Tạp Chí Tin Học và Điều Khiển Học
Tập X(1994), Số 1, 24-29

# Về một thuật toán đánh giá bậc hệ động lực tuyến tính

Vũ Chấn Hưng
Viện Công nghệ thông tin

## I. Mở đầu

Một trong những vấn đề lớn trong nhận dạng hệ thống là xác định bậc phù hợp cho hệ thống trên cơ sở các số liệu vào ra của hệ thống đó. Khi một bậc mô hình thích hợp đã được chọn thì các thuật toán đánh giá thông số, mà hầu hết đều với giả thiết có bậc mô hình đánh giá đã biết trước, có thể được áp dụng để tìm thông số hệ thống. Các phương pháp đánh giá bậc hiện nay có thể được chia thành các lớp sau: các phương pháp thống kê, các phương pháp tối thiểu hóa một tiêu chuẩn nào đó, và các phương pháp xác định rank của ma trận thông tin [1], [2]. Phương pháp đánh giá bậc dưới đây được xây dựng trên cơ sở kiểm tra đặc tính thống kê của sai số lọc trạng thái.

## II. Đặt bài toán

Cho hệ tuyến tính được mô tả bởi quá trình ARMA sau

$$\begin{aligned} y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \ldots + a_n y(k-n) &= \\ b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \ldots + b_n u(k-n), & \qquad (1) \end{aligned}$$

trong đó các hệ số $a_1, \ldots, a_n$; $b_1, \ldots b_n$ là các hằng số chưa biết và bậc $n$ của hệ cũng chưa biết. Cần đánh giá bậc của hệ và các hệ số của hệ thống.

## III. Lọc Kalman và lọc hai mức

Cho bộ lọc tuyến tính được mô tả bởi phương trình trạng thái

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + w(k) \\ y(k) &= C^T x(k) + n(k), \end{aligned} \tag{2}$$

trong đó $A$, $B$, $C$ là các ma trận có số chiều $(m \times n)$, $(n \times 1)$, $(n \times 1)$ với các thông số hằng biết trước, $x(k)$ là véc tơ $n$ chiều, $y(k)$ là scalar,

$$\begin{aligned} E[w(k)]_T &= E(n(k)] = 0 \\ E(w(i)w(j)] &= R_w \sigma_{ij} \\ E(n(i)n(j)\} &= r_n \sigma_{ij} \end{aligned} \tag{2a}$$

$w(k)$, $n(k)$ là các nhiễu không tương quan với nhau.

Bộ lọc Kalman cho đánh giá tối ưu $\hat{x}(k)$ của trạng thái $x(k)$ theo nghĩa sau:

$$E[(x(k) - \hat{x}(k))\ (x(k) - \hat{x}(k))^T] = \min \tag{3}$$

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + K(k+1)[y(k+1) - C^T A\hat{x}(k)], \tag{4}$$

trong đó $K(k+1)$ là hệ số lọc Kalman được tính như sau

$$K(k+1) = Q(k+1)C[C^T Q(k+1)C + r_n]^{-1}$$

ở đây

- $Q(k+1)$ là sai số dự báo trạng thái $x(k+1)$ trên cơ sở $k$ quan sát

$$Q(k+1) = P(k+1;k) = AP(k)A^T + R_w$$

- $P(k+1)$ là sai số lọc trạng thái $x(k+1)$ trên cơ sở $k+1$ quan sát

$$P(k+1) = P(k+1;k+1) = Q(k+1) - K(k+1)CQ(k+1).$$

Ký hiệu $\hat{x}_1(k)$ là đánh giá trạng thái hệ thống ở mức thứ nhất, khiđó thuật toán đánh giá trạng thái tối ưu được viết lại như sau

$$\hat{x}_1(k+1) = A\hat{x}_1(k) + Bu(k) + K_1(k+1)[y(k+1) - C^T A\hat{x}_1(k)] \tag{5}$$

$$K_1(k+1) = Q_1(k+1)C[C^T Q_1(k+1)C + r_n]^{-1} \tag{5a}$$

$$Q_1(k+1) = AP_1(k)A^T + R_w \tag{5b}$$

$$P_1(k+1) = Q_1(k+1) - K_1(k+1)C^T Q_1(k+1) \tag{5c}$$

$$P_1(0) = P_0,\ x_1(0) = E[x(0)].$$

Nếu ta coi $\hat{x}_1(k+1)$ là một quan sát khác của hệ thống (2), có thể mô tả hệ thống với quan sát này ở dạng sau

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + w(k) \\ \hat{x}_1(k+1) &= x(k) + v(k), \end{aligned}$$

trong đó đặc tính thống kê của nhiễu quan sát có dạng

$$E[v(k)] = 0$$
$$E[v(k)v^T(k)] = E[(x(k) - \hat{x}(k))(x(k) - \hat{x}(k))^T] = P_1(k).$$

