} / \frac{dY}{dy}.$$

Từ đó

$$\delta^Y_{jj} - \delta^Y_{ji} = \delta^Y_{jj} - \delta^Y_{ij}.$$

Vì vậy nếu $y$ là hàm sản xuất một mức với độ co dãn thay thế không đổi, tức là nếu

$$\delta^y_{jj} + \frac{1}{\sigma x_j} - \delta^y_{ji} = 0,$$

thì

$$\delta_{jj}^{Y} + \frac{1}{\sigma x_j} - \delta_{ji}^{Y} = 0,$$

theo định nghĩa $Y = F(y)$ cũng là hàm sản xuất một mức với độ co dãn thay thế không đổi $\sigma$. Đó là điều phải chứng minh.

## 3. Một vài ví dụ

Sử dụng định lý 2 mà các hàm cơ bản $y = f(x_1, \ldots x_n)$ là các hàm sản xuất co dãn thay thế không đổi và nhịp độ hỗn hợp tăng năng suất tới hạn bằng không (9).

$$
\begin{aligned}
y &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\sigma}{\sigma - 1} x_j^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} && \text{nếu } 1 < \sigma < \infty \\
y &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \ln x_j && \text{nếu } \sigma = 1 (x_j \geq 1 \text{nếu } \alpha_j > 0) \\
y &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j && \text{nếu } \sigma = \infty \\
y &= \min(x_1, x_2, \ldots x_n) && \text{nếu } \sigma = 0
\end{aligned}
$$

ta có thể xây dựng hàng loạt hàm sản xuất với độ co dãn thay thế không đổi và nhịp độ tăng năng suất tới hạn là hàm của các biến $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Hàm sản xuất $Y = a^y$, $a =$ constant. Dễ dàng thấy rằng

$$
Y = \begin{cases}
a^{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\sigma}{\sigma-1} x_j^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}, & \text{nếu } 0 < \sigma < \infty,\ \sigma \neq 1 \\
a^{\ln \prod_{j=1}^{n} x_j \alpha_j}, & \text{nếu } \sigma = 1 \\
a^{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j}, & \text{nếu } \sigma = \infty \\
a^{\min(x_1, x_2, \ldots x_n)}, & \text{nếu } \sigma = 0.
\end{cases}
$$

Trong dạng này ta có nhận xét sau

1. Nếu $a = e$ thì ta được hàm Cobb - Douglas

$$Y = \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j},$$

khi $\sigma = 1$.

2. Khác với trường hợp nhịp độ tăng hỗn hợp năng suất tới hạn bằng không, trong hàm sản xuất dạng này $\delta_{jj} = f_j(x_j)$. Hơn nữa, $\sigma$ có thể lấy mọi giá trị hằng số từ 0 đến $\infty$.

3. Riêng với trường hợp $\delta = 0$ hàm số vẫn có nhịp độ hỗn hợp tăng năng suất tới hạn bằng không.

Hàm sản xuất dạng $Y = by^a$; $a, b =$ constant.

1. Với $0 < \delta < \infty$, $\delta \neq 1$, ta có

$$Y = b\Big[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\sigma}{\sigma - 1} x_j^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\Big]^a. \tag{17}$$

Với $a > 0$ thì đây là hàm CES quen biết, và là hàm thuần nhất bậc $\frac{\sigma-1}{\sigma}a$.

- Nếu $a = \frac{\sigma}{\sigma-1}$ thì $Y$ tuyến tính thuần nhất.
- Hàm mở rộng quy mô sản xuất giảm nếu $a < \frac{\sigma}{\sigma-1}$ và tăng với $a > \frac{\sigma}{\sigma-1}$.

Với $a < 0$ thì $Y$ là hàm tỷ lệ nghịch với $y$.

Nhìn vào (17) ta thấy rằng $Y$ không âm với mọi giá trị của $a$, nếu $b > 0$ và $\alpha_j > 0$ nếu $\sigma > 1$, $\alpha_j < 0$ nếu $\sigma < 1$. Đạo hàm bậc nhất không âm khi $a > 0$ (nếu $\sigma > 1$) và khi $a < 0$ (nếu $\sigma < 1$). Đạo hàm bậc hai $\partial^2 Y/\partial x_j^2$ không dương khi

$$\frac{\alpha_j x_j^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}} \leq \frac{1}{(\sigma-1)(a-1)}.$$

Đặc biệt bất đẳng thức cuối cùng luân luân thỏa mãn nếu $a \leq \frac{\sigma}{\sigma-1}$.

2. Với $\sigma = 1$, ta có

$$Y = b\Big[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \ln x_j\Big]^a. \tag{18}$$

Dễ dàng thấy rằng với cùng mức độ mở rộng qui mô sản xuất thì hoàn trả (return) của nền sản xuất xác định bởi hàm (18) thấp hơn của nền kinh tế xác định bằng hàm (17). Hàm này thỏa mãn mọi tiên đề của hàm sản xuất nếu $b > 0$, $\alpha_j > 0$, $0 < a \leq 1$.

3. Với $\sigma = \infty$ thì hàm

$$Y = b\Big[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\Big]^a$$

là hàm sản xuất nếu $b > 0$, $\alpha_j > 0$, $0 < a \leq 1$.