Thực hiện quá trình lọc một lần nữa, được gọi là lọc ở mức thứ hai.

$$\hat{x}_2(k+1) = A\hat{x}_2(k) + Bu(k) + K_2(k+1)[\hat{x}_1(k+1) - A\hat{x}_2(k) \tag{6}$$
$$K_2(k+1) = Q_2(k+1)[Q_2(k+1) + P_1(k+1)]^{-1} \tag{6a}$$
$$Q_2(k+1) = AP_2(k)A^T + R_w \tag{6b}$$
$$P_2(k+1) = Q_2(k+1) - K_2(k+1)Q_2(k+1) \tag{6c}$$
$$P_2(0) = P_1(0) = P_0,\ \hat{x}_2(0) = \hat{x}_1(0) = E[x(0)].$$

Trong lý thuyết lọc Kalman rời rạc, hệ số lọc $K(k)$ còn được tính như sau

$$K(k) = P(k)Cr_n^{-1} \tag{7}$$

và quan hệ giữa sai số lọc $P(k)$ và sai số dự báo $Q(k)$ còn được thể hiện qua biểu thức [3], [4]

$$P^{-1}(k+1) = Q^{-1}(k+1) + Cr_n^{-1}C^T \tag{8}$$

Xét hai biểu thức (5c) và (6c), trong đó $K(k)$ được tính theo (7)

$$P_1(k+1) = Q_1(k+1) - P_1(k+1)Cr_n^{-1}C^TQ_1(k+1) \tag{9a}$$
$$P_2(k+1) = Q_2(k+1) - P_2(k+1)P_1^{-1}(k+1)Q_2(k+1). \tag{9b}$$

Thay (8) vào (9b) ta nhận được

$$P_2(k+1) = Q_2(k+1) - P_2(k+1)Q_1^{-1}(k+1)Q_2(k+1) - P_2(k+1)Cr_n^{-1}C^TQ_2(k+1), \tag{10}$$

trong đó $r_n$, $P$, $Q$ là các ma trận xác định dương.

Từ (9a) và (10) rút ra được quan hệ giữa $P_1(k)$ và $P_2(k)$

$$P_2(k+1) < P_1(k+1),\ \forall k. \tag{11}$$

Từ đây có thể rút ra được một số kết luận sau:

**Kết luận 1:** Nếu hệ thống (2) có cấu trúc (bậc) và thông số hằng xác định trước, chịu tác động của nhiễu (2a) thì biểu thức (11) đúng.

**Kết luận 2:** Ký hiệu $n^*$ là bậc thật của hệ (2). Giả thiết là $n^* \le n_{\max}$, trong đó $n_{\max}$ là một số xác định trước. Trong trường hợp bậc thật $n^*$ và các thông số của hệ thống không biết trước, ta sử dụng mô hình không đánh giá có bậc $n' < n_{\max}$. Giả sử trong quá trình đánh giá mà nhận được kết quả sau

$$P_2(k) > P_1(k) \tag{12}$$

thì bậc và thông số của mô hình đánh giá không đúng với bậc và thông số của hệ thống thật.

*Chứng minh.* Nếu $n'$ đúng bằng bậc thật, thông số mô hình đánh giá cùng trùng với thông số thật thì quan hệ giữa $P_2(k)$ và $P_1(k)$ phải thoả mãn biểu thức (11) như đã chứng minh ở trên, điều này trái với giả thiết (12). Vậy $n'$ không thể trùng với bậc thật và thông số mô hình không trùng với thông số thật.

## IV. Thuật toán đánh giá bậc và thông số hệ tuyến tính

Để đánh giá bậc và thông số hệ (1), ta đưa một nhiễu ngẫu nhiên vào hệ thống. Khi đó hệ thống được mô tả như sau

$$\begin{aligned} y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \ldots + a_n y(k-n) &= \\ b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \ldots + b_n u(k-n) + v(k). \end{aligned} \tag{13}$$

trong đó

$$E[v(k)] = 0$$
$$E[v(i)v(j)] = r_i^2 \sigma_{ij},$$

$\sigma_{ij}$ là dấu Kroneker. Viết (13) dưới dạng phương trình trạng thái

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + w(k) \\ y(k) &= C^T x(k) + n(k), \end{aligned} \tag{14}$$

trong đó $x(k) = [x_1(k), x_2(k), \ldots, x_n(k)]^T$, $y(k)$ là scalar,

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ -a_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, B = [b_1 \quad b_2 \quad \ldots \quad b_n], w(k) = [-a_1 \quad -a_2 \quad \ldots \quad -a_n],$$

$$C^T = [1, 0 0, \ldots, 0], n(k) = v(k), E[w(k)] = 0, E[w(k)w^T(k)] = R_u \sigma_{ij}$$

bậc $n$ và các thông số $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots b_n$ chưa biết.