Hàm sản xuất dạng logarit $Y = \ln y$.
Nếu đặt

$$Y = \ln\Big[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\sigma}{\sigma - 1}(x_j + a_j)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\Big], \tag{19}$$

trong đó $a_1, \ldots a_n$ là những hàm số không âm bất kỳ, thỏa mãn

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\sigma}{\sigma - 1} x_j^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} = 1,$$

với $\alpha_j \geq 0$, $j = \overline{1, n}$ thì (19) là hàm sản xuất không thuần nhất.

Một cách tương tự ta xét cho các dạng mà $\sigma = 1$, $\sigma = \infty$, và $\sigma = 0$ (Léontiev).

Hàm sản xuất dạng Logistic $Y = \frac{a}{1+c\exp(-1)}$.

Như đã biết, trong [9,10] xem rằng sự tăng trưởng trong các nền kinh tế đang phát triển có thể nghiên cứu được nếu dùng hàm sản xuất lõm - lồi. Nếu xem năng suất cây trồng là hàm của lượng phân bón các loại được sử dụng cho một công thức canh tác nào đó thì ta luân có

$$y_0 = f(0,0,...,0) > 0,$$

trong đó $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ là năng xuất , và $x_j$ là lượng phân bón loại $j$. Hàm này trong một miền nhất định nào đó có thể xem như tuân theo luật logistic (lõm - lồi) v.v...

Để nghiên cứu các dạng phát triển trên có thể dùng luật logistic.

Để làm ví dụ chúng tôi xét hàm sản xuất với $0 < \sigma < \infty$, $\sigma \neq 1$. Khi đó ta có

$$Y = \frac{a}{1 + c\exp(-\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\sigma}{\sigma-1} x_j^{\frac{\sigma-1}{\sigma}})}. \tag{20}$$

Hàm (20) là hàm sản xuất nếu $a > 0$, $f_0 = a/(1+c)$, $c > 0$ (hoặc $-1 < c < 0$) hoặc với $a < 0$ thì $-\infty < c < -1$ và $\alpha_j > 0$ nếu $a > 0$, $c > 0$ hoặc $a < 0$, $-\infty < c < -1$, $\alpha_j < 0$ nếu $a > 0$, $-1 < c < 0$ với mọi $j = \overline{1,n}$.

Tóm lại, nhờ mệnh đề 2 ta có thể xây dựng hàng loạt hàm sản xuất với độ co dãn thay thế không đổi.

## Tài liệu tham khảo.


1. Ivanilov U. P. & Lotov A.B., *Các mô hình toán học trong kinh tế*, M Nauka, 1979, 303 p. (in Russian).
2. Cobb C.W. & Douglas P.H., *A theory of production*, Amer. Economic Rev. 1928, n18, p. 139-165.
3. Vladimir Strnad, *Metody odvozeni jednotlivych typi produkenich funkci*, Ekonomic - ko - matematicky obzor, Cesko-slovenska Akademie Ved , 1972, N1, p. 1-17.
4. Arrow K.J., Chenery H. B., Ninkas B. S. & Solow R. N., *Capital - Labour subsitution and economic efficientcy,* Rev. Economics and Statistics, 1961, N 43, p. 225-250.
5. Yasui T., *The CES production function,* A note, Econometrica, July 1965, V. 33, p. 646-648.
6. Kleiner G. B., Hàm sản xuất M. Tài chính và Thống kê, 1986, 238 p. (in Russian).
7. Mikhalevskii B. N., Hàm sản xuất và mô hình tăng trưởng kinh tế, Kinh tế và các phương pháp toán học, 1967, t. III, N 2. p.199-222 (in Russian).
8. Allen R.G.D., *Macro-Economic Theory. A mathematical treatment,* Macmillan, London, Melbourne, Toronto, St. Martin's Press, New-York., 1967, 420 p.

9. Tô Cẩm Tú: *Về một số phương pháp xây dựng hàm sản xuất*, Trung Tâm tính toán VHL Liên xô, M. 1988, 28 p. (in Russian).
10. To Cam Tu, *The one-level-production functions with the rates of limit productivity's growth of several variables,* The 4[th] Congress of Vietnamese Mathematicians, Hanoi September 4-7, 1990. p.133.

**Abstract**

The one level - production functions with the rates of limit productivity's growth of several variables.

*By using of rates of limit productivity's growth*

$$\delta_{ji} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i} / \frac{\partial y}{\partial x_j}, \quad i, j = \overline{1, n}$$

*in this work, the following fundamental theorems for one-level production functions with constant elasticity of substitution are proved:*

*a.*

$$\frac{\partial \delta_{ji}}{\partial x_i} = \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial x_j},$$

*b.*

$$\frac{\delta_{ji}}{\delta_{ij}} = \alpha_{ji} \left(\frac{x_i}{x_j}\right)^{1/\delta}.$$

***With these sentences the building of all such functions is possible. However, for the construction of almost all such functions we have a simple theorem:***

***The smooth function of one-level production function with constant elasticity of substitution is the function with the same constant of elasticity of substitution.***