*Thuật toán đánh giá:*

Thuật toán đánh giá bắt đầu với những giá trị khởi đầu $P_1(0) = P_2(0) = P_0$, $a_i(0) = a_{i0}$; $\hat{b}_i = b_{i0}$; $\hat{x}_1(0) = \hat{x}_2(0) = E[x(0)]$; $n' = n_{\max}, \varepsilon_1, \varepsilon_2$.

*Bước 1:*

+ Đánh giá thông số hệ thống (13) bằng phương pháp bình phương cực tiểu [10] hoặc bằng phương páp biến phân [8,9].

+ Kiểm tra điều kiện dừng thuật toán đánh giá thông số:

- Với phương pháp bình phương cực tiểu, nếu $e^2(k) = (y(k) - \Phi(k)e^T(k))^2 < \varepsilon_1$ thì chuyển sang bước 2.

- Với phương pháp biến phân, nếu $\|\partial\theta\| < \varepsilon_2$ thì chuyển sang bước 2.

*Bước 2:*

Giải bài toán đánh giá trạng thái hai mức với bậc $n'$ và các thông số hệ thống nhận được ở bước 1. Nghiệm là các cặp $(\hat{x}_{1\theta}(k), P_1(k))$ và $(\hat{x}_{2\theta}(k), P_2(k))$.

*Bước 3:*

Kiểm tra quan hệ giữa $P_1(k)$ và $P_2(k)$.

Nếu $P_1(k) < P_2(k)$ thì thay $n'$ bằng $n' - 1$, và quay lại bước 1.

Nếu $P_1(k) > P_2(k)$ thì bậc $n'$ hiện thời là bậc phù hợp, và thông số đánh giá hiện thời là thông số hệ thống.

## V. Mô phỏng

Có thể minh họa thuật toán trên qua một ví dụ đơn giản, quá trình mô phỏng được thực hiện trên chương trình PC-MATLAB.

Cho một hệ thống tuyến tính

$$y(k) = a_1 y(k-1) + b_1 u(k-1),$$

với giá trị thật của hệ số $a_1 = 0.4$, $b_1 = 1$. Nhiễu ngoài được đưa vào hệ thống có dạng ồn trắng với cường độ $\sigma_w^2 = 0.5$, nhiễu quan sát có cường độ $\sigma_v^2 = 1000$.

Trong trường hợp biết rõ bậc và thông số hệ thống, thuật toán đánh giá cho các giá trị xác lập sau: $P_1 = 9.86776$, $P_2 = 0.73766$.

Giả sử bậc cũng như thông số của hệ cũng chưa biết trước. Chọn bậc giả định ban đầu $n' = 2$. Các thông số khởi đầu $a_{10} = 1$, $a_{20} = 0.5$ Trong quá trình thực hiện thuật toán đánh giá, các dấu hiệu theo (12) xuất hiện ở các phần tử $p^{12}$ và $p^{21}$ của ma trận hiệp phương sai số lọc $P_1$ và $P_2$: $P_1^{12} = P_1^{21} = 0.12841$, $P_2^{12} = P_2^{21} = 0.17875$. Theo dấu hiệu (12) bậc $n' = 2$ không phải là bậc thật. Quá trình đánh giá ứng với $n' = 1$ và $a_1 = 0.38794$.

## Tài liệu tham khaỏ


1. Astrom K.J. & Eykhoff P., *A survey*, Automatica v.7, 1971.
2. Woodside C.M., *Estimation of the Order of Linear System*, Automatica v. 7. 1971.

3. Sage A.P., *Optimum Systems Control,* Prentice Hall, 1982.
4. Iserman R., *Digital Control Systems,* New York, 1981.
5. Karny M., *Algorithm for determining the model structure of a controlled system,* Kybernetica v. 19, 1983.
6. Soldestrom T., *On Model Structure Testing in System Indentification,* Int. J. Control v. 26, 19..
7. Vũ Như Lân & Nguyễn Thúc Loan, *Về một phương pháp ước lượng tối ưu hai mức vector trạng thái hệ liên tục theo các quan sát rời rạc,* Khoa học kỹ thuật số 7 + 8, 1988.
8. Vũ Chấn Hưng & Son H.H, *Parameter and Order Estimation of Linear System based on Variational Method,* Proced. of 16$^{th}$ National Symposium on Theoretical Physics, 1991.
9. Vũ Như Lân, Vũ Chấn Hưng & Đặng Thành Phu, *Nhận dạng bậc hệ động lực,* Tạp chí Tin học, số 3, 1992.
10. Strejc V., *Least Square Parameter Estimation,* IFAC Symposium, Damarstadt 1979.

**Abstract**

On the Order Estimation Algorithm of the Linear Systems

*The order estimation algorithm is proposed based on the two-stage filter and the system parameters estimation.*